

Grupo II

1. a) Temos $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$ sujeita à condição $x^2 + y^2 = 1$, a qual define a equação de uma circunferência de centro em $(0, 0)$ e de raio 1. Estamos nas condições do teorema de Weierstrass, já que por um lado a função f é uma função contínua em $\mathbb{R}^2$ (aliás $f \in C^\infty$) e por outro lado a restrição $x^2 + y^2 = 1$ define um conjunto compacto (limitado e fechado); e portanto, f admite necessariamente um máximo e um mínimo absolutos.

Construindo a função Lagrangeana,

$$L(x, y, \lambda) = 2x^2 + y^2 - y + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

obtem-se a partir dela o sistema:

$$\begin{cases} L'_x = 4x + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 2y - 1 + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

cujas soluções se apresentam seguidamente:

$$\begin{cases} 2x(2 + \lambda) = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 1 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = -2 \\ y = -1/2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

- Se $x = 0$, temos $y = \pm 1$ e portanto os pontos críticos são:

$$A = (0, 1)_{\lambda = -\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad B = (0, -1)_{\lambda = -\frac{3}{2}}$$

- Se $\lambda = -2$, temos $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, e portanto os pontos críticos são:

$$C = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) \quad \text{e} \quad D = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Como,

$$f(0, 1) = 0$$

$$f(0, -1) = 2$$

$$f(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = f(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$$

conclui-se que 0 e $\frac{9}{4}$ são respectivamente o mínimo e o máximo absolutos de f .

1.b) Verifica-se facilmente que:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} g(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0} \quad (\text{indeterminação}).$$

Fazendo uma aproximação ao ponto $(0, 0)$, através de caminhos curvos de equação $y = kx^2$, obtém-se:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ y = kx^2}} \frac{2x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + (kx^2)^2 - kx^2}{x^2 + (kx^2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + k^2x^4 - kx^2}{x^2 + k^2x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(2 + k^2x^2 - k)}{x^2(1 + k^2x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + k^2x^2 - k}{1 + k^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 - k) = \\ &= 2 - k\end{aligned}$$

Conclui-se que o limite não existe, já que depende dos valores particulares de k real.

1.c) Calculando, respectivamente $\frac{\partial f}{\partial u}$ e $\frac{\partial f}{\partial v}$, obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{du} = \\ &= 4x \cos u + (2y - 1) \frac{\partial \phi(u, v)}{\partial u} = \\ &= 4 \sin u \cos u + (2\phi(u, v) - 1) \frac{\partial \phi(u, v)}{\partial u}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dv} = \\ &= (2y - 1) \frac{\partial \phi(u, v)}{\partial v} = \\ &= (2\phi(u, v) - 1) \frac{\partial \phi(u, v)}{\partial v}\end{aligned}$$

2. A forma como está definido o conjunto A , permite-nos escrever de imediato,

$$\begin{aligned}\iint_A xy^2 e^{-x^2} dx dy &= \int_0^4 \left(\int_0^{+\infty} xy^2 e^{-x^2} dx \right) dy = \int_0^4 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_0^b xy^2 e^{-x^2} dx \right) dy = \\ &= \int_0^4 y^2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_0^b x e^{-x^2} dx \right) dy = \int_0^4 y^2 \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^b \right) dy = \\ &= \int_0^4 y^2 \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-b^2} + \frac{1}{2} \right] \right) dy = \int_0^4 \frac{1}{2} y^2 dy = \left[\frac{1}{6} y^3 \right]_0^4 = \\ &= \frac{32}{3}\end{aligned}$$

Se optássemos por trocar a ordem de integração, o resultado seria o mesmo; com efeito,

$$\begin{aligned}\iint_A xy^2 e^{-x^2} dx dy &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^4 xy^2 e^{-x^2} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \left(\int_0^4 y^2 dy \right) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^4 dx = \int_0^{+\infty} \frac{64}{3} xe^{-x^2} dx = \\ &= \frac{64}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^b = \frac{64}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-b^2} + \frac{1}{2} \right] = \\ &= \frac{32}{3}\end{aligned}$$

3. a) Determina-se a solução da equação homogénea associada: $y''(x) + 8'(x) + 16y = 0$.

Faz-se $P(D) = 0 \Leftrightarrow D^2 + 8D + 16 = 0$, obtendo-se: $D = -4$ (multiplicidade algébrica 2).

A solução geral da equação homogénea é dada por $y_h(x) = (A + Bx)e^{-4x}$, $\forall A, B \in \mathbb{R}$.

Determina-se uma solução particular da equação não homogénea: $y_p(x) = k$.

Substituindo em $y''(x) + 8'(x) + 16y = 32$, vem: $16k = 32 \Leftrightarrow k = 2$, e portanto $y_p(x) = 2$.

A solução geral da equação é: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ ou seja:

$$y(x) = (A + Bx)e^{-4x} + 2, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}.$$

Cálculo das constantes A e B:

$$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + 2 = 3 \\ (A + B)e^{-4} + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Conclusão: A solução do problema de valores iniciais é: $y(x) = (1 - x)e^{-4x} + 2$.

3. b) Procedendo à separação das variáveis, obtém-se:

$$y'y = \frac{y^2 + 1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} \frac{y}{y^2 + 1} = \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{y}{y^2 + 1} dy = \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

Primitivando ambos os membros da igualdade, respectivamente em ordem a x e a y , obtém-se:

$$\int \frac{y}{y^2 + 1} dy = \int \frac{1}{(x+1)^2} dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int \frac{2y}{y^2 + 1} dy = \int (x+1)^{-2} dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) = -(x+1)^{-1} + c.$$

A solução geral da equação diferencial, na sua forma implícita, escreve-se:

$$\ln(y^2(x) + 1) = -\frac{2}{x+1} + c$$

4. a) Pela definição, temos que:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{t\phi(t,0)}^0 - 0\phi(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0-0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

e

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0\phi(0,t) - 0\phi(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0-0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

4. b) Temos que provar que $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \mathcal{E}(h,k) = 0$, com

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(h,k) &= \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} h - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ &= \frac{h\phi(h,k) - 0 \times \phi(0,0) - 0 \times h - 0 \times k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \\ &= \frac{h\phi(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \end{aligned}$$

Pelo teorema do enquadramento,

$$0 \leq |\mathcal{E}(h,k)| = \frac{|h||\phi(h,k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{\sqrt{h^2} |\phi(h,k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} |\phi(h,k)| = |\phi(h,k)| = \sqrt{|k|} \frac{|\phi(h,k)|}{\sqrt{|k|}} \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0$$

porque o produto de um infinitésimo $\left(\sqrt{|k|}\right)$ por uma função limitada $\left(\frac{\phi(h,k)}{\sqrt{|k|}}\right)$ é um infinitésimo.