Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

NOME____

Número__________________ Curso__________________________________

MATEMÁTICA II

Época Recurso - 26 de Junho de 2010

Duração: 2 horas

Grupo I

Escolha múltipla. Cotações: cada resposta certa $+1.5$; cada resposta errada -0.5, cada resposta não respondida ou anulada 0.

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

1. Sendo $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-|x-3|}}{\ln(x+y)-1}$, o domínio da função f é

(A) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 7 \ \wedge\ x\ge -y \ \wedge\ y\ne 1-x\}$ **(B)** $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 7 \ \wedge\ x> -y \ \wedge\ y\ne e-x\}$

(C) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 7 \ \wedge\ x> -y \ \wedge\ y\ne 1-x\}$ **(D)** $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1< x< 7 \ \wedge\ x> -y \ \wedge\ y\ne e-x\}$

2. Considere a função $f(x,y,z) = -2x+3y+z$ e a superfície esférica S dada por $x^2+y^2+z^2=56$. O valor máximo M atingido por f em S e o ponto A onde é atingido são, respectivamente,

(A) $M=16$ e $A=(4,6,8)$ **(B)** $M=30$ e $A=(-6,4,2)$

(C) $M=28$ e $A=(-4,6,2)$ **(D)** $M=28$ e $A=(-6,4,4)$.

3. Considere a função $f(x,y,z) = e^{-x+z}\left(-xy+3yz^2\right)$. Então

(A) $\nabla f(0,2,1) = (-8e, 3e, 18e)$ **(B)** $\nabla f(0,2,1) = (8e, 3e, 18e)$

(C) $\nabla f(0,2,1) = (-4e, 3e, 6)$ **(D)** $\nabla f(0,2,1) = (-8e, 3e, 6)$.

4. Considere a forma quadrática $Q(x,y,z) = -4x^2+2xy-2y^2+4yz-8z^2$. Então Q é

(A) definida positiva **(B)** definida negativa **(C)** semi-definida positiva **(D)** indefinida.

Respostas

	A	B	C	D
1.	☐	☒	☐	☐
2.	☐	☐	☒	☐
3.	☒	☐	☐	☐
4.	☐	☒	☐	☐

Grupo II

(Cotação: 3.0+2.0+2.0+2.0+3.0+2.0)

Apresente os cálculos que efectuar e justifique cuidadosamente a resolução das questões seguintes.

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \frac{x^5 y}{x^2+y^2}.$$

a) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$ e defina o seu prolongamento por continuidade $\widetilde{f}$ em $\mathbb{R}^2$.

b) Verifique que $\widetilde{f}$ e diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

2. Calcule $\int\int_A xy^5 dxdy$ sabendo que $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq e^{x^2}\}$.

3. Determine a solução geral $y(x)$ da equação diferencial seguinte:

$$y' + 6x^5 y = x^5.$$

4. Seja f uma função real diferenciável definida em $\mathbb{R}^3$ e $z = f(u,v,w)$ em que $u = x - y$, $v = y - s$ e $w = s - x$. Mostre que para todo $(x,y,s) \in \mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y,s) + \frac{\partial z}{\partial y}(x,y,s) + \frac{\partial z}{\partial s}(x,y,s) = 0.$$

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função f.

6. Seja $f(x,y)$ uma função real de classe C^2 homogénea de grau α. Mostre que as suas derivadas parciais são funções homogéneas de grau $\alpha - 1$.

Matemática 2
Época de Recurso – 26 de Junho de 2010
Tópicos de Resolução

Grupo II

1. a) Calculando os limites direccionais

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=mx}} \frac{x^5 y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^6}{x^2+m^2x^2} = 0.$$

Logo, se existir limite, será 0.
Atendendo ao enquadramento

$$0 \le \left| \frac{x^5 y}{x^2+y^2} \right| \le \frac{|x|^5 |y|}{x^2+y^2} \le |x|^4 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

tem-se que, na verdade, que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^5 y}{x^2+y^2} = 0,$$

pelo que $\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ,(x,y) \ne (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$.

b)
Diferenciabilidade em $A = R^2 \setminus \{(0,0)\}$
A função é diferenciável em A, pois é quociente de funções diferenciáveis em que a função do denominador se anula.
Diferenciabilidade na origem:
Derivadas parciais de $\tilde{f}(x,y)$ no ponto (0,0) são nulas:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}(h,0) - \tilde{f}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}(0,h) - \tilde{f}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

pelo que temos que provar que:

$$\lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \varepsilon(h) = \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \frac{\tilde{f}(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

Ora,

$$0 \le \left| \frac{h_1^5 h_2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right| \le \left(h_1^2+h_2^2\right)^{3/2} \xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{} 0,$$

Logo conclui-se, pelo teorema do enquadramento que o limite é zero, pelo que a função é diferenciável na origem. Portanto, podemos concluir que a função é diferenciável em R^2.

2.

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{e^{x^2}} xy^5 dydx = \int_0^1 \left[\frac{xy^6}{6} \right]_{x^2}^{e^{x^2}} dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{xe^{6x^2} - x^{13}}{6} \right] dx$$
$$= \frac{1}{72} \left[e^{6x^2} \right]_0^1 - \frac{1}{6} \left[\frac{x^{14}}{14} \right]_0^1$$
$$= \frac{e^6 - 1}{72} - \frac{1}{84}$$

3.

$$y' + 6x^5 y = x^5$$

$$y(x) = e^{-P(6x^5)} (Pe^{P(6x^5)} x^5 + C) = e^{-x^6} \left(\frac{e^{x^6}}{6} + C \right) = \frac{1}{6} + e^{-x^6} C$$

4.

$$z = f(u, v, w)$$
$$u = x - y$$
$$v = y - s$$
$$w = s - x$$

Mostrar que $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y, s) + \frac{\partial z}{\partial y}(x, y, s) + \frac{\partial z}{\partial s}(x, y, s) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial v}$$

substituindo

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

c.q.m.

5.

$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Pontos de estacionaridade :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ y(x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x(6x \;\; +10) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\dfrac{5}{3} \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$P_1(0,0);\;\; P_2(-5/3,0);\;\; P_3(-1,-2);\;\; P_4(-1,2)$

Classificação:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{P}_1(0,0):\quad H(0,0) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Pelos menores principais : $\mathrm{H}_1 = 10 > 0$ e $\mathrm{H}_2 = 20 > 0$ (Def. Positiva)

o $\mathrm{P}_1(0,0)$ é um minimizante.

$\mathrm{P}_2(-5/3,0):\quad H(-5/3,0) = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{bmatrix}$

Pelos menores principais : $\mathrm{H}_1 = -10 < 0$ e $\mathrm{H}_2 = 40/3 > 0$ (Def. Negativa)

o $\mathrm{P}_2(-5/3,0)$ é um maximizante.

$\mathrm{P}_3(-1,-2):\quad H(-1,-2) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

Pelos menores principais : $\mathrm{H}_1 = -2 < 0$ e $\mathrm{H}_2 = -16 < 0$ (Indefinida)

o $\mathrm{P}_3(-1,-2)$ é um ponto de sela.

$\mathrm{P}_4(-1,2):\quad H(-1,2) = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

Pelos menores principais : $\mathrm{H}_1 = -2 < 0$ e $\mathrm{H}_2 = -16 < 0$ (Indefinida)

o $\mathrm{P}_4(-1,2)$ é um ponto de sela.

6.

Se $f(x,y)$ é uma função de classe C^2 homogénea de grau α, então :

(A) $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\alpha f(x,y)$

se derivarmos (A) em ordem a x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+y\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Leftrightarrow$$

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+y\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Leftrightarrow$$

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+y\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=(\alpha-1)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

por outro lado se derivarmos (A) em ordem a y :

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\alpha\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Leftrightarrow$$

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\alpha\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Leftrightarrow$$

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=(\alpha-1)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

mostrando-se assim que as derivadas parciais de $f(x,y)$ são funções homogéneas de grau α-1.