Tópicos de Resolução

Grupo I

1.

$$Q(x,y,z)=\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ com } A=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

e $B=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ (simétrica).

Classificação de B através da cadeia dos sinais dos menores principais:

$$\Delta_1 = -2 < 0$$

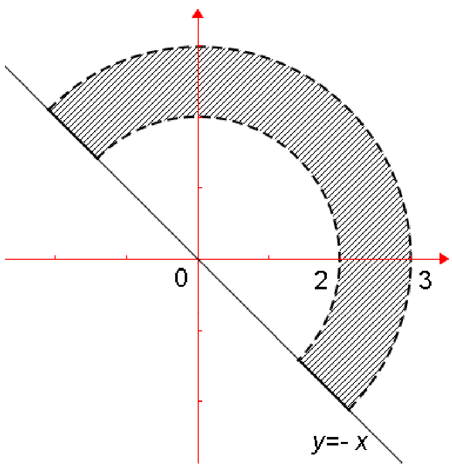
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 7 > 0$$

$$\Delta_3 = |B| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -21 < 0$$

Conclui-se que a matriz B é definida negativa e, consequentemente, Q é uma forma quadrática definida negativa.

2.a)

$$D_f = \left\{(x,y)\in R^2 : y+x\geq 0 \ \wedge \ 9-x^2-y^2>0 \ \wedge \ x^2+y^2-4>0\right\} =$$
$$= \left\{(x,y)\in R^2 : y\geq -x \ \wedge \ x^2+y^2<9 \ \wedge \ x^2+y^2>4\right\} =$$
$$= \left\{(x,y)\in R^2 : y\geq -x \ \wedge \ 4< x^2+y^2<9\right\}$$



b)

$$Fr(D_f)=\{(x,y)\in R^2: y=-x \wedge 4\le x^2+y^2\le 9\}\cup\{(x,y)\in R^2: y\ge -x \wedge x^2+y^2=4\}\cup$$
$$\cup\{(x,y)\in R^2: y\ge -x \wedge x^2+y^2=9\}$$

3. a) $\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(4e^{x^2y}+8x^2ye^{x^2y},\ 4x^3e^{x^2y}\right)=\left(e^{x^2y}(4+8x^2y),\ 4x^3e^{x^2y}\right)$

b) Como f é uma função diferenciável no ponto $(2,\ 0)$, temos que:

$$f'_{(-1,\ 1)}(2,0)=\nabla f(2,\ 0)\cdot(-1,\ 1)=(4,\ 32)\cdot(-1,\ 1)=28$$

c) $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=e^{x^2y}\left(4+8x^2y\right)\cdot\left(-2\sin(2t)\right)+4x^3e^{x^2y}\cdot 2\cos(2t)$.

Fazendo $x=\cos(2t)$ e $y=\sin(2t)$, obtém-se:

$$\frac{dz}{dt}=e^{\cos^2(2t)\sin(2t)}\cdot\left(4+8\cos^2(2t)\cdot\sin(2t)\right)\left(-2\sin(2t)\right)+4\cos^3(2t)e^{\cos^2(2t)\sin(2t)}\cdot 2\cos(2t).$$

Para $t=\frac{\pi}{2}$, temos $\cos(\pi)=-1$ e $\sin(\pi)=0$ e conclui-se que $\frac{dz}{dt}\left(\frac{\pi}{2}\right)=8$.

d)

$$\iint_A y\cdot f(x,y)dxdy=\int_0^{\ln 2}\int_0^2 y\cdot 4xe^{x^2y}dxdy=\int_0^{\ln 2}2\int_0^2 2xye^{x^2y}dxdy=\int_0^{\ln 2}\left[2e^{x^2y}\right]_0^2 dy=$$
$$=\int_0^{\ln 2}\left(2e^{4y}-2\right)dy=\left[\frac{e^{4y}}{2}-2y\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{2}e^{4\ln 2}-2\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{16}{2}-2\ln 2-\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{15}{2}-2\ln 2$$

4. <u>Determina-se a solução geral da equação homogénea</u> $y_h(x)$:

$$D^2+10D+9=0\Leftrightarrow D=\frac{-10\pm\sqrt{64}}{2}\Leftrightarrow D=\frac{-10\pm 8}{2}\Leftrightarrow D=-9\ \vee\ D=-1$$

A solução da equação homogénea é : $y_h(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{-9x}$, com c_1 e $c_2\in R$.

<u>Determina-se a solução particular da equação não homogénea</u> $y_p(x)$:

Fazendo $y_p(x)=ke^{2x}$, obtém-se: $y_p'(x)=2ke^{2x}$ e $y_p''(x)=4ke^{2x}$. Substituindo na equação não homogénea, temos: $4ke^{2x}+20ke^{2x}+9ke^{2x}=66e^{2x}\Leftrightarrow 33ke^{2x}=66e^{2x}\Leftrightarrow k=2$.

A solução particular da equação não homogénea é : $y_p(x)=2e^{2x}$.

Conclui-se que $y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{-9x}+2e^{2x}$.

Grupo II

1. $D_f = \left\{ (x,y) \in R^2 : \ (x-2)^2 + y^2 \neq 0 \right\} = R^2 \setminus \left\{ (2,\ 0) \right\}$.

A função f é contínua em todo o seu domínio $R^2 \setminus \left\{ (2,\ 0) \right\}$. f é prolongável por continuidade a R^2 se e só se existe e é finito: $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y)$.

Ora,

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{(x-2)^3 \sin y}{(x-2)^2 + y^2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y=m(x-2)}} \frac{(x-2)^3 \sin(m(x-2))}{(x-2)^2 + (m(x-2))^2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ y=m(x-2)}} \frac{(x-2)^3 \sin(m(x-2))}{(x-2)^2 (1+m^2)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2\\ y=m(x-2)}} \frac{(x-2)\sin(m(x-2))}{(1+m^2)} = \frac{0}{(1+m^2)} = 0$$

o que permite concluir que se o limite existir, tem que ser 0.

$$0 \le \left| f(x,y) - 0 \right| = \left| \frac{(x-2)^3 \sin y}{(x-2)^2 + y^2} \right| = \frac{(x-2)^2 \left|(x-2)\right| \left|\sin y\right|}{(x-2)^2 + y^2} \underset{(x-2)^2 \le (x-2)^2 + y^2}{\le} \frac{\left((x-2)^2 + y^2\right) \left|(x-2)\right| \left|\sin y\right|}{(x-2)^2 + y^2} =$$

$$= \left|(x-2)\right| \left|\sin y\right|$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \left|(x-2)\right| \left|\sin y\right| = 0$, concluímos que $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y) = 0$ e f é uma função prolongável por continuidade a R^2. O prolongamento por continuidade é:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)^3 \sin y}{(x-2)^2 + y^2}, & (x,y) \neq (2,0) \\ \quad 0 & , \ (x,y) = (2,0) \end{cases}$$

2. <u>Determinação dos pontos críticos</u> :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2xe^{-x^2-ky^2} = 0 \\ -2kye^{-x^2-ky^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \ \ (k \neq 0) \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = b \ \ (b \in R, \text{ se } k = 0) \end{cases}$$

Pontos críticos: (0, 0) se $k \neq 0$ e $(0,b)$, com $b \in R$, se $k = 0$.

<u>Classificação dos pontos críticos</u> :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(-2 + 4x^2\right) e^{-x^2-ky^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(-2k + 4k^2 y^2\right) e^{-x^2-ky^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4kxye^{-x^2-ky^2}$$

Se $k \neq 0$, a matriz hessiana no ponto (0, 0) é:

$$Hf(0,0)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2k\end{bmatrix},\ \text{com } \Delta_1=-2 \ \text{ e } \ \Delta_2=4k\ ;$$

ora, se $k>0$, o ponto (0, 0) é um **maximizante** e se $k<0$, o ponto (0, 0) é um **ponto de sela**.

Se $k=0$, temos $f(x,y)=e^{-x^2}\leq 1=f(0,b),\ \forall b\in R,\ \forall x\in R$ e logo os pontos (0, *b*) são todos maximizantes.

3. A função lagrangeana escreve-se: $L(x,y,\lambda)=x^2+3y^2+\lambda\left(x^2-2x+y^2-3\right)$.

$$\begin{cases}2x+2\lambda x-2\lambda=0\\ 6y+2\lambda y=0\\ x^2-2x+y^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\lambda x-\lambda=0\\ 3y+\lambda y=0\\ x^2-2x+y^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(1+\lambda)=\lambda\\ y(3+\lambda)=0\\ x^2-2x+y^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\lambda}{1+\lambda},\quad \lambda\neq -1\\ y=0 \qquad\qquad\qquad \vee\ \ \lambda=-3\\ x^2-2x+y^2=3\end{cases}$$

<u>1º Caso</u>: Se $y=0$, temos $x^2-2x-3=0\Leftrightarrow x=3\vee x=-1$; logo $f(3,0)=9$ e $f(-1,0)=1$.

<u>2º Caso</u>: Se $\lambda=-3$, temos $x=\frac{3}{2}$ e $\left(\frac{3}{2}\right)^2-3-y^2=3\Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$; logo $f\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{15}}{2}\right)=$

$=f\left(\frac{3}{2},\frac{-\sqrt{15}}{2}\right)=\frac{27}{2}$.

Conclui-se que $\frac{27}{2}$ é máximo absoluto e 1 é mínimo absoluto, já que as condições do teorema de Weierstrass estão reunidas; com efeito, por um lado a função $f(x,y)=x^2+3y^2$ é contínua em R^2; por outro lado o conjunto $x^2-2x+y^2=3$ define um conjunto compacto (limitado e fechado).

4. Sabendo que f é uma função limitada em R^2 temos que provar que:

$$g(x,y)=x+y+\left(x^2+y^2\right)\cdot f(x,y)$$

é diferenciável na origem.

Temos: $g(0,0)=0+0\cdot f(0,0)=0$

$$\frac{\partial g(0,0)}{\partial x}=\lim_{t\to 0}\frac{g(t,0)-g(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t+t^2\cdot f(t,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(1+t\cdot f(t,0)\right)=1$$

$$\frac{\partial g(0,0)}{\partial y}=\lim_{t\to 0}\frac{g(0,t)-g(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t+t^2\cdot f(0,t)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(1+t\cdot f(0,t)\right)=1\,;$$

(porque o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo);

logo, o 1º diferencial em (0, 0) é $Dg(0,0)=1\cdot h+1\cdot k=h+k$ e $\varepsilon(h,k)=\dfrac{g(h,k)-h-k}{\sqrt{h^2+k^2}}$.

Prova-se facilmente que $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\varepsilon(h,k)=0$; com efeito:

$$\varepsilon(h,k)=\frac{g(h,k)-h-k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{(h^2+k^2)\cdot f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\sqrt{h^2+k^2}\cdot f(h,k)\underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$$

porque o produto de um infinitésimo por uma função limitada é um infinitésimo.