Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

MATEMÁTICA II (A2)

Época de Recurso - 1 de Julho de 2013 - Duração: 2 horas

NOME ____

Número______________ Curso______________________________

Grupo I

Escolha múltipla. Cotações: cada resposta certa $+1.5$; cada resposta errada -0.5, cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota**: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Assinale a resposta certa pondo X sobre a alínea respetiva.

1. Sabendo que é 8 a soma dos valores próprios da matriz simétrica A associada à forma quadrática $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + k^2z^2 - 2xy$, onde $k \in \mathbb{R}$, pode concluir-se que

(A) Q é definida negativa e $k \in \{-2, 2\}$

(B) Q é definida positiva e $k \in \{-2, 2\}$

(C) Q é indefinida e $k = 4$

(D) Q é semi-definida positiva e $k \in \{-4, 4\}$.

2. Represente-se por D_f o domínio da função $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{1 - e^{y+2}}}{\ln(9 - x^2 - y^2)}$. Então

(A) $D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -2 \wedge x^2 + y^2 < 9 \wedge x^2 + y^2 \neq 8\right\}$ e D_f não é aberto nem fechado

(B) $D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -2 \wedge x^2 + y^2 < 9 \wedge x^2 + y^2 \neq 8\right\}$ e D_f é aberto

(C) $D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9 \wedge y \leq -2\right\}$ e D_f não é aberto nem fechado

(D) $D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9 \wedge y < -2\right\}$ e D_f é aberto.

3. Determine o número real k, sabendo que é contínua em $\mathbb{R}^2$ a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 4\cos(\pi - xy) + \frac{x^3 y \sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0). \\ 4 - k \quad \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(A) $k = 4$

(B) $k = 0$

(C) $k = 8$

(D) $k = -4$.

4. Se $f(x, y, z)$ for uma função diferenciável, homogénea e tal que $\nabla f(4, 0, 2) = (0, 5, 3)$ e $f(4, 0, 2) = 3$,

(A) o grau de homogeneidade de f é 6

(B) o grau de homogeneidade de f é 3

(C) o grau de homogeneidade de f é 4

(D) o grau de homogeneidade de f é 2.

5. Designando por $y^*(x)$ a solução da equação diferencial linear de 1^a ordem $\quad y' + 3x^2y = 6x^2 \quad$ que satisfaz $y^*(0) = 4$, diga qual é o valor $y^*(1)$

(A) $y^*(1) = 2 + \frac{2}{e}$

(B) $y^*(1) = 4$

(C) $y^*(1) = 2 + \frac{4}{e}$

(D) $y^*(1) = 2 + \frac{6}{e}$.

Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

MATEMÁTICA II (B2)

Época de Recurso - 1 de Julho de 2013 - Duração: 2 horas

NOME ____

Número____________ Curso__________________________

Grupo I

Escolha múltipla. **Cotações:** cada resposta certa +1.5; cada resposta errada −0.5, cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota**: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Assinale a resposta certa pondo X sobre a alínea respetiva.

1. Sabendo que é 0 a soma dos valores próprios da matriz simétrica A associada à forma quadrática $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - k^2z^2 - 2xy$, onde $k \in \mathbb{R}$, pode concluir-se que

(A) Q é indefinida e $k \in \{-2, 2\}$

(B) Q é definida negativa e $k \in \{-2, 2\}$

(C) Q é indefinida e $k \in \{-4, 4\}$

(D) Q é semi-definida positiva e $k \in \{-4, 4\}$.

2. Represente-se por D_f o domínio da função $f(x, y) = \dfrac{2}{\sqrt{1 - e^{y+2}}\ln(9 - x^2 - y^2)}$. Então

(A) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9 \wedge y \leq -2\}$ e D_f não é aberto nem fechado

(B) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -2 \wedge x^2 + y^2 < 9 \wedge x^2 + y^2 \neq 8\}$ e D_f não é aberto nem fechado

(C) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -2 \wedge x^2 + y^2 < 9 \wedge x^2 + y^2 \neq 8\}$ e D_f é aberto

(D) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -2 \wedge x^2 + y^2 < 9\}$ e D_f é aberto.

3. Determine o valor do número real k, sabendo que é contínua em $\mathbb{R}^2$ a função

$$f(x, y) = \begin{cases} 6\cos(\pi - xy) + \frac{x^3 y \sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0). \\ 4 - k \quad \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(A) $k = -10$

(B) $k = 6$

(C) $k = 4$

(D) $k = 10$.

4. Se $f(x, y, z)$ for uma função diferenciável, homogénea e tal que $\nabla f(4, 0, 2) = (0, 5, 3)$ e $f(4, 0, 2) = 2$,

(A) o grau de homogeneidade de f é 3

(B) o grau de homogeneidade de f é 2

(C) o grau de homogeneidade de f é 4

(D) o grau de homogeneidade de f é 6.

5. Designando por $y^*(x)$ a solução da equação diferencial linear de 1^a ordem $y' + 3x^2y = 6x^2$ que satisfaz $y^*(0) = 10$, diga qual é o valor $y^*(1)$

(A) $y^*(1) = 6$

(B) $y^*(1) = 2 + \frac{8}{e}$

(C) $y^*(1) = 2 + \frac{4}{e}$

(D) $y^*(1) = 2 + 8e$.

Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

MATEMÁTICA II (C2)

Época de Recurso - 1 de Julho de 2013 - Duração: 2 horas

NOME ____

Número_____________ Curso__________________________

Grupo I

Escolha múltipla. **Cotações:** cada resposta certa $+1.5$; cada resposta errada -0.5, cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota**: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Assinale a resposta certa pondo X sobre a alínea respetiva.

1. Sabendo que é 13 a soma dos valores próprios da matriz simétrica A associada à forma quadrática $Q(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + k^2z^2 - 2xy$, onde $k \in \mathbb{R}$, pode concluir-se que

(A) Q é indefinida e $k \in \{-3, 3\}$

(B) Q é definida positiva e $k = 9$

(C) Q é definida positiva e $k \in \{-3, 3\}$

(D) Q é definida positiva e $k \in \{-2, 2\}$.

2. Represente-se por D_f o domínio da função $f(x,y) = \dfrac{\ln(9 - x^2 - y^2)}{(x^2-1)\sqrt{1 - e^{y+2}}}$. Então

(A) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9 \wedge y \leq -2\right\}$ e D_f não é aberto nem fechado

(B) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9 \wedge y \leq -2 \wedge x \neq \pm 1\right\}$ e D_f é fechado

(C) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9 \wedge y \leq -2 \wedge x^2 + y^2 \neq 8 \wedge x \neq \pm 1\right\}$ e D_f não é aberto nem fechado

(D) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9 \wedge y < -2 \wedge x \neq \pm 1\right\}$ e D_f é aberto.

3. Determine o valor do número real k, sabendo que é contínua em $\mathbb{R}^2$ a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 8\cos(\pi - xy) + \frac{x^3 y \sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0). \\ 4 - k \quad \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(A) $k = 12$

(B) $k = 6$

(C) $k = 10$

(D) $k = -10$.

4. Se $f(x,y,z)$ for uma função diferenciável, homogénea e tal que $\nabla f(4,0,2) = (0,5,6)$ e $f(4,0,2) = 3$,

(A) o grau de homogeneidade de f é 2

(B) o grau de homogeneidade de f é 4

(C) o grau de homogeneidade de f é 3

(D) o grau de homogeneidade de f é 6.

5. Designando por $y^*(x)$ a solução da equação diferencial linear de 1^a ordem $y' + 3x^2y = 6x^2$ que satisfaz $y^*(0) = 6$, diga qual é o valor $y^*(1)$

(A) $y^*(1) = 2 + \frac{4}{e}$

(B) $y^*(1) = 2 + 4e$

(C) $y^*(1) = 2 + \frac{6}{e}$

(D) $y^*(1) = 2 + 6e$.

Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

MATEMÁTICA II (D2)

Época de Recurso - 1 de Julho de 2013 - Duração: 2 horas

NOME ____

Número______________ Curso____________________________

Grupo I

Escolha múltipla. Cotações: cada resposta certa +1.5; cada resposta errada −0.5, cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota**: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

Assinale a resposta certa pondo X sobre a alínea respetiva.

1. Sabendo que é -5 a soma dos valores próprios da matriz simétrica A associada à forma quadrática $Q(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - k^2z^2 - 2xy$, onde $k \in \mathbb{R}$, pode concluir-se que

(A) Q é indefinida e $k \in \{-3, 3\}$
(B) Q é definida positiva e $k = 9$
(C) Q é indefinida e $k \in \{-5, 5\}$
(D) Q é semi-definida negativa e $k \in \{-3, 3\}$.

2. Represente-se por D_f o domínio da função $f(x,y) = \dfrac{\ln(16 - x^2 - y^2)}{(x^2-4)\sqrt{1-e^{y+3}}}$. Então

(A) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 16 \wedge y < -3 \wedge x \neq \pm 2\right\}$ e D_f é aberto
(B) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 16 \wedge y \leq -3 \wedge x \neq \pm 2\right\}$ e D_f é fechado
(C) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 16 \wedge y < -3 \wedge x \neq \pm 2\right\}$ e D_f não é aberto nem fechado
(D) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 16 \wedge y \leq -3 \wedge x \neq \pm 4\right\}$ e D_f não é aberto nem fechado. .

3. Determine o valor do número real k, sabendo que é contínua em $\mathbb{R}^2$ a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\cos(\pi - xy) + \frac{x^3 y \sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0). \\ 4 - k \quad \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(A) $k = 6$
(B) $k = 10$
(C) $k = 12$
(D) $k = -6$.

4. Se $f(x,y,z)$ for uma função diferenciável, homogénea e tal que $\nabla f(4,0,2) = (0,5,6)$ e $f(4,0,2) = 2$,

(A) o grau de homogeneidade de f é 3
(B) o grau de homogeneidade de f é 2
(C) o grau de homogeneidade de f é 6
(D) o grau de homogeneidade de f é 4.

5. Designando por $y^*(x)$ a solução da equação diferencial linear de 1^a ordem $\quad y' + 3x^2y = 6x^2 \quad$ que satisfaz $y^*(0) = 8$, diga qual é o valor $y^*(-1)$

(A) $y^*(-1) = 2 + \frac{2}{e}$
(B) $y^*(-1) = 6e$
(C) $y^*(-1) = 2 + \frac{6}{e}$
(D) $y^*(-1) = 2 + 6e$.

Grupo II

(Cotação: 2.5; 2.5; 2.5; 2.5; 2.5)

Apresente os cálculos que efetuar e justifique cuidadosamente a resolução das questões seguintes.

1. Considere a função $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$.

(a) Determine os pontos críticos da função f.

(b) Classifique os pontos críticos de f seguintes: $A = (0,0)$ e $B = (1,1)$.

2. Determine os extremos absolutos de $f(x,y) = xy$ no conjunto $M = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

3. Calcule $\int\int_A xy\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy$, onde A é a região do primeiro quadrante de $\mathbf{R}^2$ limitada pela curva $x^2 + y^2 = 1$.

4. Determine a solução da equação diferencial

$$y''(x) - 11y'(x) + 30y(x) = 30x$$

que satisfaz as condições $y(0) = \frac{11}{30}$ e $y'(0) = 2$.

5. Sejam $g(x,y)$ e $\varphi(u,v)$ funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$ e $u(x,y)$ e $v(x,y)$ definidas por

$$\begin{aligned} u(x,y) &= xyg(x,y) \\ v(x,y) &= e^{y^2-x}. \end{aligned}$$

Sabendo que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(0,1) = 15$, calcule o valor de $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(0,e)$.