INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO, UTL

Matemática II

Época de Recurso, 27 de Junho de 2011

Duração: 2 horas

Nome: ______________________________ Nº de Aluno: __________

Grupo I (Escolha múltipla)

Nota: Cada resposta certa vale 1.5 val.; cada resposta errada é penalizada em 0.5 val.; cada pergunta não respondida ou com resposta anulada vale 0 val.; um total negativo neste grupo corresponde a zero valores; as respostas a este grupo devem ser dadas no final desta página, na zona assinalada para o efeito.

1. Sendo $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{|x|-|y|}$ e D_f o domínio da função f tem-se:

(A) $int(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 9\}$

(B) D_f não é compacto.

(C) $fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 9\}$

(D) Nenhuma das respostas anteriores.

2. Considere a função $f(x,y,z) = e^{x^2yz}$. Então, sabendo que $||.||$ representa a norma em $\mathbb{R}^3$, tem-se:

(A) $||\nabla f(2,0,4)|| = 4$

(B) $||\nabla f(2,0,4)|| = 16$

(C) $||\nabla f(2,0,4)|| = 4\sqrt{3}$

(D) Nenhuma das respostas anteriores.

3. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^2$, com derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ em (a,b). Então pode afirmar-se que:

(A) f é contínua em (a,b)

(B) f é diferenciável em (a,b)

(C) (a,b) é ponto crítico de f

(D) Nenhuma das anteriores.

4. Sabe-se que o $(1,2)$ é ponto crítico de uma função f e que o seu diferencial de segunda ordem em $(1,2)$ é dado por $D^2f(1,2)(h,k) = h^2 - k^2$. Então:

(A) $(1,2)$ é minimizante local

(B) $(1,2)$ é maximizante local

(C) $(1,2)$ é ponto sela

(D) Nenhuma das respostas anteriores.

Respostas

	A	B	C	D
1.	☐	☒	☐	☐
2.	☐	☒	☐	☐
3.	☐	☐	☐	☒
4.	☐	☐	☒	☐

Grupo II

(Cotação: 3.0+3.0+1.5+3.0+1.5+2.0)

Apresente os cálculos que efectuar e justifique cuidadosamente a resolução das questões seguintes.

1. Considere a função $f(x;y) = yx^2 + xy^2 - 2xy$.

a) Determine os pontos críticos de f.

b) Classifique o ponto crítico $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

2. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{4x^3 + xy^2}{x^2 + y^2}$.

a) Determine os limites direccionais de f na origem.

b) A função f será prolongável por continuidade na origem? Justifique a resposta.

3. Seja $z = xy$, $x = f(\sin v) + 4w$, $y = \cos v - w$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial v}$, usando regras de derivação da função composta.

4. Resolva as seguintes equações diferenciais apresentando o resultado na forma explícita

a) $y'' - 18y' + 81y = 81x$

b) $y'y^2 - y^3x^4 = x^4$.

5. Calcule $\int\int_A (y-2)dxdy$ sabendo que $A = \{(x,y) : x \leq 2, \quad 0 \leq x + y, \quad (x-2)^2 + y \leq 4\}$.

6. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^3$, homogénea de grau α. Sabendo que $\nabla f(1,2,3) = (2,5,4)$ e $f(10,20,30) = 1000 f(1,2,3)$, determine o valor de $f(1,2,3)$.

Tópicos de Resolução

1. (a) Os pontos críticos de f são as soluções do sistema $\nabla f = 0$, isto é,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2yx + y^2 - 2y = 0 \\ \\ x^2 + 2xy - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(2x + y - 2) = 0 \\ \\ x(x + 2y - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \\ x(x + 2y - 2) = 0 \end{cases} \vee$$

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ \\ x(x + 2y - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} y = 0 \\ \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ \\ x = 2 \end{cases} \right) \vee \left(\begin{cases} y = 2 \\ \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2/3 \\ \\ x = 2/3 \end{cases} \right)$$

Assim, os pontos críticos de f são: $(0,0), (0,2), (2,0), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

(b) Vamos classificar o ponto crítico $(2/3, 2/3)$ através do estudo da matriz hesseana.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 2y - 2 \\ \\ 2x + 2y - 2 & 2x \end{pmatrix} \Longrightarrow H_f(2/3, 2/3) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Como para esta matriz se tem $\Delta_1 = \frac{4}{3} > 0$ e $\Delta_2 = \frac{4}{3} > 0$, ela é definida positiva e por isso o ponto crítico $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ é um minimizante local de f. Além disso, considerando $y = 1$ e $y = -1$ e fazendo x tender para $+\infty$ e $-\infty$, respectivamente, concluímos que f não é limitada inferiormente nem superiormente, pelo que o ponto em causa não pode ser extremante global.

2. (a)

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = mx}} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{4x^3 + x(mx)^2}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3(4 + m^2)}{x^2(1 + m^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(4 + m^2)}{1 + m^2} = 0.$$

(b) A função f é contínua em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, podendo ser prolongada por continuidade à origem se e só se existir o limite quando $(x,y) \to (0,0)$. Ora, temos que

$$0 \leq |f(x,y) - 0| = \left| \frac{4x^3 + xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{4(x^2 + y^2)^{3/2} + (x^2 + y^2)^{3/2}}{x^2 + y^2} \leq 5\sqrt{x^2 + y^2} \underset{(x,y) \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$$

A majoração acima implica que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ existe e é zero. Assim, definindo $f(0,0) = 0$, a função pode ser prolongada por continuidade à origem.

3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ &= y \cdot \cos v f'(\sin v) + x \cdot (-\sin v) \\ &= (\cos v - w) \cos v f'(\sin v) + (f(\sin v) + 4w)(-\sin v) \end{aligned}$$

4. (a) O polinómio característico desta equação diferencial linear de coeficientes constantes é $P(D) = D^2 - 18D + 81$, que tem $D = 9$ como raíz de multiplicidade 2. Assim, a solução geral da equação homogénea é $y_h(x) = (c_1 + c_2 x)e^{9x}$. Além disso, experimentando uma solução particular do tipo $y_p(x) = a + bx$, chegamos à conclusão que $y_p(x) = x + 2/9$ é solução particular da equação diferencial. Finalmente, a solução geral da equação é dada por

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (c1 + c_2 x)e^{9x} + x + 2/9.$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}y^2 - y^3x^4 = x^4 \quad &\overset{y\neq -1}{\Leftrightarrow} \quad \frac{y^2}{1+y^3}\,dy = x^4\,dx \Leftrightarrow \int \frac{y^2}{1+y^3}\,dy = \int x^4\,dx \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\ln|1+y^3| = \frac{x^5}{5} + C \Leftrightarrow y = \left(Ke^{\frac{3}{5}x^5} - 1\right)^{1/3}, K \neq 0\end{aligned}$$

Como a função constante $y = -1$ também é solução da equação diferencial, a solução geral é $y = \left(Ke^{\frac{3}{5}x^5} - 1\right)^{1/3}, K \in \mathbb{R}$.

5.

$$\begin{aligned}\iint_A (y-2)\,dx\,dy &= \int_0^2 \int_{-x}^{4-(x-2)^2} (y-2)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2} - 2y\right]_{y=-x}^{y=4-(x-2)^2} dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{x^4}{2} - 4x^3 + \frac{19x^2}{2} - 10x\right) dx = \left[\frac{x^5}{10} - x^4 + \frac{19x^3}{6} - 5x^2\right]_{x=0}^{x=2} \\ &= -\frac{112}{15}\end{aligned}$$

6. É dito que $f(10,20,30) = 1000f(1,2,3)$, o que é equivalente a $f(10\cdot 1, 10\cdot 2, 10\cdot 3) = 10^3 f(1,2,3)$. Como sabemos que f é homogénea, deverá ser homogéna de grau 3. Além disso, sendo f homogénea de grau 3, verifica a identidade de Euler

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3f(x,y,z)$$

em particular,

$$1\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3) + 3\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3) = 3f(1,2,3) \Leftrightarrow$$

$$1\cdot 2 + 2\cdot 5 + 3\cdot 4 = 3f(1,2,3) \Leftrightarrow f(1,2,3) = 8.$$