

Instituto Superior de Economia e Gestão

Matemática II

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

27 de Janeiro de 2010 - Época de Recurso - Duração: 2horas

Grupo I

(Cotação: 2 + 2,5 + 2 + 1,5)

O Grupo I possui carácter eliminatório

1. Considere a função de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \ln(x - y)\sqrt{(x - y)(x^2 + y^2 - 1)}.$$

- (a) Determine o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.
- (b) Defina analiticamente a fronteira de D_f .
2. Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = 8y^3 + 12x^2 - 24xy$.
3. Resolva a seguinte equação de diferenças $y_t + 2y_{t-1} = 3t$.
4. Indique os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais a forma quadrática $Q(x, y, z) = x^2 + 4xy + \alpha yz + z^2$ é indefinida.

Grupo II

(Cotação: 4 + 3 + 2 + 3)

1. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-3)^2\sqrt{|y|}}{(x-3)^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (3, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (3, 0) \end{cases}$$

- (a) Determine o gradiente de f no ponto $(3, 0)$.
- (b) Averigue se f é diferenciável no mesmo ponto.
- (c) Determine os vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ para os quais existe derivada de f segundo a direcção do vector $\vec{u}$ no ponto $(3, 0)$.
2. Dada a função $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ e o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 8\}$ justifique que f tem máximo e mínimo no conjunto A e calcule-os.
3. Calcule $\int_0^4 \int_{2x}^8 \sin(y^2) dy dx$.
- (Sugestão: comece por fazer o esboço gráfico da região integranda e depois inverta a ordem de integração).
4. Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ e considere g a função definida por $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Prove que, para todo o ponto $(x, y) \in D_g$, se tem

$$x \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + y \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

e interprete este resultado.