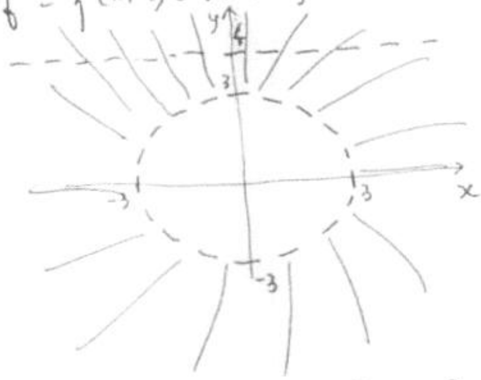
Matemática II – 4 Janeiro 2011 – Esquema de resolução (1)

<u>Grupo II</u>

(1) (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y-4 \neq 0 \wedge x^2+y^2-9 > 0\}$



(b) $\text{int}(D_f) = D_f \rightarrow D_f$ é aberto

(c) $ad(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 9\}$

Como $ad(D_f)$ não é um cjto limitado, $ad(D_f)$ ñ é compacto

(2) (a) $$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(1+t,1) - f(1,1)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2(1+t)+4-(4+2)}{t} = \lim_{t \to 0} 2 = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(1,1+t) - f(1,1)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{2(1)+4(1+t)-(4+2)}{t} = \lim_{t \to 0} 4 = 4$$

(b) $$\varepsilon(h,k) = \frac{f(1+h,1+k) - f(1,1) - \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)h - \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \frac{f(1+h,1+k) - 6 - 2h - 4k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2(1+h)+4(1+k)-6-2h-4k}{\sqrt{h^2+k^2}}, & \text{se } 2h+k \neq 0 \\[2ex] \dfrac{4(1+h)+2(1+k)-6-2h-4k}{\sqrt{h^2+k^2}}, & \text{se } 2h+k=0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } 2h+k \neq 0 \\[2ex] \dfrac{2h-2k}{\sqrt{h^2+k^2}}, & \text{se } k=-2h \end{cases}$$

Assim, $\lim\limits_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ k=-2h}} \varepsilon(h,k) = \lim\limits_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ k=-2h}} \dfrac{2h-2k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h+4h}{\sqrt{h^2+4h^2}} =$ ②

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6h}{|h|\sqrt{5}} = \begin{cases} \xrightarrow{h>0} \ 6/\sqrt{5} \\ \xrightarrow{h<0} \ -6/\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \text{não existe } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k)$$

$\Downarrow$

f ñ é diferenciável em $(1,1)$

③

- $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4y+7=0 \\ 4x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+8x+7=0 \\ y=2x \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{-8\pm\sqrt{64-28}}{2} = \dfrac{-8\pm 6}{2} = \begin{matrix} -7 \\ -1 \end{matrix} \\ y = 2x \end{cases}$

$\therefore$ pontos críticos de f : $(-1,-2)$ e $(-7,-14)$

- $H_f = \begin{bmatrix} 2x & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $H_f(-1,-2) = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad \Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = -12 < 0$ $\Rightarrow H_f(-1,-2)$ é IND

$\Downarrow$

$(-1,-2)$ é ponto sela

$H_f(-7,-14) = \begin{bmatrix} -14 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad \Delta_1 = -14 < 0$, $\Delta_2 = +12 > 0$ $\Rightarrow H_f(-7,-14)$ é Definida Neg.

$\Downarrow$

$(-7,-14)$ é pto de maximo local

④

$$\iint_A 2e^{2x+y}\,dx\,dy = \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} 2e^{2x+y}\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^3 \left. 2e^{2x+y} \right]_0^{3-x} dx =$$

$$= \int_0^3 2e^{2x+3-x} - 2e^{2x+0}\,dx = \int_0^3 \left(2e^{x+3} - 2e^{2x}\right) dx =$$

$$= \left. 2e^{x+3} - e^{2x} \right]_0^3 = 2e^6 - e^6 - \left(2e^3 - e^0\right) = e^6 - 2e^3 + 1$$

5 • $y' - \dfrac{e^{x^2} x (2y^2+1)}{y} = 0 \iff \dfrac{dy}{dx} = e^{x^2} x \times \dfrac{2y^2+1}{y}$

$\iff \dfrac{y}{2y^2+1}\, dy = e^{x^2} . x\, dx$ ← Eq. de var. separadas

$\displaystyle\int \frac{y}{2y^2+1}\, dy = \int e^{x^2} \cdot x\, dx \iff \frac{1}{4} \int \frac{4y}{2y^2+1}\, dy = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2}\, dx$

$\iff \dfrac{1}{4} \ln(2y^2+1) = \dfrac{1}{2} e^{x^2} + C \quad , \forall C \in \mathbb{R}$

As soluções da eq. dif. dada são todas as funções $y(x)$ definidas implicitamente por esta equação.

• $y(1) = 0 \implies \frac{1}{4} \ln 1 = \frac{1}{2} e + C \implies C = -\frac{1}{2} e$

∴ A sol. do problema dado é a função $y(x)$ def. implicita/ por $\dfrac{1}{4} \ln(2y^2+1) = \dfrac{1}{2} e^{x^2} - \dfrac{1}{2} e$ //

6 • $f(\lambda x, \lambda y) = g\left(\dfrac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{(\lambda x)^2 (\lambda y)^2} \right) = g\left(\dfrac{1}{\lambda^2} \times \dfrac{x^2+y^2}{x^2 y^2} \right) =$

$= \left(\dfrac{1}{\lambda^2}\right)^{-3} g\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2} \right) = \lambda^6 g\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2} \right) = \lambda^6 f(x,y)$

↓ pq g homog de grau -3

∴ f é homogénea de grau 6

• $f(-2,4) = f(-2(1,-2)) = (-2)^6 f(1,-2) = (-2)^6 \dfrac{1}{2^4} = 2^2 = 4$ //

↓ pq f homog grau 6

↓ pq $f(1,-2) = \frac{1}{16}$