(1) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ é vetor pp da matriz A associado ao valor pp $\lambda = 3$

---

(2) $q(x,y,z) = [x \;\; y \;\; z]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -k/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$\Delta_1 = -1$

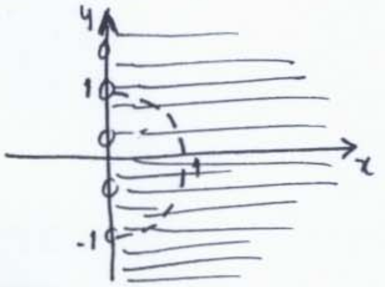
$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -k/2 \end{vmatrix} = 1-k$

Como $k>1$, $1-k<0$ e portanto $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$; $\therefore$ F.Q. Def. Negativa $\forall k > 1$

---

(3) a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge x^2+y^2-1 \neq 0\}$



b) $\cdot\, int(D_f) = D_f \Rightarrow D_f$ é aberto

$\cdot\, fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \cup$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1 \wedge x > 0\}$

---

(4) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{\frac{|t|}{|t|} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{\frac{|t|}{|t|} - 1}{t} = 0$

$$\varepsilon(h,k) = \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\frac{h^2k+|h|+|k|}{|h|+|k|} - 1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \frac{\frac{h^2k + \cancel{|h|} + \cancel{|k|} - \cancel{|h|} - \cancel{|k|}}{|h|+|k|}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^2k}{(|h|+|k|)\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$0 \leq |\varepsilon(h,k)| = \frac{h^2|k|}{(|h|+|k|)\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{h^2\cancel{(|h|+|k|)}}{\cancel{(|h|+|k|)}\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2}$$

Como $\lim_{(h,k)\to(0,0)} 0 = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}$, concluímos que $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$,

e portanto, f é diferenciável em $(0,0)$.

⑤ $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}6xy+3y^2+4=0\\[2mm] 3x^2+6xy=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-\\[2mm] 3x(x+2y)=0\end{array}\right\} x=0 \vee x=-2y$

Se $x=0$, $3y^2+4=0$ (impossível) $\Rightarrow x\neq 0 \Rightarrow x=-2y$

Sendo $x=-2y$, $6(-2y)y+3y^2+4=0 \Leftrightarrow -9y^2+4=0 \Leftrightarrow y=\pm\frac{2}{3}$

$\therefore$ Pontos críticos: $(4/3,-2/3)$, $(-4/3,2/3)$

• $H_f(x,y)=\begin{bmatrix}6y & 6x+6y\\ 6x+6y & 6x\end{bmatrix} \Rightarrow H_f(4/3,-2/3)=\begin{bmatrix}-4 & 4\\ 4 & 8\end{bmatrix}$ $\Delta_1=-4$, $\Delta_2=-48$ $\Rightarrow$ Hess indef $\Downarrow$ $(4/3,-2/3)$ pto sela

$\hookrightarrow H_f(-4/3,+2/3)=\begin{bmatrix}4 & -4\\ -4 & -8\end{bmatrix}$ $\Delta_1=4$, $\Delta_2=-48$ $\Rightarrow H_f(-4/3,2/3)$ indef $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(4/3,-2/3)$ tb é pto sela

---

⑥ $\mathcal{L}(x,y;\lambda)=e^{xy}+\lambda(x^2+y^2-2)$

$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}=0\\[2mm] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}ye^{xy}+2\lambda x=0\\ xe^{xy}+2\lambda y=0\\ x^2+y^2-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}e^{xy}=-\dfrac{2\lambda x}{y}\\[2mm] e^{xy}=-\dfrac{2\lambda y}{x}\\[2mm] -\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-\dfrac{2\lambda y}{x}=-\dfrac{2\lambda x}{y}\\[2mm] -\\[2mm] -\end{array}\right. \underset{(\lambda\neq 0)}{\Leftrightarrow}$

• 1ª eq $\Leftrightarrow x^2=y^2 \Leftrightarrow x=\pm y$

• $x^2=y^2 \underset{3^{a}\text{ eq}}{\Rightarrow} x=\pm 1 \underset{x=\pm y}{\Rightarrow} (1,1),(-1,-1),(-1,1)$ e $(1,-1)$ são os candidatos a extremantes absolutos de f em A.

6.(cont.)

- A é circunferência $\Rightarrow$ $int(A)=\emptyset$ $\Rightarrow$ $ad(A)=A$ $\Rightarrow$ A fechado $\Rightarrow$ A compacto
$fr(A)=A$ $\quad$ $A\subset B_r(0,0),\ r>\sqrt{2}$

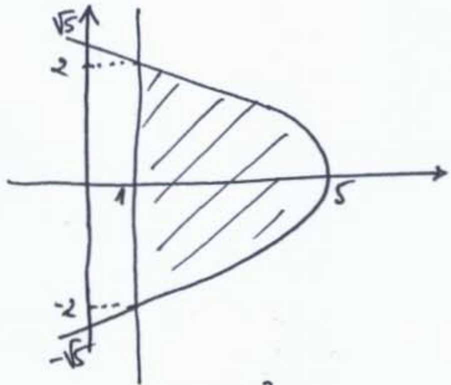
- f é contínua (em $\mathbb{R}^2$ e pttº em A) pq xy é contínua (polinomial), a exponencial é contínua e a composição de funções contínuas é contínua

- Assim, pelo T. Weierstrass, f tem máx e mín absolutos em A

Como $f(1,1)=e$, $f(-1,1)=e^{-1}$, $f(1,-1)=e^{-1}$, $f(-1,-1)=e$, $(1,1)$ e $(-1,-1)$ são maximizantes abs. de f em A e $(1,-1)$ e $(-1,1)$ são minimizantes abs. de f em A (o valor máximo abs de f em A é e, e o valor mín é $\frac{1}{e}$)

---

(7)



$\begin{cases} x=1 \\ x=5-y^2 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(1,2) \vee (x,y)=(1,-2)$

$\therefore \{(x,y): x\geq 1 \wedge x\leq 5-y^2\} =$

$=\{(x,y): 1\leq x\leq 5-y^2\} =$

$=\{(x,y): -2\leq y\leq 2 \wedge 1\leq x\leq 5-y^2\} = A$

$$\iint_A 1\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\left(\int_1^{5-y^2} 1\,dx\right)dy = \int_{-2}^{2} x\Big]_{x=1}^{x=5-y^2} dy = \int_{-2}^{2} 4-y^2\,dy = 4y-\frac{y^3}{3}\Big]_{y=-2}^{y=2} = 32/3$$

---

(8) • $D^2+4D+3=0 \Leftrightarrow D=-1 \vee D=-3 \Rightarrow y_h(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x},\ \forall C_1,C_2\in\mathbb{R}$

• 1ª sol. ensaio $y_p(x)=Axe^{-x}$ (não vale a pena ensaiar Ae^{-x} pq é sol. da homog.)

C. Aux:
$$\boxed{\begin{aligned} y_p' &= Ae^{-x}-Axe^{-x} \\ y_p'' &= -2Ae^{-x}+Axe^{-x} \end{aligned}}$$

$\Rightarrow y_p''+4y_p'+3y_p=8e^{-x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2Ae^{-x}+\cancel{Axe^{-x}}+4(Ae^{-x}-\cancel{Axe^{-x}})+3\cancel{Axe}=8e^{-x}$

$\Leftrightarrow 2Ae^{-x}=8e^{-x} \Leftrightarrow A=4 \Rightarrow y_p(x)=4xe^{-x}$

$\therefore$ A sol. geral da eq. dada é $y_g(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+4xe^{-x}$ $\quad \forall C_1,C_2\in\mathbb{R}$

$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1+C_2+0=1 \\ -C_1-3C_2+4(1+0(-1))=3 \end{cases} \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=0 \end{cases}$

R: $y(x)=e^{-x}+4xe^{-x}$

(9)

- Sendo $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 8x^3y$, primitivando em ordem a y obtemos

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^2 + a_1(x)$, onde $a_1(x)$ é uma fç arbitrária de x, de classe $C^1(\mathbb{R})$

- Primitivando agora $\frac{\partial f}{\partial x}$ como função de x, obtemos

$f(x,y) = x^4y^2 + A_1(x) + a_2(y)$, sendo

$A_1(x)$ uma fç arbitraria de x, de classe $C^2(\mathbb{R})$

$a_2(y)$ " " " " y, de classe $C^2(\mathbb{R})$.

- Analogamente,

$g(x,y) = x^4y^2 + B_1(x) + b_2(y)$, sendo

$B_1(x)$ uma função arbitraria de x, de classe $C^2(\mathbb{R})$

$b_2(y)$ " " " " y, " " "

- Se f é homogénea, podemos escolher $A_1(x) = a_2(y) = 0$ e
$f(x,y) = x^4y^2$ $\left(f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^6 f(x,y) \right)$

- Como g não é homogénea, basta escolher $B_1(x) + b_2(y)$ que não sejam homogéneas, por exemplo $g(x,y) = x^4y^2 + 3$

- A expressão para f não é única (tal como para g tb não). Outra expressão poderá ser obtida escolhendo $A_1(x) + a_2(y)$ função homog. de grau 6, por exemplo, $f(x,y) = x^4y^2 + y^6$.