Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

MATEMÁTICA II

Época Normal - 7 de Junho de 2013 - Duração: 2 horas

NOME ____

Número__________ Curso______________________

Grupo I

Escolha múltipla. Cotações: cada resposta certa $+1.5$; cada resposta errada -0.5, cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota**: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Assinale a resposta certa pondo X sobre a alínea respetiva.

1. Considere a forma quadrática $Q(x, y, z) = -2x^2 - 5y^2 + 44yz - z^2$. Então

(A) Q é definida positiva

(B) Q é definida negativa

(C) Q é indefinida

(D) Q é semi-definida positiva .

2. Considere a função $f(x, y) = \dfrac{\ln(x + y - 2)}{1 - e^{(x^2+y^2-4)}}$ e represente-se por D_f o respetivo domínio. Então

(A) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 - x < y \ \wedge \ x^2 + y^2 \neq 4\}$ e D_f é aberto

(B) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 - x < y \ \wedge \ x^2 + y^2 \leq 4\}$ e D_f não é aberto nem fechado

(C) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 - x < y\}$ e D_f é aberto

(D) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 - x \leq y \ \wedge \ x^2 + y^2 \geq 2\}$ e D_f é fechado.

3. Sabendo que a função $f(x, y, z) = x^8y^\alpha z^\beta + 6xy^{2\alpha}z^{3\beta} + 3x^2y^5z^6$ é homogénea, então

(A) $\alpha = 2$, $\beta = 4$

(B) $\alpha = 4$, $\beta = 2$

(C) $\alpha = 3$, $\beta = 2$

(D) $\alpha = 5$, $\beta = 2$.

4. Sabendo que $A = (-2, -1)$ é ponto crítico da função $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ tem-se

(A) todas as restantes afirmações são falsas

(B) A é maximizante local de f

(C) A é ponto sela de f

(D) A é minimizante local de f.

5. Considere a função $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 6y$. Então calculando a derivada de f no ponto $(0, 1)$ segundo o vector $(1, -1)$ tem-se

(A) $\partial f_{(1,-1)}(0, 1) = -12$

(B) $\partial f_{(1,-1)}(0, 1) = 0$

(C) $\partial f_{(1,-1)}(0, 1) = 24$

(D) $\partial f_{(1,-1)}(0, 1) = -6$.

Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior de Economia e Gestão

- Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão -

MATEMÁTICA II (D)

Época Normal - 7 de Junho de 2013 - Duração: 2 horas

NOME ____

Número__________ Curso____________________

Grupo I

Escolha múltipla. Cotações: cada resposta certa $+1.5$; cada resposta errada -0.5, cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Assinale a resposta certa pondo X sobre a alínea respetiva.

1. Considere a forma quadrática $Q(x,y,z) = -2x^2 + 6y^2 - 4yz + z^2$. Então

   (A) Q é definida positiva

   (B) Q é definida negativa

   (C) Q é indefinida

   (D) Q é semi-definida positiva .

2. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y-1}}{1+\ln^2(x^2+y^2-2)}$ e represente-se por D_f o respetivo domínio. Então

   (A) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-x < y \ \wedge \ x^2+y^2 \neq 2\}$ e D_f é aberto

   (B) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-x \leq y \ \wedge \ x^2+y^2 \geq 2\}$ e D_f é fechado

   (C) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-x \leq y\}$ e D_f é fechado

   (D) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-x \leq y \ \wedge \ x^2+y^2 > 2\}$ e D_f não é aberto nem fechado.

3. Sabendo que a função $f(x,y,z) = x^6y^\alpha z^\beta + x^2y^\alpha z^{3\beta} + 3x^5y^3z^4$ é homogénea, então

   (A) $\alpha = 2$, $\beta = 4$

   (B) $\alpha = 4$, $\beta = 2$

   (C) $\alpha = 3$, $\beta = 2$

   (D) $\alpha = 5$, $\beta = 2$.

4. Sabendo que $A = (2,1)$ é ponto crítico da função $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ tem-se

   (A) A é minimizante local de f

   (B) A é maximizante local de f

   (C) A é ponto sela de f

   (D) todas as restantes afirmações são falsas.

5. Considere a função $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. Então calculando a derivada de f no ponto $(0,1)$ segundo o vector $(1,-1)$ tem-se

   (A) $\partial f_{(1,-1)}(0,1) = 0$

   (B) $\partial f_{(1,-1)}(0,1) = 12$

   (C) $\partial f_{(1,-1)}(0,1) = 24$

   (D) $\partial f_{(1,-1)}(0,1) = -12$.

Universidade Técnica de Lisboa

- Instituto Superior de Economia e Gestão -

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

MATEMÁTICA II

Época Normal - 7 de Junho de 2013 - Duração: 2 horas

NOME ____

Número__________ Curso____________________

Grupo I

Escolha múltipla. Cotações: cada resposta certa $+1.5$; cada resposta errada -0.5, cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Assinale a resposta certa pondo X sobre a alínea respetiva.

1. Considere a forma quadrática $Q(x,y,z) = -2x^2 - 5y^2 + 4yz - z^2$. Então
   - **(A)** Q é definida positiva
   - **(B)** Q é semi-definida positiva
   - **(C)** Q é indefinida
   - **(D)** Q é definida negativa.

2. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2+y^2-9)}{1+\sqrt{x+y-2}}$ e represente-se por D_f o respetivo domínio. Então
   - **(A)** $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2-x < y \ \wedge \ x^2+y^2 \neq 9\}$ e D_f é aberto
   - **(B)** $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2-x \leq y \ \wedge \ x^2+y^2 > 9\}$ e D_f não é aberto nem fechado
   - **(C)** $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2-x < y\}$ e D_f é aberto
   - **(D)** $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2-x \leq y \ \wedge \ x^2+y^2 \geq 9\}$ e D_f é fechado.

3. Sabendo que a função $f(x,y,z) = x^{12}y^{\alpha}z^{\beta} + x^2y^{2\alpha}z^{3\beta} + 3x^6y^4z^8$ é homogénea, então
   - **(A)** $\alpha = 2$, $\beta = 4$
   - **(B)** $\alpha = 4$, $\beta = 2$
   - **(C)** $\alpha = 3$, $\beta = 2$
   - **(D)** $\alpha = 5$, $\beta = 2$.

4. Sabendo que $A = (1,2)$ é ponto crítico da função $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ tem-se
   - **(A)** A é minimizante local de f
   - **(B)** A é maximizante local de f
   - **(C)** A é ponto sela de f
   - **(D)** todas as restantes afirmações são falsas.

5. Considere a função $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. Então calculando a derivada de f no ponto $(0,1)$ segundo o vector $(-1,0)$ tem-se
   - **(A)** $\partial f_{(-1,0)}(0,1) = -12$
   - **(B)** $\partial f_{(-1,0)}(0,1) = 12$
   - **(C)** $\partial f_{(-1,0)}(0,1) = 0$
   - **(D)** $\partial f_{(-1,0)}(0,1) = 24$.

- Universidade Técnica de Lisboa -

Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

MATEMÁTICA II

Época Normal - 7 de Junho de 2013 - **Duração: 2 horas**

NOME ____

Número__________ Curso____________________

Grupo I

Escolha múltipla. Cotações: cada resposta certa $+1.5$; cada resposta errada -0.5, cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Assinale a resposta certa pondo X sobre a alínea respetiva.

1. Considere a forma quadrática $Q(x, y, z) = x^2 + 6y^2 - 4yz + z^2$. Então

   (A) Q é definida positiva

   (B) Q é definida negativa

   (C) Q é indefinida

   (D) Q é semi-definida positiva .

2. Considere a função $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x+y-1}}{\ln(x^2+y^2+2)}$ e represente-se por D_f o respetivo domínio. Então

   (A) $D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x < y \ \wedge \ x^2 + y^2 \neq 2\right\}$ e D_f é aberto

   (B) $D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x \leq y \ \wedge \ x^2 + y^2 > 2\right\}$ e D_f não é aberto nem fechado

   (C) $D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x \leq y\right\}$ e D_f é fechado

   (D) $D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x \leq y \ \wedge \ x^2 + y^2 \geq 2\right\}$ e D_f é fechado.

3. Sabendo que a função $f(x, y, z) = x^8y^\alpha z^\beta + 6x^3y^{2\alpha}z^\beta + 3x^5y^5z^5$ é homogénea, então

   (A) $\alpha = 2$, $\beta = 4$

   (B) $\alpha = 4$, $\beta = 2$

   (C) $\alpha = 3$, $\beta = 2$

   (D) $\alpha = 5$, $\beta = 2$.

4. Sabendo que $A = (-1, -2)$ é ponto crítico da função $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ tem-se

   (A) A é minimizante local de f

   (B) A é maximizante local de f

   (C) A é ponto sela de f

   (D) todas as restantes afirmações são falsas.

5. Considere a função $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. Então calculando a derivada de f no ponto $(0, 1)$ segundo o vector $(-1, -1)$ tem-se

   (A) $\partial f_{(-1,-1)}(0, 1) = -12$

   (B) $\partial f_{(-1,-1)}(0, 1) = 0$

   (C) $\partial f_{(-1,-1)}(0, 1) = 24$

   (D) $\partial f_{(-1,-1)}(0, 1) = 12$.

Grupo II

(Cotação: 4.5 (=1.5+1.5+1.5); 2.0; 3.5(=2.0+1.5); 2.5)

Apresente os cálculos que efetuar e justifique cuidadosamente a resolução das questões seguintes.

1. Considere a função $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - y$.

   (a) Determine o máximo e mínimo (absolutos) da função f no domínio
   $$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

   (b) Estude a existência de limite da função $g(x,y) = \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ no ponto $(0,0)$.

   (c) Sabendo que $x = \sin u$ e $y = \phi(u,v)$, onde ϕ é uma função diferenciável, determine $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

2. Calcule $\int\int_A xy^2 e^{-x^2}\, dx\, dy$, no domínio $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x < +\infty \wedge 0 \leq y \leq 4\}$.

3. Determine

   (a) a solução da equação diferencial
   $$y''(x) + 8y'(x) + 16y(x) = 32$$

que satisfaz as condições $y(0) = 3$ e $y(1) = 2$,

   (b) a solução geral da equação
   $$y'y = \frac{y^2+1}{(x+1)^2}.$$

4. Seja $\phi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ uma função que se anula na recta $y = 0$ e tal que $\dfrac{|\phi(x,y)|}{\sqrt{|y|}}$ é limitada. Considere a função $f(x,y) = x\phi(x,y)$.

   (a) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

   (b) Prove que $f(x,y)$ é diferenciável em $(0,0)$.

   Obs: Note que nada sabe sobre a diferenciabilidade da função ϕ.