Matemática II, 2º semestre, 2012/2013

Tópicos de resolução do exame de 1 de Julho de 2013

1. (a) (x, y) é ponto crítico de $f \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ 4y^3 - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x(x^2-1) = 0 \\ 4y(y^2-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1 \\ y = 0 \vee y = 1 \vee y = -1 \end{cases}$

Assim, os pontos críticos de f são: $(0,0), (0,1), (0,-1), (1,0), (1,1), (1,-1), (-1,0), (-1,1)$ e $(-1,-1)$.

(b) $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{bmatrix}$

$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$; Como $\triangle_1 = -4 < 0$ e $\triangle_2 = 16 > 0$ temos que $H_f(0,0)$ é definida negativa e portanto $(0,0)$ é maximizante local de f;

$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$; Como $\triangle_1 = 8 > 0$ e $\triangle_2 = 64 > 0$ temos que $H_f(1,1)$ é definida positiva e portanto $(1,1)$ é minimizante local de f;

2. A lagrangeana para o problema é

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Assim, extremantes do problema têm que satisfazer

$$\begin{cases} y + 2\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2\lambda x \\ x(1 - 4\lambda^2) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

A segunda equação tem três soluções: $x = 0$, $\lambda = -\frac{1}{2}$, e $\lambda = \frac{1}{2}$.

$x = 0$ implica $y = 0$ (pela primeira equação), o que não satisfaz a terceira equação.

$\lambda = -\frac{1}{2}$ implica $y = -x$. Nesse caso, a última equação reduz-se a $2x^2 = 1$, ou seja, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\lambda = \frac{1}{2}$ implica $y = x$ e nesse caso, a última equação reduz-se também a $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Logo, o sistema tem 4 soluções: $(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(x_3, y_3) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $(x_4, y_4) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Dado que a função f é contínua e M é um conjunto limitado e fechado, existem pelo menos um máximo e um mínimo absolutos.

Dado que $f(x_1, y_1) = f(x_4, y_4) = \frac{1}{2}$ e $f(x_2, y_2) = f(x_3, y_3) = -\frac{1}{2}$, conclui-se que os pontos maximizantes são (x_1, y_1) e (x_4, y_4), e os pontos minimizantes são (x_2, y_2) e (x_3, y_3).

3. O conjunto A pode ser escrito como $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}\}$. Temos então

$\int\int_A xy\sqrt{1 - y^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\sqrt{1-y^2}dy\right) dx = \int_0^1 x \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-y^2)^{1/2}dy\right) dx =$

$\int_0^1 \frac{(-x)}{2} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (-2y)(1-y^2)^{1/2}dy\right) dx = \int_0^1 \frac{(-x)}{2} \left[\frac{(1-y^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{(-x)}{3} \left(x^3 - 1\right) dx =$

$\frac{1}{3}\left[\frac{-x^5}{5} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(\frac{-1}{5} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{10}.$

4. $y'' - 11y' + 30y = 30x$

i) $D^2 - 11D + 30 = 0 \Leftrightarrow D = 6$ ou $D = 5$; $y_h(x) = C_1e^{6x} + C_2e^{5x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

ii) $y_p(x) = ax + b$; $y_p'(x) = a$; $y_p''(x) = 0$

$y_p'' - 11y_p' + 30y_p = 30x \Leftrightarrow -11a + 30(ax + b) = 30x \Leftrightarrow 30ax - 11a + 30b = 30x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 30a = 30 \\ -11a + 30b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 11/30 \end{cases}$ Portanto $y_p(x) = x + 11/30$;

iii) $y_g(x) = C_1e^{6x} + C_2e^{5x} + x + 11/30$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

iv) $y_g'(x) = 6C_1e^{6x} + 5C_2e^{5x} + 1$;

$\begin{cases} y(0) = 11/30 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + 11/30 = 11/30 \\ 6C_1 + 5C_2 + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = -C_1 \\ C_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = -1 \\ C_1 = 1 \end{cases}$

R: $y(x) = e^{6x} - e^{5x} + x + 11/30$;

5. Dado que φ, u e v são funções diferenciáveis, a regra de derivação da função composta escreve-se

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y).$$

Em particular, tendo em conta que $(u,v)(0,1) = (0,e)$, temos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,1) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,e)\frac{\partial u}{\partial y}(0,1) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,e)\frac{\partial v}{\partial y}(0,1). \tag{1}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = xg(x,y) + xy\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 2ye^{y^2-x}.$$

Logo, a igualdade (1) reduz-se a

$$15 = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,e)2e,$$

ou seja, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(0,e) = \frac{15}{2e}$.