

# Matemática II

2012/2013

## Economia, Finanças e Gestão

### Exercícios com soluções

(Actualizado a 4/10/2012)

## 1 Complementos de Álgebra Linear

**1.1.** Para cada uma das matrizes seguintes, calcule os valores próprios e, se forem reais, determine os vectores próprios correspondentes, identificando em cada caso as multiplicidades algébrica e geométrica

a)  $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

f)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

g)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

h)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

i)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

**Solução:** a)  $\lambda_1 = -5$ ,  $m.a. = 1$ ; vectores próprios  $u = (c, c)$ , com  $c \neq 0$ ,  $m.g. = 1$ ;  
 $\lambda_2 = -1$ ,  $m.a. = 1$ ; vectores próprios  $u = (7/3c, c)$ , com  $c \neq 0$ ,  $m.g. = 1$ ;  
b) O polinómio característico não tem raízes reais ( $\lambda_1 = 4 + 2i$ ,  $\lambda_2 = 4 - 2i$ );  
c)  $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ ;  $m.a. = 1$ ; vectores próprios  $u = ((1 + \sqrt{2})c, c)$ , com  $c \neq 0$ ,  $m.g. = 1$ ;  
 $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ ;  $m.a. = 1$ ; vectores próprios  $u = ((1 - \sqrt{2})c, c)$ , com  $c \neq 0$ ,  $m.g. = 1$ ;  
d)  $\lambda = 0$ ,  $m.a. = 2$ ; vectores próprios  $u = (c, 0)$ , com  $c \neq 0$ ,  $m.g. = 1$ ;  
e)  $\lambda_1 = 2$ ,  $m.a. = 1$ ; vectores próprios  $u = (c, 0, 0)$ , com  $c \neq 0$ ,  $m.g. = 1$ ;  
 $\lambda_2 = 3$ ,  $m.a. = 1$ ; vectores próprios  $u = (0, c, 0)$ , com  $c \neq 0$ ,  $m.g. = 1$ ;  
 $\lambda_3 = 4$ ,  $m.a. = 1$ ; vectores próprios  $u = (0, 0, c)$ , com  $c \neq 0$ ,  $m.g. = 1$ ;  
f)  $\lambda_1 = 3$ ,  $m.a. = 2$ ; vectores próprios  $u = (-c, 0, c)$ , com  $c \neq 0$ ,  $m.g. = 1$ ;  
 $\lambda_2 = -1$ ,  $m.a. = 1$ ; vectores próprios  $u = (c, 0, c)$ , com  $c \neq 0$ ,  $m.g. = 1$ ;  
g)  $\lambda_1 = 0$ ,  $m.a. = 2$ ; vectores próprios  $u = (-c_1 - c_2, c_1, c_2)$ , com  $c_1$  e  $c_2$  não simultaneamente nulos,  $m.g. = 2$ ;

$\lambda_2 = 3$ ,  $m.a. = 1$ ; vectores próprios  $u = (c, c, c)$ , com  $c \neq 0$ ,  $m.g. = 1$ ;  
h)  $\lambda = 1$ ,  $m.a. = 3$ ; vectores próprios  $u = (c, 0, 0)$ , com  $c \neq 0$ ,  $m.g. = 1$ ;  
i)  $\lambda_1 = 2$ ,  $m.a. = 2$ ; vectores próprios  $u = (c_1, c_1, c_2)$ , com  $c_1$  e  $c_2$  não simultaneamente nulos,  $m.g. = 2$ ;  
 $\lambda_2 = 0$ ,  $m.a. = 1$ ; vectores próprios  $u = (-c, c, 0)$ , com  $c \neq 0$ ,  $m.g. = 1$ .

**1.2.** Prove que

- a)  $\lambda$  é um valor próprio de  $A$  sse for valor próprio de  $A^T$ ;
- b) se  $\lambda$  for valor próprio de  $A$  e  $|A| \neq 0$ , então  $\lambda \neq 0$  e  $\frac{1}{\lambda}$  é valor próprio da matriz inversa  $A^{-1}$ ;
- c) se  $\lambda$  for valor próprio de  $A$  então  $\lambda^k$  é valor próprio da matriz  $A^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**1.3.** Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

- a) Calcule os valores próprios de  $A$  e os respectivos vectores próprios;
- b) Determine os valores próprios e vectores próprios de  $A^{100}$  (sugestão: use um dos resultados enunciados no exercício anterior).

**Solução:** a)  $\lambda_1 = -5$ , vectores próprios  $u = (-2/3c, c)$ , com  $c \neq 0$  ;  
 $\lambda_2 = 5$ , vectores próprios  $u = (c, c)$ , com  $c \neq 0$  ;  
b)  $\lambda = 5^{100}$ , vectores próprios  $u = (-2/3c_1, c_1) + (c_2, c_2)$ , com  $c_1, c_2$  não simultaneamente nulos;

**1.4.** Considere a matriz  $A$  e o vector  $\mathbf{x}$  definidos por

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

- a) Identifique o polinómio característico,  $P(\lambda)$ , associado à matriz  $A$ ;
- b) Determine os valores próprios de  $A$ ;
- c) Calcule  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ ;
- d) Sejam  $a, b \geq 0$ . Sem efectuar qualquer cálculo, mostre que existe um vector  $\mathbf{x}$  não nulo, para o qual  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 0$ ;
- e) Classifique  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$  para todos os possíveis valores de  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Solução:** a)  $P(\lambda) = (b - \lambda)(-\lambda)(2a - \lambda)$ ; b)  $\lambda_1 = b, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2a$ ; c)  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = ax^2 + 2axy + ay^2 + bz^2$ ;  
e) SDP se  $(a \geq 0 \text{ e } b \geq 0)$  ; SDN se  $(a \leq 0 \text{ e } b \leq 0)$ ;  
Ind. nos restantes casos, isto é,  $(a > 0 \text{ e } b < 0)$  ou  $(a < 0 \text{ e } b > 0)$ .

**1.5.** Classifique as seguintes formas quadráticas

- a)  $q(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$
- b)  $q(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$
- c)  $q(x, y) = x^2 - y^2$
- d)  $q(x, y, z) = x^2 + 4xy - 2xz + 7y^2 - 3z^2$
- e)  $q(x, y, z) = x^2 - 4xy + 4xz - z^2$
- f)  $q(x, y) = 6x^2 + 4xy + 3y^2$
- g)  $q(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$
- h)  $q(x, y) = 2x^2 + 6xy + 4y^2$
- i)  $q(x, y, z) = 3y^2 + 4xz$
- j)  $q(x, y) = x^2 + 4xy + ay^2$  (onde  $a \in \mathbb{R}$ ).

**Solução:** a)SDP b)SDP c)Ind. d)Ind. e)Ind. f)DP g)Ind. h)Ind. i)Ind. j)Ind se  $a < 4$ , SDP se  $a = 4$  e DP se  $a > 4$ .

**1.6.** Classifique as seguintes matrizes simétricas (quanto a serem definidas positivas, semi-definidas positivas, negativas, semi-definidas negativas ou indefinidas)

- a)  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
- b)  $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
- c)  $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$
- d)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$
- e)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
- f)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -5 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$
- g)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$
- h)  $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$
- i)  $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$
- j)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

**Solução:** a)DP b)Ind. c)DN d)Ind. se  $a < 4$ , SDP se  $a = 4$  e DP se  $a > 4$  e)Ind. f)SDP g)Ind. h)Ind. se  $a < -\sqrt{2} \vee a > \sqrt{2}$ , DP se  $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$  e SDP se  $a = \pm\sqrt{2}$  i)DN j) Ind.

## 2 Funções de várias variáveis: limites e continuidade

**2.1.** Determine os domínios das seguintes funções de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$  e represente-os graficamente

$$\begin{aligned} a) f(x, y) &= \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{1 - \ln x} & b) f(x, y) &= \frac{\sqrt{e - e^x}}{\ln(4 - x^2 - y^2)} & c) f(x, y) &= \ln(x - y)^2 \\ d) f(x, y) &= \frac{\sqrt[3]{x + y}}{\ln x^2 - \ln(3 - x)^2} & e) f(x, y) &= \ln(x - y)\sqrt{(y - x)(x^2 + y^2 - 1)} \end{aligned}$$

**Solução:** a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge x \neq e \wedge x^2 + y^2 \leq 9\}$  b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1 \wedge x^2 + y^2 < 4 \wedge x^2 + y^2 \neq 3\}$   
c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$  d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge x \neq 3 \wedge x \neq 3/2\}$  e)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0 \wedge x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$

**2.1.** Determine o interior, exterior e fronteira de cada um dos seguintes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ . Classifique-os relativamente a serem abertos, fechados e limitados.

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 < 4\} & B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 9\} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\} & D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1\} \end{aligned}$$

**Solução:**  $\text{int}(A) = A$ ,  $\text{fr}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4\}$ ,  $\text{ext}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 > 4\}$ ,  $A$  é aberto e limitado.  $\text{int}(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 9\}$ ,  $\text{fr}(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$ ,  $\text{ext}(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$ ,  $B$  é fechado e não é limitado.  $\text{int}(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} < 1\}$ ,  $\text{fr}(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1\}$ ,  $\text{ext}(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} > 1\}$ ,  $C$  é fechado e limitado.  $\text{int}(D) = \emptyset$ ,  $\text{fr}(D) = D$ ,  $\text{ext}(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{9} \neq 1\}$ ,  $D$  é fechado e limitado.

**2.2.** Represente graficamente o domínio  $D_f$ , indique analiticamente  $\text{int}\{D_f\}$ ,  $\text{fr}\{D_f\}$  e  $D'_f$  e diga, justificando, se  $D_f$  é aberto ou fechado, se é limitado e se é compacto, para cada uma das seguintes funções de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} a) f(x, y) &= \frac{|x| - 4}{\ln(4 - x^2 - y^2)} & b) f(x, y) &= \sqrt{x(1 - x)} + \frac{\ln(x^2 - y)}{\sqrt{y + x}} \\ c) f(x, y) &= \sqrt{y + x - 1} \cdot \ln(4 - (x + 1)^2 - (y - 1)^2) & d) f(x, y) &= \sqrt{x - |y|} + \sqrt{2 - y^2 - x} \\ e) f(x, y) &= x\sqrt{y^2 - 4} + \sqrt[4]{16 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

**Solução:** a)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 - y^2 > 0 \wedge \ln(4 - x^2 - y^2) \neq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \wedge x^2 + y^2 \neq 3\}$ ,  $\text{int}(D_f) = D_f$ ,  $\text{fr}(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4 \vee x^2 + y^2 = 3\}$ ,  $D'_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ .  $D_f$  é aberto, não é fechado, é limitado mas não é compacto.

b)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(1-x) \geq 0 \wedge x^2 - y > 0 \wedge y + x > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge -x < y < x^2\}$ ,  $\text{int}(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 \wedge -x < y < x^2\}$ ,  $\text{fr}(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y = x^2 \wedge 0 \leq x \leq 1) \vee (y = -x \wedge 0 \leq x \leq 1) \vee (x = 1 \wedge -x \leq y \leq x^2)\}$ ,  $D'_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (0 \leq x \leq 1) \wedge (-x \leq y \leq x^2)\}$ .  $D_f$  não é aberto nem fechado, é limitado mas não é compacto.

c)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + x - 1 \geq 0 \wedge 4 - (x + 1)^2 - (y - 1)^2 > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1 - x \wedge (x + 1)^2 + (y - 1)^2 < 4\}$ ,  $\text{int}(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1 - x \wedge (x + 1)^2 + (y - 1)^2 < 4\}$ ,  $\text{fr}(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x \wedge (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1 - x \wedge (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4\}$ ,  $D'_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1 - x \wedge (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 4\}$ .  $D_f$  não é aberto nem fechado, é limitado mas não é compacto.

d)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - |y| \geq 0 \wedge 2 - y^2 - x \geq 0\}$ ,  $\text{int}(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - |y| > 0 \wedge 2 - y^2 - x > 0\}$ ,  $\text{fr}(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - |y| = 0 \wedge 2 - y^2 - x \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - |y| \geq 0 \wedge 2 - y^2 - x = 0\}$ ,  $D'_f = D_f$ .  $D_f$  não é aberto, é fechado, é limitado e portanto é compacto.

e)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 4 \geq 0 \wedge 16 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y \geq 2 \vee y \leq -2) \wedge x^2 + y^2 \leq 16\}$ ,  $\text{int}(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y > 2 \vee y < -2) \wedge x^2 + y^2 < 16\}$ ,  $\text{fr}(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y = 2 \vee y = -2) \wedge x^2 + y^2 \leq 16\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y \geq 2 \vee y \leq -2) \wedge x^2 + y^2 = 16\}$ ,  $D'_f = D_f$ .  $D_f$  não é aberto, é fechado, é limitado e portanto é compacto.

**2.3.** Determine o domínio da função  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2 - 4)}{|x| - 4}.$$

Faça a sua representação gráfica e mostre que  $D_f$  é um conjunto aberto e ilimitado. Averigue se  $\text{ext}(D_f)$  também é aberto e ilimitado.

**Solução:**  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4 > 0 \wedge |x| - 4 \neq 0\}$ .  $\text{Ext}(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$  e portanto é um conjunto aberto e limitado.

**2.4.** Determine o interior, a fronteira e os pontos de acumulação dos seguintes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$

$$a) A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

$$b) B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}\}$$

$$c) C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = (-1)^n \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}.$$

**Solução:** a)  $\text{int}(A) = \emptyset$ ,  $\text{fr}(A) = A$ ,  $A' = \emptyset$ . b)  $\text{int}(B) = \emptyset$ ,  $\text{fr}(B) = B \cup \{(0, 0)\}$ ,  $B' = \{(0, 0)\}$ . c)  $\text{int}(C) = \emptyset$ ,  $\text{fr}(C) = C \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 0\}$ ,  $C' = \text{fr}(C)$ .

**2.5.** Calcule os seguintes limites de sucessões de pontos em  $\mathbb{R}^2$  (caso existam):

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim \left( \left( \frac{2n^2 + 3}{1 + 2n^2} \right)^{n^2}, \ln \left( \frac{2n}{2n + 1} \right)^{n + \frac{1}{2}} \right) \quad & \text{b) } \lim \left( n^3 + n - n^2 - 1, \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{n} + 3}{(\sqrt{n} + 1)^2} \right) \\ \text{c) } \lim \left( n \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 \right), \sin \frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

**Solução:** a)  $(e, -\frac{1}{2})$ ; b)  $(+\infty, 1)$ ; c) não existe.

**2.6.** Calcule os seguintes limites:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim \bar{x}_n, \text{ com } \bar{x}_n &= \left[ \frac{n}{2n + 1}, \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^n, \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] \\ \text{b) } \lim \bar{x}_n \text{ com } \bar{x}_n &= \left[ \sqrt{n} - \sqrt{n - 1}, (\sqrt[n]{e} - 1) \cdot n, n \cdot \ln \frac{n + 2}{n}, \left( 1 - \frac{n^2}{n^2 + 1} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left( \frac{n^2 + 1}{2n^2} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \end{aligned}$$

**Solução:** a)  $(1/2, e^2, 1)$ ; b)  $(0, 1, 2, 0)$ .

**2.7.** Estude a existência de limite no ponto  $(0,0)$  para as seguintes funções

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{x(x + y)} \quad \text{b) } f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{c) } f(x, y) = \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \text{d) } f(x, y) &= xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{e) } f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{f) } f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \\ \text{g) } f(x, y) &= \frac{x^2(x + y)}{x^2 + y^2} \quad \text{h) } f(x, y) = \frac{x^2 - y^2 + 2x^3}{x^2 + y^2}, \quad \text{i) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x} \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{se } x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

**Solução:** a) Não existe b) 0 c) Não existe d) 0 e) Não existe f) Não existe g) 0 h) Não existe i) Não existe.

**2.8.** Determine, caso exista, o prolongamento por continuidade à origem de cada uma das funções do exercício anterior.

**Solução:** Relativamente às alíneas em que o limite não existe, não é possível obter o referido prolongamento. Relativamente às outras, basta definir o valor da função na origem como sendo o respectivo limite. Por exemplo, na alínea b) o prolongamento é

$$\begin{cases} f(x, y), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}.$$

**2.9.** Estude a existência dos seguintes limites

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{(x-2)(y-1)}{(x-2)^2 + (y-1)^2} & b) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-3)} \frac{\sqrt{(x-1)(y+3)} + \sin(x-1)(y+3)}{\sqrt{(x-1)(y+3)}} \\ c) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{3(x-2)^2(y-1)}{(x-2)^2 + (y-1)^2} & d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x} \\ e) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2 - y^2 - 1}{x - 1} & f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \\ g) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2 \sqrt{|y-1|}}{x^2 + (y-1)^2} & h) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \end{array}$$

**Solução:** a) não existe    b) 1    c) 0    d) não existe    e) não existe    f) 1    g) 0    h) 0.

**2.10.** Considere a função  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  para  $\mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}.$$

- a) Indique o domínio de  $f$ .
- b) Mostre que  $x^3 - y^3$  é múltiplo de  $x - y$ .
- c) Pode a função  $f$  ser prolongada por continuidade à recta  $y = x$ ?

**Solução:** a)  $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ . c) Sim, basta definir o valor de  $f$  em pontos da recta como sendo  $f(x, x) = 3x^2$ .

**2.11.** Considere a função  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 - y^2}$ .

- a) Calcule  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0), \\ y=x+x^2}} f(x, y)$ . O que pode concluir sobre  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  ?
- b) Calcule  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0), \\ y=mx}} f(x, y)$ ,  $|m| \neq 1$ . O que pode concluir sobre  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  ?

**Solução:**

a)  $-\frac{1}{2}$ . Se existir  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ , é  $-\frac{1}{2}$ .    b) 0. Não existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  ( $0 \neq -\frac{1}{2}$ ).



### 3 Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

**3.1.** Determine as derivadas parciais de primeira ordem de cada uma das seguintes funções e defina os respectivos domínios:

$$\text{a) } f(x, y, z) = 3xy + x^2 - zy + z^2; \quad \text{b) } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - yx, & y \neq x \\ x, & y = x. \end{cases}$$

**Solução:** a)  $f'_x = 3y + 2x$ ;  $f'_y = 3x - z$ ;  $f'_z = -y + 2z$ ;  $\mathcal{D}f'_x = \mathcal{D}f'_y = \mathcal{D}f'_z = \mathbb{R}^3$   
b)  $f'_x = 2x - y$  se  $x \neq y$  e  $f'_x = 0$  se  $x = y = 0$ ;  $f'_y = -x$  se  $x \neq y$  e  $f'_y = 0$  se  $x = y = 0$   
 $\mathcal{D}f'_x = \mathcal{D}f'_y = \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, a) : a \neq 0\}$

**3.2.** Mostre que  $f(x, y) = \frac{x - y + 1}{x + y}$  é solução da equação

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x + y}$$

em qualquer dos semiplanos abertos  $x + y > 0$  ou  $x + y < 0$ .

**3.3.** Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x-y} - (x - y + 1)}{x - y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de  $f(x, y)$  no ponto  $(1, 1)$ .

b) Verifique que  $f'_x(a, a) + f'_y(a, a) = 0$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

**Solução:**

a)  $f$  é contínua no ponto  $(1, 1)$ .

**3.4.** Dada a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases},$$

indique segundo que vectores existe derivada direcciona na origem e calcule o seu valor.

**Solução:**  $\partial_{\vec{v}} f(0,0)$  existe para  $\vec{v} = (\alpha, \alpha)$  e  $\vec{v} = (\alpha, -\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Nesse caso,  $\partial_{\vec{v}} f(0,0) = 0$ .

**3.5.** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases},$$

- a) Mostre que a função admite derivada direccional na origem segundo qualquer vector e calcule-a.  
 b) Mostre também que  $f$  não é contínua em  $(0,0)$ .  
 c) Sem fazer qualquer cálculo, indique o valor de  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$  e de  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ .

**Solução:** a)  $\partial_{(\alpha,\beta)} f(0,0) = \begin{cases} \frac{\beta^2}{\alpha} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 0 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . c)  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ .

**3.6.** Estude a diferenciabilidade das seguintes funções nos pontos indicados e escreva as expressões dos respectivos diferenciais de primeira ordem (no caso das funções diferenciáveis):

- a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , no ponto  $(0,0)$ ;  
 b)  $f(x, y) = \begin{cases} x + y, & x \neq y \\ x + 1, & x = y \end{cases}$ , em  $(1,1)$ ;  
 c)  $f(x, y) = \begin{cases} xy - 2y + 3x, & x \neq y \\ x^2 y^2 + 3x - 2y, & x = y \end{cases}$ , em  $(0,0)$ ; d)  $y = (x^2 + 1, x)$ , em  $x = 1$ ;

**Solução:**

a)  $f$  é diferenciável em  $(0,0)$ ;  $Df(0,0)(\mathbf{h}) = 0$ ; b)  $f$  não é diferenciável em  $(1,1)$ ; c)  $f$  é diferenciável em  $(0,0)$ ;  $Df(0,0)(\mathbf{h}) = 3h_1 - 2h_2$ ; d)  $y$  é diferenciável em  $x = 1$ ;  $Df(1)(\mathbf{h}) = (2h, h)$ .

**3.7.** Escreva as expressões do diferencial de primeira ordem das seguintes funções nos pontos indicados:

- a)  $f(x, y) = y^x$ , num ponto genérico  $(a, b)$ , com  $b > 0$ ;  
 b)  $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{\sqrt{x_3 - 1}}$ , no ponto  $(1, -3, 2)$ .

Nota: Admita à partida que as funções são diferenciáveis.

**Solução:** a)  $Df(a, b)(\mathbf{h}) = b^a \log b \cdot h_1 + ab^{a-1} \cdot h_2$  b)  $Df(1, -3, 2)(\mathbf{h}) = h_1 - h_2 - 2h_3$ .

**3.8.** Mostre que são contínuas e que não são diferenciáveis nos pontos indicados, as funções

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{-3x(y-2)^2 + x^3}{x^2 + (y-2)^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 2) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 2), \end{cases} & \text{b) } g(x, y) &= \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = y = 0, \end{cases} \\ \text{em } (0, 2); & & \text{em } (0, 0); & \\ \text{c) } h(x, y) &= \sqrt{|x|} \cos y, & \text{em } (0, 0). & \end{aligned}$$

**3.9.** Utilize a regra da derivação da função composta para calcular

- a)  $\frac{df}{dt}$ , onde  $f = x^2 y^3$ , sendo  $x = te^t$  e  $y = t^2 + 1$ ;  
b)  $\frac{df}{dt}$ , onde  $f = u^2 + v^3$ , sendo  $u = \frac{x}{y}$ ,  $v = (x + 2y)^3$  e  $x = \frac{1}{t}$ ,  $y = tg \ t$ ;  
c)  $\frac{dz}{dt}$ , supondo que  $z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$  e  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ .  
d)  $\nabla f(1, 1)$ , onde  $f(x, y) = \sin(2u - v^3 + w)$ , sendo  $u = e^{x^2 - y}$ ,  $v = xy^2$  e  $w = x^3 y^2$ ;  
e)  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1, 1)$ , onde  $f(x, y, z) = (u^2 - 3v)^5$ , com  $u = e^{\frac{xy}{z}}$  e  $v = \ln(y^2 z^3)$ ;  
f)  $\nabla f(1, 2, 3)$ , onde  $f(x, y, z) = g(u, v, w)$ , com  $u = 5x + 3z$ ,  $v = 8x + 2y$ ,  $w = -y + z$  e sabendo que  $\nabla g(14, 12, 1) = (4, 5, 6)$ .

**Solução:**

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{df}{dt} &= 2te^{2t}(t+1)(t^2+1)^3 + 6t^3e^{2t}(t^2+1)^2; \\ \text{b) } \frac{df}{dt} &= -2\frac{1}{t^3}\frac{1}{tg^2}t - 2\frac{1}{t^2}\frac{\sec^2 t}{tg^3}t + 9(-\frac{1}{t^2} + 2\sec^2 t)(\frac{1}{t} + 2tg \ t)^8; & \text{c) } \frac{dz}{dt} &= 2 - 4\sin^2 t; & \text{d) } \nabla f(1, 1) &= \\ &= (4\cos 2, -6\cos 2); & \text{e) } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1, 1) &= -30; & \text{f) } \nabla f(1, 2, 3) &= (60, 4, 18). \end{aligned}$$

**3.10.** Se a função  $f(u, v, w)$  é diferenciável no ponto  $u = x - y$ ,  $v = y - z$  e  $w = z - x$ , prove que, com  $F(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \equiv 0.$$

**3.11.** Dada a função

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2 y^2}{(x-1)^2 + y^2}, & (x, y) \neq (1, 0) \\ 0, & (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

- a) Determine as funções derivadas  $g'_x(x, y)$  e  $g'_y(x, y)$ , indicando onde são definidas.
- b) Mostre que  $g'_x(x, y)$  e  $g'_y(x, y)$  são funções contínuas em  $\mathbb{R}^2$ .
- c) Estude a diferenciabilidade da função no ponto  $(1, 0)$ .
- d) Estude a continuidade da função no ponto  $(1, 0)$ .

**Solução:**

$$a) \ g'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{2(x-1)y^4}{((x-1)^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (1, 0) \\ 0, & (x, y) = (1, 0) \end{cases} \quad g'_y(x, y) = \begin{cases} \frac{2(x-1)^4 y}{((x-1)^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (1, 0) \\ 0, & (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

Assim,  $D_{g'_x} = D_{g'_y} = \mathbb{R}^2$ . c)  $g$  é diferenciável em  $(1, 0)$ . d)  $g$  é contínua em  $(1, 0)$ .

**3.12.** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .
- b) Determine  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  e mostre que é descontínua em  $(0, 0)$ .
- c) Verifique que  $f$  é diferenciável na origem.
- d) Calcule  $\partial_{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})} f(0, 0)$ .
- e) Estude a continuidade de  $f$  na origem.

**Solução:**

a)  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ ;

b)  $f'_y(x, y) = \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ; d) 0; e)  $f$  é contínua em  $(0, 0)$ .

**3.13.** Utilize a função

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

e o ponto  $(0, 0)$  para mostrar que o facto de uma função ter derivadas parciais finitas num ponto não significa que seja contínua nesse ponto. A função dada será diferenciável no ponto  $(0, 0)$ ? Justifique.

**Solução:**

A função não é contínua em  $(0,0)$ , e portanto também não é diferenciável nesse ponto.

**3.14.** Considere a função definida em  $\mathbb{R}^2$  por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x| + |y|}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Prove que  $f$  é contínua em  $(0,0)$ .  
 b) Determine  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ .  
 c) Verifique que  $f$  não é diferenciável em  $(0,0)$ . Sem fazer cálculos, o que pode concluir sobre a continuidade de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  em  $(0,0)$ ?

**Solução:**

b)  $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$  c) Como  $f$  não é diferenciável em  $(0,0)$ , pelo menos uma das funções  $f'_x$  ou  $f'_y$  (ou ambas) não são contínuas em  $(0,0)$ .

**3.15.** Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x-y)}{x+y} & \text{se } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x+y = 0 \end{cases}$$

- a) Estude a continuidade de  $f$  no ponto  $(0,0)$  (sugestão: calcule o limite segundo a parábola de equação  $y = -x + x^2$ ).  
 b) Calcule a função derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e estude a sua continuidade em  $(0,0)$ .  
 c) Estude a diferenciabilidade de  $f$  em  $(0,0)$ .  
 d) Mostre que  $\left( \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \neq \delta_{\left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} f(0,0)$ . Comente esse resultado.

**Solução:**

- a)  $f$  não é contínua em  $(0,0)$ .  
 b)  $f'_x(x, y) = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x+y)^2}$  se  $x+y \neq 0$  e  $f'_x(x, y) = 1$  se  $(x, y) = (0,0)$  (não existe  $f'_x(a, -a)$ ,  $a \neq 0$ ); a função  $f'_x(x, y)$  não é contínua em  $(0,0)$ .  
 c)  $f$  não é diferenciável em  $(0,0)$ .  
 d) Os dois valores só teriam de ser iguais se a função  $f$  fosse diferenciável em  $(0,0)$ .

**3.16.** Calcule  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  e  $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z \partial y}$ , para  $f(x, y, z) = z^2 x^2 y + x y e^z$ .

**Solução:**  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2yz^2$ ,  $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z \partial y} = 4z$ .

**3.17.** Calcule  $f''_{x^2}$ ,  $f''_{xy}$  e  $f'''_{xyx}$  para cada uma das seguintes funções, indicando os respectivos domínios:

$$a) f(x, y) = x \sin(x + y); \quad b) f(x, y) = \begin{cases} y \sin x, & y \neq 0 \\ 2, & y = 0 \end{cases}$$

**Solução:**

a)  $f''_{x^2} = 2 \cos(x + y) - x \sin(x + y)$ ,  $f''_{xy} = \cos(x + y) - x \sin(x + y)$  e  $f'''_{xyx} = -2 \sin(x + y) - x \cos(x + y)$ .  
 b)  $f''_{x^2} = -y \sin x$ ,  $f''_{xy} = \cos x$  e  $f'''_{xyx} = -\sin x$ ;

**3.18.** Calcule a segunda, terceira e quarta diferenciais de  $f(x, y) = \sqrt{xy}$  no ponto  $(1, 1)$ .

**Solução:**

$$\begin{aligned} D^2 f(1, 1)(\mathbf{h}^2) &= -\frac{1}{4} h_1^2 + \frac{1}{2} h_1 h_2 - \frac{1}{4} h_2^2, \\ D^3 f(1, 1)(\mathbf{h}^3) &= \frac{3}{8} h_1^3 - \frac{3}{8} h_1^2 h_2 - \frac{3}{8} h_1 h_2^2 + \frac{3}{8} h_2^3, \\ D^4 f(1, 1)(\mathbf{h}^4) &= -\frac{15}{16} h_1^4 + 4 \frac{3}{16} h_1^3 h_2 + 6 \frac{1}{16} h_1^2 h_2^2 + 4 \frac{3}{16} h_1 h_2^3 - \frac{15}{16} h_2^4. \end{aligned}$$

**3.19.** Escreva a expressão geral da  $n$ -ésima diferencial da função  $f(x, y) = \sin(x + y)$  no ponto  $(0, 0)$ .

**Solução:**  $D^n f(0, 0)(\mathbf{h}) = \sin(n\pi/2) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} h_1^i h_2^{n-i}$

**3.20.** Mostre que  $f(x, y) = \log(e^x + e^y)$  satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$$

em todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$ .

**3.21.** Seja  $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$  uma função real tal que  $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = 1$ . Seja  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x, y) = f(y \sin x, y^2).$$

Mostre que a matriz hessiana de  $g$  em  $(0, 0)$  é  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

**3.22.** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = xy^2 + g(u, v, w), \text{ com } u = \sin y^2, \ v = \ln x \text{ e } w = ye^x.$$

Sabendo que a função  $g$  é de classe  $C^2(\mathbb{R}^3)$ , calcule  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 0)$ .

**Solução:**  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 0) = e \left( \frac{\partial^2 g}{\partial w \partial v}(0, 0, 0) + \frac{\partial g}{\partial w}(0, 0, 0) \right)$ .

**3.23.** Mostre que as funções seguintes são homogêneas ou positivamente homogêneas. Determine o grau de homogeneidade e verifique a identidade de Euler:

$$\text{a) } f(x, y) = \log \frac{(x+y)^2}{xy} \quad \text{b) } f(x, y, z) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z^2} \quad \text{c) } f(x, y) = \begin{cases} (x+y) \sin \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

**Solução:**

- a)  $f$  é homogênea de grau 0;
- b)  $f$  é positivamente homogênea de grau  $-1$ ;
- c)  $f$  é homogênea de grau 1.

**3.24.** Estude a homogeneidade de  $g(x, y, z) = x^2 + x^\alpha y^{\beta-3} - z^{3\alpha} y^\beta$  e de  $h(x, y) = \frac{x^3 y^\alpha + x^{\beta-1}}{y^{3-\beta}}$ , fazendo a discussão em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  reais:

- a) Recorrendo directamente à definição.
- b) Utilizando a identidade de Euler.

**Solução:**

$g$  é homogênea de grau 2 para  $\alpha = -\frac{3}{2}$  e  $\beta = \frac{13}{2}$ ;  
 $h$  é homogênea de grau  $\alpha + \beta$  para  $\beta = \alpha + 4, \alpha \in \mathbb{R}$ .

**3.25.** Sendo  $g(u, v)$  diferenciável em  $\left( \frac{x}{y}, \frac{z}{x} \right)$ , com  $x, y \neq 0$ , prove que a função

$$f(x, y, z) = x^2 \cdot g \left( \frac{x}{y}, \frac{z}{x} \right),$$

verifica a identidade  $x \cdot f'_x + y \cdot f'_y + z \cdot f'_z \equiv 2 \cdot f$ . Interprete este resultado em termos de homogeneidade.

**Solução:**

$f$  é positivamente homogénea de grau 2.

**3.26.** Sendo  $f(\mathbf{x})$  uma função de  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  em  $\mathbb{R}$ , homogénea de grau zero e não constante, prove que não existe o  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x})$ .

**3.27.** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x, y) = \ln \left( \frac{xy}{x+y} \right).$$

Escreva a fórmula de Taylor de ordem 2, em torno do ponto (1,1).

**Solução:**  $\ln \frac{(1+h)(1+k)}{2+h+k} = -\ln 2 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \left( -\frac{3}{4}h^2 + \frac{1}{2}hk - \frac{3}{4}k^2 \right) + r_3(h, k).$



## 4 Problemas de Extremo

4.1. Determine e classifique os pontos críticos das seguintes funções de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{llll} a)x^2 + y^2 & b)x^2 - y^2 & c)x^3 + y^3 & d)x^3 - y^3 \\ e)x^4 + y^4 & f)x^4 - y^4 & g)3xy - x^3 - y^3 & h)x \ln x + y \ln y \\ i)x^3 + ye^y & j)2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 & k)x^4 + y^4 - 4xy + 1 & l)x^2y^2 \end{array}$$

**Solução:** a)  $(0,0)$  é minimizante; b) c) d)  $(0,0)$  é ponto de sela; e)  $(0,0)$  é minimizante; f)  $(0,0)$  é ponto de sela; g)  $(0,0)$  é ponto de sela e  $(1,1)$  é maximizante; h)  $(1/e, 1/e)$  é minimizante i)  $(0,-1)$  é ponto de sela; j)  $(0,0)$  é minimizante,  $(-5/3, 0)$  é maximizante,  $(-1, 2)$  e  $(-1, -2)$  são pontos de sela; k)  $(0,0)$  é ponto de sela,  $(1,1)$  e  $(-1,-1)$  são minimizantes; l)  $(0,b)$  e  $(a,0) \forall a, b \in \mathbb{R}$ , são minimizantes;

4.2. Determine e classifique os pontos críticos das funções seguintes, em função do parâmetro  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{array}{ll} a)f(x,y) = e^{x^2-ay^2} & b)f(x,y) = ax^2 - y^2 \\ c)f(x,y) = x^3 - ax^2 - 3y^2 & d)f(x,y) = \frac{16}{5}x^5 + ay^2 - x \end{array}$$

**Solução:** a) Ponto crítico:  $(0,0)$ . Se  $a < 0$ , minimizante; se  $a > 0$ , ponto de sela. b) Ponto crítico:  $(0,0)$ . Se  $a > 0$ ,  $(0,0)$  é ponto de sela; se  $a < 0$ ,  $(0,0)$  é maximizante. c) Pontos críticos:  $(0,0)$  e  $(\frac{2a}{3}, 0)$ . Se  $a > 0$ ,  $(0,0)$  é maximizante e  $(\frac{2a}{3}, 0)$  é ponto de sela; se  $a < 0$ ,  $(0,0)$  é ponto de sela e  $(\frac{2a}{3}, 0)$  é maximizante. d) Pontos críticos:  $(-\frac{1}{2}, 0)$  e  $(\frac{1}{2}, 0)$ . Se  $a < 0$ ,  $(-\frac{1}{2}, 0)$  maximizante e  $(\frac{1}{2}, 0)$  é ponto de sela; se  $a > 0$ ,  $(-\frac{1}{2}, 0)$  é ponto de sela e  $(\frac{1}{2}, 0)$  é minimizante.

4.3. Considere a função  $f(x,y) = (y - \alpha)xe^x$ .

- a) Sabendo que  $(0,1)$  é ponto crítico de  $f$ , determine  $\alpha$  e classifique o ponto crítico  $(0,1)$ .
- b) Mostre que  $f$  não é limitada.

**Solução:** a)  $\alpha = 1$ . O ponto crítico é ponto de sela.

4.4. Seja a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x,y) = 4\alpha(y-2)^2 + (\beta^2 - 1)(2x-2)^2$ , onde  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 1$ ,  $\beta \neq -1$ . Mostre que  $(1,2)$  é o único ponto crítico de  $f$  e classifique-o em função dos possíveis valores de  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Solução:** Se  $|\beta| < 1$  e  $\alpha < 0$  então  $(1, 2)$  é máximo local; se  $|\beta| > 1$  e  $\alpha > 0$  então  $(1, 2)$  é mínimo local; nos restantes casos é ponto de sela.

**4.5.** Considere a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x^2 e^{y^3 - 3y}$ .

- Determine os pontos críticos da função  $f$ .
- Mostre que a função  $f$  assume nos pontos da forma  $(0, b)$  o seu mínimo absoluto.
- Justifique que
  - $f$  não é limitada em  $\mathbb{R}^2$ ;
  - $f$  tem máximo e mínimo em  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$ .

**Solução:** a) Pontos críticos:  $(0, b)$  com  $b \in \mathbb{R}$ .

**4.6.** Determine os extremos absolutos da função  $f$  no conjunto  $M$ , com

$$a) f(x, y, z) = x - 2y + 2z, \quad M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

$$b) f(x, y) = 4x^2 + y^2, \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 1\}$$

$$c) f(x, y) = xy, \quad M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1\right\}$$

$$d) f(x, y, z) = x^2 + 2y - 2z, \quad M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 8\}$$

$$e) f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2, \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 3)^2 + y^2 = 2\}$$

$$f) f(x, y, z) = 2x + 2y^2 + z^2, \quad M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$$

**Solução:** a) O valor máximo da função na superfície esférica é 3 e o mínimo é  $-3$ ; b) O valor máximo da função na elipse é 2 e o mínimo é 1; c) O valor máximo da função na elipse é 2 e o mínimo é  $-2$ ; d) O valor máximo da função na superfície esférica é 10 e o mínimo é  $-8$ ; e) O valor máximo da função na circunferência é 25 e o mínimo é 1; f) O valor máximo da função na superfície esférica é  $9/2$  e o mínimo é  $-2\sqrt{2}$ .

**4.7.** Determine os extremos absolutos da função  $f$  no conjunto  $A$ , com

a)  $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ ,  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$   
(sugestão: compare com a alínea a) do exercício anterior)

b)  $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1\}$   
(sugestão: compare com a alínea b) do exercício anterior)

c)  $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ ,  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 3)^2 + y^2 \leq 2\}$   
(sugestão: compare com a alínea e) do exercício anterior)

**Solução:** a) O valor máximo da função na esfera é 3 e o mínimo é  $-3$ ; b) O valor máximo da função na região limitada pela elipse é 2 e o mínimo é 0; c) O valor máximo da função no círculo é 25 e o mínimo é 1.

**4.8.** Determinar as distâncias máxima e mínima da origem à elipse  $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$ .

**Solução:** A distância máxima é 2 e a distância mínima é 1.

**4.9.** Resolva o problema  $\min (x + 4y + 3z)$  sujeito à condição  $x^2 + 2y^2 + \frac{1}{3}z^2 = b$ , ( $b > 0$ ).

**Solução:** O valor mínimo da função é  $-6\sqrt{b}$ , obtido no ponto  $(-\frac{\sqrt{b}}{6}, -\frac{\sqrt{b}}{3}, -\frac{3\sqrt{b}}{2})$ .

**4.10.** Determine o ponto da elipse de equação  $x^2 + 2xy + 2y^2 = 2$  que tem menor abcissa.

**Solução:**  $(-2, 1)$ .

**4.11.** Determine os extremos absolutos da função  $f(x, y) = e^{x^2+y^2+z^2}$  no conjunto  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 2 - y\}$ .

**Solução:** O máximo da função é  $e^{10}$ , obtido no ponto  $(0, -1, 3)$ ; o mínimo é  $e^2$ , obtido em  $(0, 1, 1)$ .

## 5 Integrais Múltiplos

5.1. Calcule os seguintes integrais

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_1^2 x \, dx dy dz & \text{b)} \int_{-1}^1 \int_0^1 y e^{xy} \, dx dy & \text{c)} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x-y-z} \, dx dy dz \\ \text{d)} \int_0^5 \int_0^{+\infty} (x^2 e^{-2yx} + 3y e^{-y^2}) \, dy dx & \text{e)} \int_1^2 \int_1^2 (1+x+\frac{y}{2}) \, dx dy & \text{f)} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cos x \, dx dy dz. \end{array}$$

**Solução:** a) 3   b)  $e - \frac{1}{e} - 2$    c) 1   d)  $\frac{55}{4}$    e)  $\frac{13}{4}$    f)  $\frac{1}{2}$

5.2. Calcule  $\iint_A f(x, y) \, dx dy$ , onde

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x, y) = \frac{2x}{y^6}, & A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq y^4\} \\ \text{b)} f(x, y) = e^{\frac{y}{x}}, & A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x^3\} \\ \text{c)} f(x, y) = x^2 y^5, & A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\} \\ \text{d)} f(x, y) = y e^x + x^2 y, & A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\} \\ \text{e)} f(x, y) = x e^{-xy}, & A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y < +\infty\} \\ \text{f)} f(x, y) = x^3 + 4y, & A \text{ é a região do plano } xOy \text{ limitada pelas linhas } y = x^2 \text{ e } y = 2x. \end{array}$$

**Solução:** a)  $\frac{26}{3}$    b)  $\frac{e^4}{2} - 2e$    c)  $\frac{2}{45}$    d)  $\frac{e}{2} - \frac{23}{24}$    e)  $\frac{1}{e}$    f)  $\frac{32}{3}$

5.3. Sendo  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 - x, y \leq 1 + x, y \geq 0\}$ , calcule

$$\text{a)} \iint_A (x-1)y \, dx dy \quad \text{b)} \iint_A (y-2y^2)e^{xy} \, dx dy \quad \text{c)} \iint_A (x+y) \, dx dy.$$

**Solução:** a)  $-\frac{1}{3}$    b) 0   c)  $\frac{1}{3}$

5.4. Calcule  $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \, dx dy$ , com  $f(x, y) = \begin{cases} xy & x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 1 - x - y, & \text{outros } (x, y) \end{cases}$ .

**Solução:**  $\frac{17}{4}$

**5.5.** Calcule com um integral duplo a área da figura plana que é imagem do conjunto A, sendo

- a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq 1\}$ ;
- b)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x \leq y \leq 1 \wedge x \leq 1\}$ ;
- c)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$ ;
- d)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 2 \geq 0 \wedge x + y^2 \leq 0\}$ ;
- e)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2 \wedge y - x \geq 0 \wedge 2y - x \leq 3 \wedge x \geq 0\}$ ;
- f)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;
- g)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + x \leq 2 \wedge x - y \geq 0\}$ ;
- h)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \wedge x \leq \frac{y^2}{4} + 3\}$ ;

**Solução:** a)  $\frac{4}{3}$    b)  $\frac{1}{2}$    c)  $\frac{8}{3}$    d)  $\frac{9}{2}$    e)  $\frac{35}{48}$    f)  $\frac{\pi}{2}$    g)  $\frac{9}{2}$    h) 8

**5.6.** Calcule  $\int_0^4 \int_{2x}^8 \sin(y^2) dy dx$  (sugestão: comece por fazer o esboço gráfico da região integranda, invertendo depois a ordem de integração).

**Solução:**  $\frac{1 - \cos 64}{4}$

**5.7.** Calcule  $\int \int_A g(x, y) dx dy$ , sendo  $A = [0, 2] \times [0, 4]$  e  $g(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \leq y \leq 2x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ .

**Solução:**  $-\frac{4}{3}$

## 6 Equações Diferenciais e de Diferenças

### 6.1 Equações Diferenciais

6.1. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais de variáveis separáveis

$$\begin{array}{lll} a) y' = xy - x & b) dx e^y = dy(x+1) - dx & c) \frac{dy}{dx} + \frac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0 \\ d) \sqrt{1-x^2} dy - \sqrt{1-y^2} dx = 0 & e) e^{x^4} yy' = x^3(9+y^4) & f) e^y(4+x^2)y' = x(2+e^y) \\ g) e^{3x} dy + (4+y^2) dx = 0 & h) 4xe^y dx + (x^4+4) dy = 0 \end{array}$$

**Solução:** a)  $y(x) = 1 + e^{\frac{1}{2}x^2} C$  b)  $\ln(e^{y(x)} + 1) - y(x) + \ln(x+1) = C$  c)  $\frac{1}{3} \ln|1+y^3| + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = C$  d)  $\arcsin(y(x)) - \arcsin x = C$  e)  $\frac{1}{6} \arctan\left(\frac{1}{3}y^2(x)\right) + \frac{1}{4}e^{-x^4} = C$  f)  $\ln(2+e^{y(x)}) - \frac{1}{2} \ln(4+x^2) = C$  g)  $\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}y(x)\right) - \frac{1}{3}e^{-3x} = C$  h)  $-e^{-y(x)} + \arctan \frac{1}{2}x^2 = C$

6.2. Resolva os seguintes problemas de valor inicial

$$\begin{array}{ll} a) y' + 4y = 0, \quad y(0) = 6 & b) \frac{dy}{dt} + y \sin t = 0, \quad y(\pi/3) = 3/2 \\ c) (1+x^2)y' + y = 0, \quad y(1) = 1 & d) 2y' + 4xy = 4x, \quad y(0) = -2 \\ e) y' + y \sin x = \sin x \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{array}$$

**Solução:** a)  $y(x) = 6e^{-4x}$  b)  $y(t) = \frac{3}{2}e^{\cos t - \frac{1}{2}}$  c)  $y(x) = e^{\frac{\pi}{4} - \arctan(x)}$  d)  $y(x) = 1 - 3e^{-x^2}$  e)  $y(x) = \cos x + 1 - e^{\cos x}$ .

6.3. Mostre que qualquer equação diferencial ordinária linear de primeira ordem que seja homogênea, pode ser escrita como uma equação de variáveis separáveis.

6.4. Determine a solução geral das equações seguintes

$$\begin{array}{lll} a) y'' - 7y' + 12y = 0 & b) y'' + 4y = 0 & c) y'' - 4y' + 4y = 0 \\ d) y'' + 2y' + 10y = 0 & e) y'' + y' - 6y = 8 & f) y'' + 3y' + 2y = e^{5x} \\ g) y'' - y = \sin x & h) y'' - y = e^{-x} & i) y'' - 6y = 36(x-1) \\ j) y'' - 9y = 9x^2 & k) y'' + 3y' + 2y = \sin x & l) y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \\ m) y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x} \end{array}$$

**Solução:** a)  $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$  b)  $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$  c)  $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$  d)  $y(x) = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)e^{-x}$  e)  $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - \frac{4}{3}$  f)  $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{42} e^{5x}$  g)  $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - \frac{1}{2} \sin x$  h)  $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} x e^{-x}$  i)  $y(x) = C_1 e^{\sqrt{6}x} + C_2 e^{-\sqrt{6}x} - 6x + 6$  j)  $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - x^2 - \frac{2}{9}$  k)  $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x$  l)  $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + x e^{-x}$  m)  $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + 3x^2 e^{2x}$ .

**6.5.** Resolva os seguintes problemas de valor inicial

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = -1, y'(0) = 1 \end{cases} & \text{b)} \quad & \begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases} & \text{c)} \quad & \begin{cases} y'' + 2y' + y = x^2 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases} \\ \text{d)} \quad & \begin{cases} y'' + 4y = 4x + 1 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} & \text{e)} \quad & \begin{cases} 9y'' + y = 0 \\ y(\frac{3}{2}\pi) = 2, y'(\frac{3}{2}\pi) = 0 \end{cases} & \text{f)} \quad & \begin{cases} 2y'' - 4y' + 2y = 0 \\ y(0) = -1, y'(0) = 1 \end{cases} \\ \text{g)} \quad & \begin{cases} y'' - 2y' + 10y = 10x^2 \\ y(0) = 0, y'(0) = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

**Solução:** a)  $y(x) = -\frac{2}{3}e^{-2x} - \frac{1}{3}e^x$  b)  $y(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)e^{-x}$  c)  $y(x) = -(6+x)e^{-x} + x^2 - 4x + 6$  d)  $y(x) = \frac{2\pi+1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + x + \frac{1}{4}$  e)  $y(x) = 2 \sin(\frac{x}{3})$  f)  $y(x) = (-1+2x)e^x$  g)  $y(x) = e^x (\frac{3}{25} \cos 3x + \frac{62}{75} \sin 3x) + x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{25}$ .

**6.6.** Resolva os seguintes problemas de valores na fronteira

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases} & \text{b)} \quad & \begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases} & \text{c)} \quad & \begin{cases} y'' - 10y' + 25y = 50 \\ y(0) = 0, y(2) = 2. \end{cases} \\ \text{d)} \quad & \begin{cases} y'' - 8y' + 16y = 0 \\ y(0) = 1, y(1) = e^4. \end{cases} \end{aligned}$$

**Solução:** a)  $y(x) = (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2)e^{3x}$  b)  $y(x) = C \sin 2x$  c)  $y(x) = (-2+x)e^{5x} + 2$  d)  $y(x) = e^{4x}$ .

**6.7.** Sabendo que  $y = e^{2x}$  é solução da equação diferencial

$$y'' - \alpha y' + 10y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

determine  $\alpha$  e a solução geral da equação dada.

**Solução:**  $\alpha = 7$ ;  $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$ .

**6.8.** Sabendo que  $y(x) = xe^{2x}$  é solução da equação diferencial  $2y'' - \alpha y' + 8y = 0$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$ , resolva o problema de valores na fronteira  $\begin{cases} 2y'' - \alpha y' + 8y = 16 \\ y(0) = 1; y(1) = 2 \end{cases}$ .

**Solução:**  $y(x) = -e^{2x} + xe^{2x} + 2$ .

**6.9.** Resolva o seguinte problema com condições periódicas

$$\begin{cases} y'' + 4y = 4, \\ y(0) = y(\frac{\pi}{2}), y'(0) = y'(\frac{\pi}{2}) \end{cases}.$$

**Solução:**  $y(x) = 1$ .

**6.10.** Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

$$a) y' + y^2 \sin x = 0$$

$$b) yy' + x = 0$$

$$c) y'' - 2y' = 0$$

$$d) y'y - x(2y^2 + 1)e^{x^2} = 0$$

$$e) \frac{dy}{dx} \cos y = -x \frac{\sin y}{1+x^2}$$

$$f) y' + 6yx^5 - x^5 = 0$$

**Solução:** a)  $y^{-1}(x) = -\cos x + C$  b)  $y^2(x) = -x^2 + C$  c)  $y(x) = C_1 + C_2 e^{2x}$  d)  $\frac{1}{4} \ln(2y^2 + 1) - \frac{1}{2} e^{x^2} = C$   
e)  $\ln |\sin y| + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) = C$  f)  $y(x) = \frac{1}{6} + C e^{-x^6}$ .

**6.11.** Determine os valores de  $a$  e  $b$  para os quais  $e^{2x}$  e  $e^{-2x}$  são solução da equação diferencial  $y'' + ay' + by = 0$  e, para esses valores de  $a$  e  $b$ , indique a solução geral da equação dada.

**Solução:**  $a = 0$  e  $b = -4$ ;  $y_h(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$ .

## Aplicações de equações diferenciais

**6.12.** [Lei de crescimento da população segundo Malthus]

a) Deduza a trajectória da população,  $y(t)$ , sabendo que: i) em cada instante  $t$ , a taxa de crescimento da população,  $\frac{dy}{y}$ , é igual a  $r$  (com  $r > 0$ ); ii) no momento  $t = 0$  regista-se  $y_0$  (milhões de indivíduos).

b) Estime o valor da população portuguesa no ano 2000 supondo que no ano de 1994 (por hipótese  $t = 0$ ) se regista  $y = 10$  (milhões de indivíduos) e que  $r = 0.009$ .

c) Comente a hipótese malthusiana estudando  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ .



**Solução:**

a)  $y(t) = y_0 e^{rt}$ ; b)  $y(6) = 10 \times e^{0,009 \times 6}$ ; c)  $+\infty$  se  $r > 0$ .

**6.13.** [Lei do crescimento da população segundo Verhulst]

a) Deduza a trajectória da população,  $y(t)$ , sabendo que: i) em cada instante  $t$ , a taxa de crescimento da população,  $\frac{dy}{y dt}$ , é igual a  $r$  menos  $ay$  ( $r$ : taxa de crescimento natural;  $a$ : “taxa de emigração” ou “morte”; com  $r > 0$  e  $a > 0$ ); ii) no momento  $t = 0$  registam-se  $y_0$  (milhões de indivíduos).

b) Estime o valor da população portuguesa no ano 2000 supondo que no ano de 1994 (por hipótese  $t = 0$ ) se regista  $y = 10$  (milhões de indivíduos) e que  $r = 0.009$  e  $a = 0.0001$ .

c) Estude  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ .

**6.14.** [Modelo de Crescimento de Domar] Considere um modelo económico onde: i) a procura agregada da economia,  $y_d$ , varia ao longo do tempo de acordo com a equação  $\frac{dy_d}{dt} = \frac{dI}{dt} \frac{1}{s}$ , sendo  $I = I(t)$  o investimento e  $s$  a propensão marginal a poupar ( $1/s$  é o multiplicador keynesiano); ii) a capacidade produtiva ( $y_c = \rho K$  - note: a capacidade produtiva depende apenas do *stock* de capital) varia ao longo do tempo de acordo com a equação  $\frac{dy_c}{dt} = \rho \frac{dK}{dt}$ , sendo  $K = K(t)$  o *stock* de capital da economia (naturalmente  $\frac{dK}{dt} = I(t)$ ). Deduza a trajectória do investimento,  $I(t)$ , que satisfaz a condição de equilíbrio no modelo de Domar: variação da procura agregada = variação da capacidade produtiva.

**6.15.** Considere as seguintes funções, procura e oferta de um bem:  $Q_d = a - bP$ ;  $Q_s = -c + dP$ .

a) Determine a trajectória temporal do nível de preços  $P(t)$  sabendo que, em cada instante  $t$ , a taxa de variação de  $P(t)$  é proporcional ao excesso de procura, i.e.,  $\frac{dP}{dt} = \alpha(Q_d - Q_s)$  e que  $P(0) = P_0 \neq P_e = (a + c)/(b + d)$  (preço de equilíbrio).

b) Verifique em que condições  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = P_e$ .

## 6.2 Equações de Diferenças

**6.16.** Resolva através de sucessivas iterações as seguintes equações de 1.<sup>a</sup> ordem:

a)  $y_{t+1} = \alpha y_t, y_0 = \beta$

b)  $y_t = \alpha y_{t-1} + a, y_0 = \beta$

c)  $y_{t+n} = y_{t+n-1} - a, y_1 = y_0 (n \in \mathbb{N})$  d)  $\begin{cases} y_t = \alpha y_{t-1} + a, & t \leq t^* \\ y_t = \beta y_{t-1} + b, & t > t^* \end{cases} \quad y_0 = C$

**6.17.** Resolva as seguintes equações homogêneas de 1.<sup>a</sup> ordem:

a)  $y_t = \alpha y_{t-1}, y_0 = 10$  b)  $\Delta y_t = y_t(1 - \alpha), y_0 = \beta$

c)  $y_{t+1} + 3y_t = 0, y_0 = 4$  d)  $2y_{t+2} - y_{t+1} = 0, y_0 = 7$

e)  $y_{t-2} = 0.2y_{t-3}, y_0 = 1$

**Solução:**

a)  $y_t = 10\alpha^t$ ; b)  $y_t = \beta(2 - \alpha)^t$ ; c)  $y_t = 4(-3)^t$ ; d)  $y_t = 7(\frac{1}{2})^t$ ; e)  $y_t = (0.2)^t$ .

**6.18.** Resolva as seguintes equações não homogêneas de 1.<sup>a</sup> ordem:

a)  $y_t = \alpha y_{t-1} + 2$  b)  $\Delta y_t = y_t(1 - \alpha) + 2.4^t$

c)  $y_{t+1} + 3y_t = 4t^2$  d)  $y_{t+1} = y_t + 2t3^t$

e)  $y_{t-2} = 3y_{t-3} + 8t + 4^t$  f)  $\Delta y_t = y_t(1 - \alpha) + \alpha - 1$

g)  $y_t = 2y_{t-1} + 2^t$

**Solução:**

a) Se  $\alpha \neq 1, y_t = C\alpha^t + \frac{2}{1-\alpha}$ ; se  $\alpha = 1, y_t = C + 2t$  b) Se  $\alpha \neq -2, y_t = C(2 - \alpha)^t + \frac{2}{2+\alpha}4^t$ ; se  $\alpha = -2, y_t = C4^t + \frac{1}{2}t4^t$  c)  $y_t = C(-3)^t + t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}$ ; d)  $y_t = C + (t - \frac{3}{2})3^t$ ; e)  $y_t = C3^t - 14 - 4t + 4^{t+3}$ ; f) Se  $\alpha \neq 1, y_t = C(2 - \alpha)^t + 1$ ; se  $\alpha = 1, y_t = C(2 - \alpha)^t$  g)  $y_t = C2^t + t2^t$ .

**6.19.** Resolva as seguintes equações homogêneas de 2.<sup>a</sup> ordem:

a)  $y_t + \frac{1}{2}y_{t-1} - \frac{1}{2}y_{t-2} = 0$ , sabendo que a solução passa nos pontos (0,1) e (1,1)

b)  $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 0$ ,  $y(0) = 1, y(1) = 2$ ; c)  $y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{1}{2}y_t = 0$

d)  $\Delta^2 y_t = 0$

**Solução:**

a)  $y_t = -\frac{1}{3}(-1)^t + \frac{4}{3}(\frac{1}{2})^t$ ; b)  $y_t = 2^t$ ; c)  $y_t = (\frac{\sqrt{2}}{2})^t(C_1 \cos \frac{\pi}{4}t + C_2 \sin \frac{\pi}{4}t)$ , d)  $y_t = C_1 + C_2t$ .

**6.20.** Resolva as seguintes equações não homogêneas de 2.<sup>a</sup> ordem:

a)  $y_t + \frac{1}{2}y_{t-1} - \frac{1}{2}y_{t-2} = 1$  b)  $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 2^t$  c)  $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = t$

d)  $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = t + 2^t$  e)  $y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{1}{2}y_t = t^2$  f)  $\Delta^2 y_t = t + e^t$

**Solução:**

a)  $y_t = C_1(\frac{1}{2})^t + C_2(-1)^t + 1$ ; b)  $y_t = (C_1 + C_2t)2^t + t^22^{t-3}$ ; c)  $y_t = (C_1 + C_2t)2^t + t + 2$  d)  $y_t = (C_1 + C_2t)2^t + t^22^{t-3} + t + 2$  e)  $y_t = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t (C_1 \cos \frac{\pi}{4}t + C_2 \sin \frac{\pi}{4}t) + 2t^2 - 8t + 4$ ; f)  $y_t = C_1 + C_2t + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{e^2 - 2e + 1}e^t$ .

**6.21.** Resolva as seguintes equações de diferenças:

a)  $2y_t - y_{t-1} - y_{t-2} = 0$  b)  $y_{t+5} - 4y_{t+4} + 4y_{t+3} = 12(3^t)$  c)  $2y_{t+1} - 3y_t + y_{t-1} = 3$

d)  $y_{t+3} - 2y_{t+2} + y_{t+1} = 4$  e)  $3y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 5(-1)^t$

**Solução:** a)  $y_t = C_1 + C_2(-\frac{1}{2})^t$ , b)  $y_t = (C_1 + C_2t)2^t + 4(3^{t-2})$ , c)  $y_t = C_1 + C_2(\frac{1}{2})^t + 3t$ , d)  $y_t = C_1 + C_2t + 2t^2$ , e)  $y_t = C_1(-1)^t + C_2(\frac{2}{3})^t + t(-1)^t$

**Aplicações de equações de diferenças finitas**

**6.22.** [Modelo de mercado agrícola com expectativas de preços] Considere o seguinte modelo

$$\begin{cases} Q_{st} = -\gamma + \delta P_t^* \\ Q_{dt} = \alpha - \beta P_t \\ Q_{st} = Q_{dt} \end{cases}$$

onde  $Q_{st}$ ,  $Q_{dt}$  e  $P_t$  são, respectivamente, as funções de oferta e de procura de um bem (agrícola) e o preço desse bem, e  $P_t^*$  a expectativa de preço formada pelos produtores no período  $t - 1$  relativamente ao período  $t$ . Deduza e comente o comportamento da trajectória do preço  $P_t$  admitindo que:

a)  $P_t^* = P_{t-1}$  (expectativa *naïve*); b)  $P_t^* = P_{t-1}^* + \eta(P_{t-1} - P_{t-1}^*)$  (expectativa adaptativa).

**6.23.** [Modelo de interacção do multiplicador e acelerador de Samuelson] Considere o seguinte modelo económico:

$$\begin{cases} y_t = C_t + I_t + G_0 \\ C_t = \gamma y_{t-1} \\ I_t = \alpha(C_t - C_{t-1}) \end{cases}$$

onde  $y$  representa o rendimento,  $C$  o consumo,  $I$  o investimento,  $G_0$  os gastos do governo (supostos exógenos ao modelo),  $\gamma$  a propensão marginal a consumir ( $0 < \gamma < 1$ ) e  $\alpha$  o coeficiente de aceleração ( $\alpha > 0$ ).

- a) Deduza a equação do rendimento  $y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} = G_0$ , identificando os parâmetros  $a_1$  e  $a_2$ .
- b) Determine  $\bar{y}_t$ .
- c) Mostre que a solução não pode exibir um comportamento oscilatório quando as raízes da equação característica são reais.
- d) Mostre que a solução é convergente quando  $\alpha\delta < 1$ .
- e) Determine a trajectória temporal do rendimento nos seguintes cenários: (i)  $\alpha = 3.5$ ,  $\gamma = 0.8$ , (ii)  $\alpha = 2$ ,  $\gamma = 0.7$ ; (iii)  $\alpha = 0.2$ ,  $\gamma = 0.9$ ; (iv)  $\alpha = 1.5$ ,  $\gamma = 0.6$ .