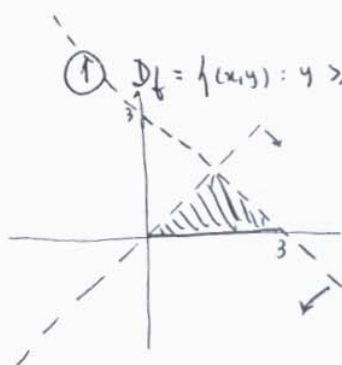


1



$$① D_f = \{(x,y) : y \geq 0 \wedge x-y \geq 0 \wedge 3-x-y \geq 0\}$$

$$\text{int}(D_f) = \{(x,y) : y > 0 \wedge x-y > 0 \wedge 3-x-y > 0\}$$

$$\text{pr}(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y=0 \wedge 0 \leq x \leq 3\} \cup$$

$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y=0 \wedge y \geq 0 \wedge 3-x-y \geq 0\} \cup$$

$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3-x-y=0 \wedge y \geq 0 \wedge x-y \geq 0\}$$

$$② \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 3x^4 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 3x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \vee x = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ Os pontos críticos de f são $(0,0)$ e $(1,1)$

$$\bullet H_f = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix} \Rightarrow H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = 0 - 9 = -9 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow H_f(0,0) \text{ IND}$$

$$\bullet H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \begin{cases} \Delta_1 = 6 > 0 \\ \Delta_2 = 36 - 9 = 27 > 0 \end{cases} \Rightarrow H_f(1,1) \text{ DP}$$

$(0,0)$ ponto sela
 $(1,1)$ é minimizante local de f

③ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ é o que queremos mostrar

$$\bullet \text{ por enquadramento, } 0 \leq |f(x,y)| = \frac{|x^2 - y^2| |\sin x|}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2) |\sin x|}{x^2 + y^2} = |\sin x|$$

$$\text{Assim, } 0 \leq |f(x,y)| \leq |\sin x|$$

$$\begin{matrix} (x,y) \rightarrow (0,0) \\ \downarrow \\ 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (x,y) \rightarrow (0,0) \\ \downarrow \\ 0 \end{matrix}$$

e, portanto,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y)| = 0, \text{ logo}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0, \text{ c.q.d.}$$

$$(3, b) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2 \sin t}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 //$$

$$\cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{-t^2 \sin 0}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0 //$$

$$\begin{aligned} \cdot \varepsilon(h,k) &= \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \\ &= \frac{\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2} \sin h - h}{\sqrt{h^2+k^2}} \end{aligned}$$

$$\cdot \lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ k=h}} \varepsilon(h,k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-h}{\sqrt{h^2+h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{h}{\sqrt{2}|h|} \begin{cases} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, & h > 0 \\ = \frac{1}{\sqrt{2}}, & h < 0 \end{cases}$$

$\therefore$ não existe $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h,k)$ e, portanto,
f não é diferenciável em (0,0).

$$(4) \mathcal{L}(x,y,\lambda) = y + \lambda(2x^2 + xy + 2y^2 - 1) \quad \lambda \neq 0 \text{ pqr } 2^{\text{a}} \text{ eq}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda x + \lambda y = 0 \\ 1 + \lambda x + 4\lambda y = 0 \\ 2x^2 + xy + 2y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(4x+y) = 0 \Rightarrow y = -4x \\ 1 + \lambda x + 4\lambda(-4x) = 0 \Leftrightarrow \\ 2x^2 + x(-4x) + 2(-4x)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 15\lambda x = 0 \\ 30x^2 = 1 \end{cases} \begin{cases} \lambda = \frac{1}{15x} \\ x = \pm \sqrt{\frac{1}{30}} \end{cases}$$

$$\text{Se } x = \sqrt{\frac{1}{30}} \text{ então } y = -4\sqrt{\frac{1}{30}} \text{ e } \lambda = \frac{\sqrt{30}}{15}$$

$$\text{Se } x = -\sqrt{\frac{1}{30}} \text{ então } y = 4\sqrt{\frac{1}{30}} \text{ e } \lambda = -\frac{\sqrt{30}}{15}$$

$$\therefore \text{Candidatos a ext.: } \left(\sqrt{\frac{1}{30}}, -4\sqrt{\frac{1}{30}}; \frac{\sqrt{30}}{15}\right) \text{ e } \left(-\sqrt{\frac{1}{30}}, 4\sqrt{\frac{1}{30}}; -\frac{\sqrt{30}}{15}\right)$$

(1) $f(x,y) = y$ é uma função contínua em $\mathbb{R}^2$ (3)

$$(2) E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + xy + 2y^2 = 1\} \rightarrow \begin{cases} \text{int}(E) = \emptyset \\ \text{fr}(E) = E \end{cases} \Rightarrow \text{ad}(E) = E$$

$\therefore E$ fechada

Como E tb é limitado, E é compacto

Por (1) e (2), o T. Weierstrass assegura q f tem max e min absolutos em E .

Orá $f(-\sqrt{\frac{1}{30}}, 4\sqrt{\frac{1}{30}}) = 4\sqrt{\frac{1}{30}} \leftarrow$ vale max $\bar{f}$ y toma na elipse

$f(\sqrt{\frac{1}{30}}, -4\sqrt{\frac{1}{30}}) = -4\sqrt{\frac{1}{30}} \leftarrow$ " min " " " " " "

(5) a) Se $y(x) = e^{-3x} - 1 - 6x$ então $y' = -3e^{-3x} - 6$ e $y'' = 9e^{-3x}$ e,
portanto, $y'' + y' - 6y = 9e^{-3x} + (-3e^{-3x} - 6) - 6(e^{-3x} - 1 - 6x) =$
 $= 9e^{-3x} - 3e^{-3x} - 6 - 6e^{-3x} + 6 + 36x = 36x, \text{ c.g.d.}$

b) 1) Solução geral da eq. homog. associada:

$$D^2 + D - 6 = 0 \Leftrightarrow D = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$$\therefore y_h(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x}$$

2) pela alínea a), já conhecemos 1 sol. particular da eq. dada

$$y_p(x) = e^{-3x} - 1 - 6x$$

Assim,

c. Aux $y_g(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x} + e^{-3x} - 1 - 6x = Ae^{2x} + Ce^{-3x} - 1 - 6x.$

$$y'_g = 2Ae^{2x} - 3Ce^{-3x} - 6$$

Faltam as condições iniciais:

$$\begin{cases} y(0) = -1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + C - 1 - 0 = -1 \\ 2A - 3C - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ 2A - 3C = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -C \\ -2C - 3C = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{6}{5} \\ C = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

R: $y(x) = \frac{6}{5}e^{2x} - \frac{6}{5}e^{-3x} - 1 - 6x$

(6) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = x \left(\frac{dt}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + y \left(\frac{dt}{du} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{dt}{du} \underbrace{\left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{=0 \text{ p.d.}} = 0$ c.g.d.

Se $u(x,y)$ for homog grau zero, identifi Euler é verificada