

**NOTA: Justifique convenientemente todas as respostas e apresente todos os cálculos efetuados.**

1. Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \frac{\sqrt{2-x-y} \ln(y-x^2)}{y-1}$ .
- Determine o domínio de  $f$ ,  $D_f$ , e faça a sua representação gráfica;
  - Indique analiticamente  $\text{int}(D_f)$ ,  $\text{fr}(D_f)$  e  $\text{ad}(D_f)$ ;
  - $D_f$  é limitado? E compacto?
  - Justifique o valor lógico da seguinte proposição:  $\exists A \subset \mathbb{R}^2: \text{ad}(A \cup D_f) \neq (A \cup D_f)'$   
(onde  $(A \cup D_f)'$  representa o derivado do conjunto  $A \cup D_f$ ).
2. Determine e classifique todos os pontos críticos de  $f(x, y) = 2(x - 1)^2 + y^4 - 4(x - 1)y$ .
3. Considere o conjunto  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \leq 1 \wedge y + 1 \leq x \leq 2(y + 1)\}$ .
- Represente-o graficamente e, usando integrais duplos, calcule a área de  $A$ ;
  - Calcule

$$\iint_A \frac{1}{y^2 + 2y + 5} dx dy.$$

Cotação:

1a	1b	1c	1d	2	3a	3b
3	3	1,5	1,5	5	4	2

**NOTA: Justifique convenientemente todas as respostas e apresente todos os cálculos efetuados.**

1. Sejam  $a$  e  $b$  constantes reais e seja  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & -6 & a & b \\ -2 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ .

a) Determine a característica da matriz  $C$ , para todos os possíveis valores de  $a$  e  $b$ ;

b) Justifique o que pode concluir sobre a independência linear

i) dos vetores  $(1,0,3,2)$ ,  $(4,-6,-6,8)$ ,  $(-2,1,-3,-4)$ ;

ii) dos vetores  $(1,4,-2)$ ,  $(0,-6,1)$ ,  $(3,-6,-3)$ ;

c) Resolva matricialmente o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 3z = 2 \\ 4x - 6y - 6z = 8 \\ -2x + y - 3z = -4 \end{cases};$$

d) Escreva  $(2,9,-4)$  como combinação linear de  $(1,4,-2)$ ,  $(0,-6,1)$  e  $(3,-5,3)$ , ou conclua que tal não é possível;

e) Calcule, caso exista, o(s) valor(es) de  $b$  para os quais a quarta coluna de  $C$  é um vetor de norma 6.

f) Faça  $a = b = 0$ . Calcule  $|D|$ , sendo  $D$  a matriz quadrada de ordem 4 que tem como primeiras linhas as 3 linhas de  $C$  e cuja quarta linha é  $[3 \ 0 \ 0 \ 0]$ . A matriz  $D$  é invertível?

2. Considere a forma quadrática  $q(x,y,z) = -5x^2 + 2xy + 4xz - 3y^2 - z^2$ .

a) Classifique-a;

b) Indique, justificando, o valor lógico da proposição

$$\exists \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3: q(\mathbf{u})q(\mathbf{v}) < 0.$$

Cotação:

1a	1b	1c	1d	1e	1f	2a	2b
3	2,5	3	2,5	2	3	2,5	1,5