Matemática 2

Época Normal - 31 de Maio 2010

1. Temos: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=e^{u}\cdot\cos v\cdot y^{2}-e^{u}\cdot\sin v\cdot 1$

Fazendo as substituições, obtém-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy^2}\cdot\cos(x+2y)\cdot y^2-e^{xy^2}\cdot\sin(x+2y)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy^2}\left(y^2\cos(x+2y)-\sin(x+2y)\right)$$

2. A função lagrangeana escreve-se: $F(x,y,z,\lambda)=3x-2y+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-14)$.

Determinação dos pontos críticos:

$$\begin{cases}F'_x=0\\F'_y=0\\F'_z=0\\F'_\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3+2\lambda x=0\\-2+2\lambda y=0\\1+2\lambda z=0\\x^2+y^2+z^2-14=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{3}{2\lambda}\\y=\frac{1}{\lambda}\\z=-\frac{1}{2\lambda}\\\frac{9}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{3}{2\lambda}\\y=\frac{1}{\lambda}\\z=-\frac{1}{2\lambda}\\\frac{14}{4\lambda^2}=14\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{3}{2\lambda}\\y=\frac{1}{\lambda}\\z=-\frac{1}{2\lambda}\\\lambda^2=\frac{14}{56}=\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=2\\z=-1\\\lambda=\frac{1}{2}\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}x=3\\y=-2\\z=1\\\lambda=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

f admite 2 pontos críticos: $(-3,\ 2,-1)_{\lambda=1/2}$ e $(3,\ -2,1)_{\lambda=-1/2}$

Classificaçaõ dos pontos críticos:
A função $f(x,y,z)=3x-2y+z$ é uma função contínua em R^3; por outro lado a restrição $x^2+y^2+z^2=14$ define um conjunto compacto (limitado e fechado).
Podemos então concluir que f admite necessariamente um máximo e um mínimo que são respectivamente $f(3,-2,1)=14$ e $f(-3,2,-1)=-14$.
Conclui-se que o valor máximo atingido pela função f é 14.

3.

$$\int_0^5\int_0^{+\infty}\left(x^2e^{-2yx}+3ye^{-y^2}\right)dydx=\int_0^5\left(\lim_{b\to+\infty}\left[-\tfrac{1}{2}xe^{-2yx}-\tfrac{3}{2}e^{-y^2}\right]_0^b\right)dx=$$

$$=\int_0^5\left(\lim_{b\to+\infty}\left[-\tfrac{1}{2}xe^{-2bx}-\tfrac{3}{2}e^{-b^2}+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{2}\right]\right)dx=$$

$$=\int_0^5\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{2}\right)dx=\left[\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{2}x\right]_0^5=\tfrac{25}{4}+\tfrac{15}{2}=\tfrac{55}{4}$$

4. a) Determinação dos valores de k :

Se $y^*(x)=\frac{1}{73}e^{4x}$ é solução da equação diferencial $y''+k^2y'+25y=e^{4x}$, então:

$$\left(\tfrac{1}{73}e^{4x}\right)''+k^2\left(\tfrac{1}{73}e^{4x}\right)'+25\left(\tfrac{1}{73}e^{4x}\right)=e^{4x}$$

ou seja: $\frac{16}{73}e^{4x}+\frac{4}{73}k^2e^{4x}+\frac{25}{73}e^{4x}=e^{4x}\Leftrightarrow\frac{41}{73}e^{4x}+\frac{4}{73}k^2e^{4x}=e^{4x}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\tfrac{41}{73}+\tfrac{4}{73}k^2=1\Leftrightarrow k^2=\frac{1-\frac{41}{73}}{\frac{4}{73}}=\frac{73-41}{4}=\frac{32}{4}=8$$

obtendo-se: $k=\pm\sqrt{8}$.

b) Fazendo $k=\sqrt{8}$:

i) determina-se a solução geral da E. D. dada

Temos: $y''+8y'+25y=e^{4x}$

- determina-se a solução geral da equação homogénea:
  $\mathrm{P}(D)=0\Leftrightarrow D^2+8D+25=0\Leftrightarrow D=\frac{-8\pm\sqrt{-36}}{2}=-4\pm3i$, obtendo-se 2 raízes complexas conjugadas. A solução é dada por:
  $$y_h(x)=\left(c_1\cos(3x)+c_2\sin(3x)\right)e^{-4x},\ \text{com } c_1 \text{ e } c_2\in\mathrm{R}$$

- Como por hipótese $y^*(x)=\frac{1}{73}e^{4x}$ é solução particular da E.D. completa, podemos escrever:
  $$y(x)=\tfrac{1}{73}e^{4x}+\left(c_1\cos(3x)+c_2\sin(3x)\right)e^{-4x},\ \text{com } c_1 \text{ e } c_2\in\mathrm{R}\,.$$

ii) resolução do problema de valores iniciais :

$$y(0)=0\Leftrightarrow\tfrac{1}{73}+\left(c_1+0\right)e^0=0\Leftrightarrow c_1=-\tfrac{1}{73}$$

$$y(\tfrac{\pi}{6})=\tfrac{1}{73}e^{\frac{2\pi}{3}}+1\Leftrightarrow\tfrac{1}{73}e^{\frac{2\pi}{3}}+\left(-\tfrac{1}{73}\cos(\tfrac{\pi}{2})+c_2\sin(\tfrac{\pi}{2})\right)e^{-\frac{2\pi}{3}}=\tfrac{1}{73}e^{\frac{2\pi}{3}}+1\Leftrightarrow c_2e^{-\frac{2\pi}{3}}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c_2=e^{\frac{2\pi}{3}}$$

A solução do problema de valores iniciais apresentada tem como solução:

$$y(x)=\tfrac{1}{73}e^{4x}+\left(-\tfrac{1}{73}\cos(3x)+e^{\frac{2\pi}{3}}\sin(3x)\right)e^{-4x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(x)=\tfrac{1}{73}e^{4x}-\tfrac{1}{73}e^{-4x}\cos(3x)+e^{\frac{2\pi}{3}-4x}\sin(3x)$$

5. a) Se f contínua em $\mathbb{R}^2$ então:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y e^{\cos(xy)}}{\sqrt{x^2+y^2}} = f(0,0) = \ln(k^2-4).$$

Ora, calculando os limites direccionais, observe-se que:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=mx}} \frac{x^2 y e^{\cos(xy)}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3 e^{\cos(mx^2)}}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3 e^{\cos(mx^2)}}{|x|\sqrt{(1+m^2)}} = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{mx^2 e^{\cos(mx^2)}}{\sqrt{(1+m^2)}} = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{-mx^2 e^{\cos(mx^2)}}{\sqrt{(1+m^2)}} = 0 \end{cases}$$

Como, por hipótese, f contínua em $\mathbb{R}^2$ os limites direccionais são mesmo o limite, logo:

$$\ln(k^2-4) = f(0,0) = 0 \Leftrightarrow k^2 - 4 = 1 \Leftrightarrow k^2 = 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{5}$$

b) Temos:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y e^{\cos(xy)}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \ , & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

<u>Diferenciabilidade na origem</u>:

As derivadas parciais da função f no ponto (0, 0) são nulas; com efeito:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = \lim_{h_1\to 0} \frac{f(h_1,0)-f(0,0)}{h_1} = \lim_{h_1\to 0} \frac{\frac{0}{\sqrt{h_1^2}}}{h_1} = \lim_{h_1\to 0} \frac{0}{h_1\sqrt{h_1^2}} = 0\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = \lim_{h_2\to 0} \frac{f(0_1,h_2)-f(0,0)}{h_2} = \lim_{h_2\to 0} \frac{\frac{0}{\sqrt{h_2^2}}}{h_2} = \lim_{h_2\to 0} \frac{0}{h_2\sqrt{h_2^2}} = 0\,.$$

Temos que provar que: $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \varepsilon(h,k) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \dfrac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

$$\left| \frac{h^2 k e^{\cos(hk)}}{h^2+k^2} - 0 \right| = \frac{|h|^2 |k| \left|e^{\cos(hk)}\right|}{h^2+k^2} \leq \frac{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}\ e}{h^2+k^2} = e\sqrt{h^2+k^2} \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Conclui-se, pelo teorema do enquadramento que o limite é 0, pelo que a função $f(x,y)$ é diferenciável na origem.

6. Temos: $F(x,y)=\varphi(xy^2(x+2y))=\varphi(x^2y^2+2xy^3)$.

Determinação de $\underline{F(1,-1)}$:

Sendo F homogénea de grau 8, pela identidade de Euler, escreve-se:

$$x\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=8F(x,y).$$

No ponto $(1,-1)$, vem: $1\cdot\frac{\partial F(1,-1)}{\partial x}-1\cdot\frac{\partial F(1,-1)}{\partial y}=8\cdot F(1,-1)$ **(I)**

Ora:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=\varphi'(x^2y^2+2xy^3)\cdot(2xy^2+2y^3)$$
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=\varphi'(x^2y^2+2xy^3)\cdot(2x^2y+6xy^2)$$

Obtendo-se em $(1,-1)$:

$$\frac{\partial F(1,-1)}{\partial x}=\varphi'(-1)\cdot(2-2)=0$$
$$\frac{\partial F(1,-1)}{\partial y}=\varphi'(-1)\cdot(-2+6)=4\varphi'(-1)$$

Substituindo na equação **(I)** os resultados obtidos anteriormente, vem:

$$1\cdot 0-1\cdot 4\varphi'(-1)=8\cdot F(1,-1)$$

Como $\varphi'(-1)=4$ por hipótese, temos finalmente:

$$-16=8\cdot F(1,-1)\Leftrightarrow F(1,-1)=-2$$