Matemática 2 – ER 2.º Semestre 2011/2012

Tópicos de Resolução

Grupo I

1. $Q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 3yz + z^2$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Classificação através da cadeia dos menores principais:

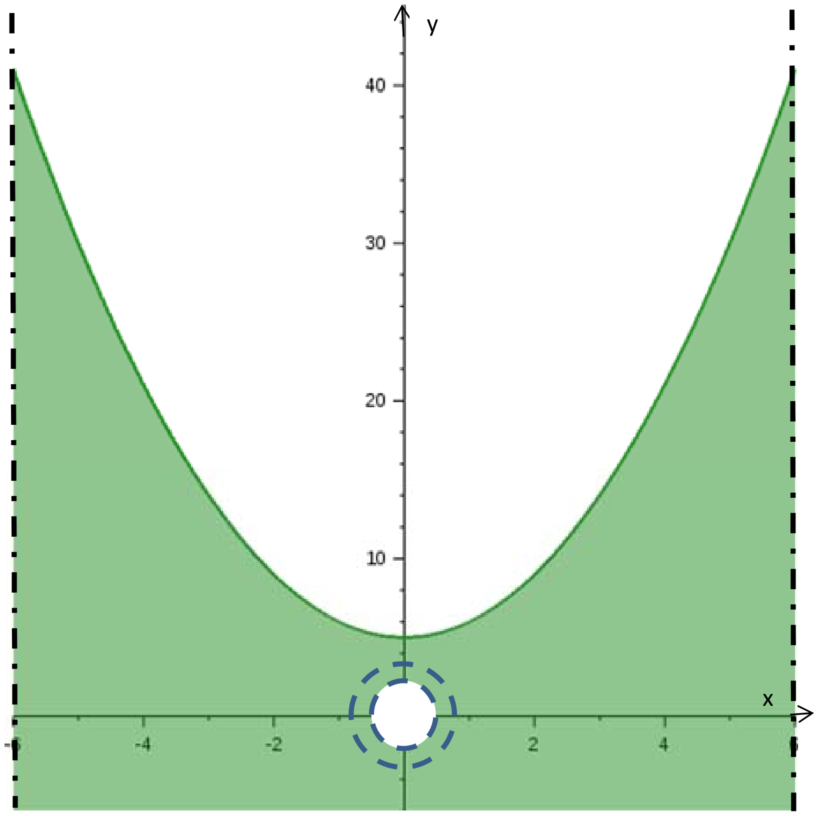
$\Delta_1 = 1 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\Delta_3 = |Q| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$$

Como $\Delta_3 = |Q| \neq 0$ e de sinal contrário a Δ_1, a forma quadrática é indefinida.

2. $a) D_f = \{(x,y) \in R^2 : x^2 - y + 5 \geq 0 \wedge 6 - |x| > 0 \wedge x^2 + y^2 - 1 \neq 1 \wedge x^2 + y^2 > 1\}$
$= \{(x,y) \in R^2 : y \leq x^2 + 5 \wedge -6 < x < 6 \wedge x^2 + y^2 \neq 2 \wedge x^2 + y^2 > 1\}$



2.b)

$$Int\ Df = \{(x,y) \in R^2 : y < x^2 + 5 \wedge -6 < x < 6 \wedge x^2 + y^2 \neq 2 \wedge x^2 + y^2 > 1\}$$

Uma vez que o conjunto não é igual ao seu interior não é aberto, por outro lado como existem pontos fronteiros que não pertencem ao conjunto, este também não é fechado.

3. a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \left[\frac{-2y^3 + x^2 y + 4y}{(4 - x^2 - 2y^2)^2}\right]_{(1,1)} = 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \left[\frac{-x^3 + 2xy^2 + 4x}{(4 - x^2 - 2y^2)^2}\right]_{(1,1)} = 5$$

$$\nabla f(1,1) = (3,5)$$

b) Como f é diferenciável no ponto (1,1), então:

$$f'_{(-1,1)}(1,1) = \nabla f(1,1).(-1,1) = 2$$

c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h,0) - f(2,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2,h) - f(2,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{h^2}, \text{não existe}$$

Daqui se conclui que $\nabla f(2,0)$ não existe.

4. a)

$$\iint_A \left(e^{4y}+xy\right)dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^{2x} \left(e^{4y}+xy\right)dy\right)dx = \int_0^1 \left[\frac{e^{4y}}{4}+\frac{xy^2}{2}\right]_x^{2x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{4}e^{8x}-\frac{1}{4}e^{4x}+\frac{3}{2}x^3\right)dx = \left[\frac{e^{8x}}{32}-\frac{e^{4x}}{16}+\frac{3}{8}x^4\right]_0^1 = \frac{e^8-e^4+13}{32}.$$

b)

$$y'(x)+xy(x)=4x \Leftrightarrow y'(x)e^{\frac{x^2}{2}}+y(x)xe^{\frac{x^2}{2}} = 4xe^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \left(y(x)e^{\frac{x^2}{2}}\right)' = 4xe^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(x)e^{\frac{x^2}{2}} = 4e^{\frac{x^2}{2}}+C \Leftrightarrow y(x) = 4+Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

Tendo em conta a condição $y(0)=8$, obtém-se $C=4$, i.e.,

$$y(x) = 4\left(1+e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

Grupo II

1.a) Sendo f contínua, $4-k^2$ é igual a qualquer limite direccional de f na origem. Em particular,

$$4-k^2 = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0.$$

Logo, $k\in\{-2,2\}$.

b) Em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, f é uma função racional, logo é diferenciável. Para provar que f é diferenciável na origem, basta mostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x-\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Tendo em conta que as derivadas parciais são nulas, esta condição reduz-se a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Para verificar que a condição é satisfeita, basta notar que

$$0 \le \frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \le \frac{2\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

II.2. $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x - 9 = 0 \\ \\ -3y^2 - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \ \vee x = -1 \\ \\ y = 0 \ \vee y = 2 \end{cases}$,

donde (3,0), (3,2), (-1,0) e (-1,2) são os pontos críticos de f.

$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 6x - 6 & 0 \\ 0 & 6y - 6 \end{bmatrix}$

$H_f(3,0) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$. Como $\Delta_1 = 12 > 0, \Delta_2 = -72 < 0$, $H_f(3,0)$ é indefinida e (3,0) é ponto sela.

$H_f(3,2) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$. Como $\Delta_1 = 12 > 0, \Delta_2 = 72 > 0$, $H_f(3,2)$ é def. positiva e (3,0) é min. local de *f*.

$H_f(-1,0) = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$. Como $\Delta_1 = -12 < 0, \Delta_2 = 72 > 0$, $H_f(-1,0)$ é def. neg. e (-1,0) é max. local.

$H_f(-1,2) = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$. Como $\Delta_1 = -12 < 0, \Delta_2 = -72 < 0$, $H_f(-1,2)$ é indef. e (-1,2) é ponto sela.

II.3. $\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = x^2 + x + 2y^2 + 3z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 + 2\lambda x = 0 \\ 4y + 2\lambda y = 0 \\ 6z + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 2y(2 + \lambda) = 0 \\ 2z(3 + \lambda) = 0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ y = 0 \ \vee \lambda = -2 \\ z = 0 \ \vee \ \lambda = -3 \\ - \end{cases}$$

$\lambda = -2 \overset{\substack{eq\,1 \\ eq\,3}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases} \overset{eq\,4}{\Longrightarrow} \ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0) e \ (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ são as soluções associadas a $\lambda = -2$.

$\lambda = -3 \overset{\substack{eq\,1 \\ eq\,2}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 0 \end{cases} \overset{eq\,4}{\Longrightarrow} \ z = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$. Logo, $(\frac{1}{4}, 0, \frac{\sqrt{15}}{4}) \ e \ \left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ são as sol. associadas a $\lambda = -3$.

$\lambda \neq -2 \ e \ \lambda \neq -3 \overset{\substack{eq\,2 \\ eq\,3}}{\Longrightarrow} \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \overset{eq\,4}{\Longrightarrow} x = \pm 1 \overset{eq\,1}{\Longrightarrow} \lambda = -\frac{3}{2} (se\ x = 1)$ ou $\lambda = -\frac{1}{2} (se\ x = -1)$. Assim, (1,0,0) e (-1,0,0) são as soluções do sistema associadas a $\lambda = -\frac{3}{2} \ \ e \ \lambda = -\frac{1}{2}$, respectivamente.

Como $int(C) = \emptyset \ e \ fr(C) = C, C$ é fechado. Sendo $C \subset B_r(0,0,0), com \ r > 1, C$ é limitado e portanto C é um conjunto compacto. A função *f* é polinomial e por isso contínua, donde, pelo teorema de Weierstrass, pode-se garantir a existência de máximo e mínimo absolutos de *f* em C.

$f\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) = \frac{9}{4}; \ \ f\left(\frac{1}{4}, 0, \pm \frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{25}{8}; \quad f(1,0,0) = 2; \quad f(-1,0,0) = 0.$

Conclusão: O máximo absoluto de *f* em C é $\frac{25}{8}$ e o mínimo absoluto é 0.

II.4.

$F(\lambda x, \lambda y) \stackrel{\text{def}}{=} f\big(g(\lambda x), h(\lambda y)\big) = f\left(\lambda^{\beta} g(x), h(\lambda y)\right) = f\left(\lambda^{\beta} g(x), \lambda^{\beta} h(y)\right) = (\lambda^{\beta})^{\alpha} f\big(g(x), h(y)\big) \stackrel{\text{def}}{=}$
$\lambda^{\alpha\beta} F(x, y)$.

A 1ª igualdade é válida, por definição de *F*, a 2ª por *g* ser homogénea de grau β, a 3ª por *h* ser homogénea de grau β, a 4ª por *f* ser homogénea de grau α e finalmente a 5ª, novamente por definição de *F.*