INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO, UTL

Matemática II

Época Normal, 30 de Maio de 2011

Duração: 2 horas

Nome: ____ Nº de Aluno: __________

Grupo I (Escolha múltipla)

Nota: Cada resposta certa vale 1.5 val.; cada resposta errada é penalizada em 0.5 val.; cada pergunta não respondida ou com resposta anulada vale 0 val.; um total negativo neste grupo corresponde a zero valores; as respostas a este grupo devem ser dadas no final desta página, na zona assinalada para o efeito.

1. Sendo $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y-4}}{1-\ln(x+y+2)}$, o domínio da função f é:

(A) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4-x\leq y \ \wedge \ y\neq e-x-2\right\}$ **(B)** $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y+2>0\right\}$

(C) $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y+2\neq 1\right\}$ **(D)** $\mathbb{R}^2$

2. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{4x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Relativamente a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, pode afirmar-se que:

(A) Não existe, porque $(0,0)\notin D_f$ **(B)** Existe e tem o valor 1

(C) Existe e tem o valor 0 **(D)** Não existe, porque os limites direccionais são diferentes

3. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^2$, diferenciável e homogénea de grau 4, tal que $f(0,8)=12$. Então pode afirmar-se que:

(A) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,8)=6$ **(B)** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,8)=0$

(C) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,8)=4$ **(D)** $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,8)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,8)$

4. A forma quadrática $Q(x,y,z)=x^2+2y^2-2xy+z^2$ é:

(A) Definida positiva **(B)** Definida negativa

(C) Indefinida **(D)** Semidefinida positiva

Respostas

	A	B	C	D
1.	☒	☐	☐	☐
2.	☐	☐	☐	☒
3.	☒	☐	☐	☐
4.	☒	☐	☐	☐

Grupo II

(Cotação: 2.0+2.0+3.0+2.0+3.0+2.0)

Apresente os cálculos que efectuar e justifique cuidadosamente a resolução das questões seguintes.

1. Determine os extremos da função $f(x, y, z) = x - y + 2z$ na superfície do elipsóide definido pela condição $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$.

2. Seja $z = x^2 y$, $x = 3t + 4u$, $y = 5t - u$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial t}$, usando regras de derivação da função composta.

3. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares

a) $y'' - 9y' + 14y = 2x$.

b) $y' - 9y = 2$.

4. Seja $k \in \mathbb{R}$ e considere a função $f(x, y) = k(x - 4)^2 + (y - 3)^2$. Determine e classifique os pontos críticos de f, em função do parâmetro k.

5. Seja $k \in [0, 1]$ e considere o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ kx^2 \leq y \leq 1\}$.

a) Exprima a área do conjunto A através de um integral duplo e determine o parâmetro k de modo que o valor da área seja 1.

b) Considere $k = 1$ e calcule $\displaystyle\iint_A x \cos y \, dx \, dy$.

6. Supondo que $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, considere a função $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x, y) = f(x, x + y, xy)$$

a) Exprima $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ em termos das derivadas parciais de f.

b) Use o resultado anterior para verificar a igualdade:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(2, 1) - \frac{\partial F}{\partial y}(2, 1) = \frac{\partial f}{\partial u}(2, 3, 2) - \frac{\partial f}{\partial w}(2, 3, 2),$$

usando como notação $f(u, v, w)$.

Exame MATEMÁTICA II
Época Normal - 30 de Maio de 2011

Grupo II (Tópicos de Resolução)

1. $\mathcal{F}(x, y, z; \lambda) = x - y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 2)$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ -1 + 2\lambda y = 0 \\ 2 + 4\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \sqrt{2}/2 \\ x = -\sqrt{2}/2 \\ y = \sqrt{2}/2 \\ z = -\sqrt{2}/2 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = -\sqrt{2}/2 \\ x = \sqrt{2}/2 \\ y = -\sqrt{2}/2 \\ z = \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$$f(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = -2\sqrt{2}$$

$$f(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = 2\sqrt{2}$$

R: O mínimo e o máximo de f no elipsóide são $-2\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$, respectivamente.

2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t}(t, u) &= \frac{\partial z}{\partial x}(x(t, u), y(t, u))\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}(x(t, u), y(t, u))\frac{\partial y}{\partial t} = 2xy \cdot 3 + x^2 \cdot 5 \\ &= 6(3t + 4u)(5t - u) + 5(3t + 4u)^2 \end{aligned}$$

3. a) $y'' - 9y' + 14y = 2x$

- Solução geral da equação homogénea associada

$$D^2 - 9D + 14 = 0 \Leftrightarrow D = 7 \vee D = 2$$

$$y_h(x) = Ae^{7x} + Be^{2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

- Solução particular: $y_p(x) = \frac{1}{7}x + \frac{9}{98}$

R: A solução geral da equação é $y(x) = Ae^{7x} + Be^{2x} + \frac{1}{7}x + \frac{9}{98}, \quad A, B \in \mathbb{R}$.

3. b) $y' - 9y = 2$

$$y(x) = e^{\int 9dx}\left[\int e^{-\int 9dx} \cdot 2dx + C\right] = -\frac{2}{9} + Ce^{9x}$$

4. $f(x,y) = k(x-4)^2 + (y-3)^2$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k(x-4) = 0 \\ \\ 2(y-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} k = 0 \\ \\ y = 3 \end{cases} \vee$$

<u>Pontos críticos</u>: Se $k \neq 0$, então $(4,3)$ é o único é o único ponto crítico de f. Se $k = 0$, então os pontos $(a,3), a \in \mathbb{R}$ são pontos críticos de f.

<u>Classificação dos pontos críticos</u>:

- Se $k > 0$, tem-se f(4,3)=0 e $f(x,y) > 0$ se $(x,y) \neq (4,3)$, logo $(4,3)$ é minimizante local (é mesmo global).
- Se $k < 0$, tendo em conta que os valores próprios de $H_f(4,3)$ são $\lambda_1 = 2k < 0$ e $\lambda_2 = 2 > 0$, concluímos que $(4,3)$ é ponto sela.
- Se $k = 0$, temos $f(x,y) = (y-3)^2$, pelo que $f(a,3) = 0$ e $f(x,y) > 0$ se $(x,y) \neq (a,3)$. Assim, todos os pontos da forma $(a,3), a \in \mathbb{R}$, são minimizantes locais de f.

5. a)

$$\begin{aligned} \text{Area}(A) &= \iint_A 1dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{kx^2}^1 1dy\right) dx \\ &= \int_0^1 [y]_{y=kx^2}^{y=1}\, dx = \int_0^1 (1-kx^2)dx = 1 - k/3. \end{aligned}$$

Assim, o valor da área será 1 se $1 - k/3 = 1$, i.e se $k = 0$.

5. b)

$$
\begin{aligned}
\iint_A x\cos y dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 x\cos y dy\right) dx = \int_0^1 x\left[\sin y\right]_{y=x^2}^{y=1} dx \\
&= (x \in 1 - x\sin x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2}\sin 1 + \frac{\cos x^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\sin 1 + \frac{1}{2}\cos 1 - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

6. a) $F(x, y, z = f(x, x+y, xy), \qquad f(u, v, w).$

$$
\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}(x, x+y, xy)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}(x, x+y, xy)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial w}(x, x+y, xy)\cdot y
$$

$$
\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(x, x+y, xy)\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v}(x, x+y, xy)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial w}(x, x+y, xy)\cdot x
$$

6. b)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(2,1) - \frac{\partial F}{\partial y}(2,1) &= \frac{\partial f}{\partial u}(2,3,2) + \frac{\partial f}{\partial v}(2,3,2) + \frac{\partial f}{\partial w}(2,3,2) \\
&- \left(\frac{\partial f}{\partial v}(2,3,2) + \frac{\partial f}{\partial w}(2,3,2)\cdot 2\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}(2,3,2) - \frac{\partial f}{\partial w}(2,3,2).
\end{aligned}
$$

Iseg, 30 de Maio de 2011