Matemática II

2013/2014

Economia, Finanças e Gestão

Exercícios com soluções

(Actualizado a 4/10/2012)

1 Complementos de Álgebra Linear

1.1. Para cada uma das matrizes seguintes, calcule os valores próprios e, se forem reais, determine os vectores próprios correspondentes, identificando em cada caso as multiplicidades algébrica e geométrica

a) $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Solução: a) $\lambda_1 = -5,\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = (c, c)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
$\lambda_2 = -1,\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = (7/3c, c)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
b) O polinómio característico não tem raízes reais ($\lambda_1 = 4 + 2i,\ \lambda_2 = 4 - 2i$);
c) $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2};\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = ((1 + \sqrt{2})c, c)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
$\lambda_2 = 1 - \sqrt{2};\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = ((1 - \sqrt{2})c, c)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
d) $\lambda = 0,\ m.a. = 2$; vectores próprios $u = (c, 0)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
e) $\lambda_1 = 2,\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = (c, 0, 0)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
$\lambda_2 = 3,\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = (0, c, 0)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
$\lambda_3 = 4,\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = (0, 0, c)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
f) $\lambda_1 = 3,\ m.a. = 2$; vectores próprios $u = (-c, 0, c)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
$\lambda_2 = -1,\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = (c, 0, c)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
g) $\lambda_1 = 0,\ m.a. = 2$; vectores próprios $u = (-c_1 - c_2, c_1, c_2)$, com c_1 e c_2 não simultaneamente nulos, $m.g. = 2$;

$\lambda_2 = 3,\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = (c, c, c)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
h) $\lambda = 1,\ m.a. = 3$; vectores próprios $u = (c, 0, 0)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$;
i) $\lambda_1 = 2,\ m.a. = 2$; vectores próprios $u = (c_1, c_1, c_2)$, com c_1 e c_2 não simultaneamente nulos, $m.g. = 2$;
$\lambda_2 = 0,\ m.a. = 1$; vectores próprios $u = (-c, c, 0)$, com $c \neq 0,\ m.g. = 1$.

1.2. Prove que

a) λ é um valor próprio de A sse for valor próprio de A^T;

b) se λ for valor próprio de A e $|A| \neq 0$, então $\lambda \neq 0$ e $\frac{1}{\lambda}$ é valor próprio da matriz inversa A^{-1};

c) se λ for valor próprio de A então λ^k é valor próprio da matriz $A^k,\ k \in \mathbb{N}$.

1.3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

a) Calcule os valores próprios de A e os respectivos vectores próprios;

b) Determine os valores próprios e vectores próprios de A^{100} (sugestão: use um dos resultados enunciados no exercício anterior).

Solução: a) $\lambda_1 = -5$, vectores próprios $u = (-2/3c, c)$, com $c \neq 0$, ;
$\lambda_2 = 5$, vectores próprios $u = (c, c)$, com $c \neq 0$, ;
b) $\lambda = 5^{100}$, vectores próprios $u = (-2/3c_1, c_1) + (c_2, c_2)$, com c_1, c_2 não simultaneamente nulos;

1.4. Considere a matriz A e o vector $\mathbf{x}$ definidos por

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

a) Identifique o polinómio característico, $P(\lambda)$, associado à matriz A;

b) Determine os valores próprios de A;

c) Calcule $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$;

d) Sejam $a, b \geq 0$. Sem efectuar qualquer cálculo, mostre que existe um vector $\mathbf{x}$ não nulo, para o qual $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$;

e) Classifique $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ para todos os possíveis valores de $a, b \in \mathbb{R}$.

Solução: a) $P(\lambda) = (b - \lambda)(-\lambda)(2a - \lambda)$; b) $\lambda_1 = b, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2a$; c) $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = ax^2 + 2axy + ay^2 + bz^2$;
e) SDP se $(a \geq 0\ e\ b \geq 0)$; SDN se $(a \leq 0\ e\ b \leq 0)$;
Ind. nos restantes casos, isto é, $(a > 0\ e\ b < 0)$ ou $(a < 0\ e\ b > 0)$.

1.5. Classifique as seguintes formas quadráticas

a) $q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$

b) $q(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$

c) $q(x,y) = x^2 - y^2$

d) $q(x,y,z) = x^2 + 4xy - 2xz + 7y^2 - 3z^2$

e) $q(x,y,z) = x^2 - 4xy + 4xz - z^2$

f) $q(x,y) = 6x^2 + 4xy + 3y^2$

g) $q(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$

h) $q(x,y) = 2x^2 + 6xy + 4y^2$

i) $q(x,y,z) = 3y^2 + 4xz$

j) $q(x,y) = x^2 + 4xy + ay^2$ (onde $a \in \mathbb{R}$).

Solução: a)SDP b)SDP c)Ind. d)Ind. e)Ind. f)DP g)Ind. h)Ind. i)Ind. j)Ind se $a < 4$, SDP se $a = 4$ e DP se $a > 4$.

1.6. Classifique as seguintes matrizes simétricas (quanto a serem definidas positivas, semi-definidas positivas, negativas, semi-definidas negativas ou indefinidas)

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -5 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$ i) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Solução: a)DP b)Ind. c)DN d)Ind. se $a < 4$, SDP se $a = 4$ e DP se $a > 4$ e)Ind. f)SDP g)Ind. h)Ind. se $a < -\sqrt{2} \vee a > \sqrt{2}$, DP se $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ e SDP se $a = \pm\sqrt{2}$ i)DN j) Ind.

2 Funções de várias variáveis: limites e continuidade

2.1. Determine os domínios das seguintes funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ e represente-os graficamente

$$a) f(x,y) = \frac{\sqrt{9-x^2-y^2}}{1-\ln x} \qquad b) f(x,y) = \frac{\sqrt{e-e^x}}{\ln(4-x^2-y^2)} \qquad c) f(x,y) = \ln(x-y)^2$$

$$d) f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x+y}}{\ln x^2 - \ln(3-x)^2} \qquad e) f(x,y) = \ln(x-y)\sqrt{(y-x)(x^2+y^2-1)}$$

Solução: a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0 \wedge x\neq e \wedge x^2+y^2\leq 9\}$ b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\leq 1 \wedge x^2+y^2<4 \wedge x^2+y^2\neq 3\}$ c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq y\}$ d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0 \wedge x\neq 3 \wedge x\neq 3/2\}$ e) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y>0 \wedge x^2+y^2-1\leq 0\}$

2.1. Determine o interior, exterior e fronteira de cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Classifique-os relativamente a serem abertos, fechados e limitados.

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+(y+2)^2<4\} \qquad B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\geq 9\}$$

$$C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\leq 1\} \qquad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1\}$$

Solução: $int(A)=A$, $fr(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+(y+2)^2=4\}$, $ext(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+(y+2)^2>4\}$, A é aberto e limitado. $int(B)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>9\}$, $fr(B)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=9\}$, $ext(B)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<9\}$, B é fechado e não é limitado. $int(C)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}<1\}$, $fr(C)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1\}$, $ext(C)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}>1\}$, C é fechado e limitado. $int(D)=\emptyset$, $fr(D)=D$, $ext(D)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}\neq 1\}$, D é fechado e limitado.

2.2. Represente graficamente o domínio D_f, indique analiticamente $int\{D_f\}$, $fr\{D_f\}$ e D'_f e diga, justificando, se D_f é aberto ou fechado, se é limitado e se é compacto, para cada uma das seguintes funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$:

$$a) f(x,y) = \frac{|x|-4}{\ln(4-x^2-y^2)} \qquad b) f(x,y) = \sqrt{x(1-x)} + \frac{\ln(x^2-y)}{\sqrt{y+x}}$$

$$c) f(x,y) = \sqrt{y+x-1}.\ln(4-(x+1)^2-(y-1)^2) \qquad d) f(x,y) = \sqrt{x-|y|} + \sqrt{2-y^2-x}$$

$$e) f(x,y) = x\sqrt{y^2-4} + \sqrt[4]{16-x^2-y^2}$$

Solução: a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4-x^2-y^2 > 0 \wedge \ln(4-x^2-y^2) \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4 \wedge x^2+y^2) \neq 3\}$, $int(D_f) = D_f$, $fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 4 \vee x^2+y^2 = 3\}$, $D'_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$. D_f é aberto, não é fechado, é limitado mas não é compacto.

b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(1-x) \geq 0 \wedge x^2-y > 0 \wedge y+x > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge -x < y < x^2\}$, $int(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 \wedge -x < y < x^2\}$, $fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y = x^2 \ \wedge \ 0 \leq x \leq 1) \vee (y = -x \ \wedge \ 0 \leq x \leq 1) \vee (x = 1 \ \wedge \ -x \leq y \leq x^2)\}$, $D'_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (0 \leq x \leq 1) \wedge (-x \leq y \leq x^2)\}$. D_f não é aberto nem fechado, é limitado mas não é compacto.

c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y+x-1 \geq 0 \wedge 4-(x+1)^2-(y-1)^2 > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1-x \wedge (x+1)^2+(y-1)^2 < 4\}$, $int(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1-x \wedge (x+1)^2+(y-1)^2 < 4\}$, $fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1-x \wedge (x+1)^2+(y-1)^2 \leq 4\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1-x \wedge (x+1)^2+(y-1)^2 = 4\}$, $D'_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1-x \wedge (x+1)^2+(y-1)^2 \leq 4\}$. D_f não é aberto nem fechado, é limitado mas não é compacto.

d)$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-|y| \geq 0 \wedge 2-y^2-x \geq 0\}$, $int(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-|y| > 0 \wedge 2-y^2-x > 0\}$, $fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-|y| = 0 \wedge 2-y^2-x \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-|y| \geq 0 \wedge 2-y^2-x = 0\}$, $D'_f = D_f$. D_f não é aberto, é fechado, é limitado e portanto é compacto.

e)$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2-4 \geq 0 \wedge 16-x^2-y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y \geq 2 \vee y \leq -2) \wedge x^2+y^2 \leq 16\}$, $int(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y > 2 \vee y < -2) \wedge x^2+y^2 < 16\}$, $fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y = 2 \vee y = -2) \wedge x^2+y^2 \leq 16\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y \geq 2 \vee y \leq -2) \wedge x^2+y^2 = 16\}$, $D'_f = D_f$. D_f não é aberto, é fechado, é limitado e portanto é compacto.

2.3. Determine o domínio da função f de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2-4)}{|x|-4}.$$

Faça a sua representação gráfica e mostre que D_f é um conjunto aberto e ilimitado. Averigue se $ext(D_f)$ também é aberto e ilimitado.

Solução: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-4 > 0 \wedge |x|-4 \neq 0\}$. $Ext(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4\}$ e portanto é um conjunto aberto e limitado.

2.4. Determine o interior, a fronteira e os pontos de acumulação dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

$a)A = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ $\qquad$ $b)B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (\frac{1}{n},\frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\}$

$c)C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y = (-1)^n\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.

Solução: a) $int(A) = \emptyset, fr(A) = A, A' = \emptyset$. b) $int(B) = \emptyset$, $fr(B) = B \cup \{(0,0)\}$, $B' = \{(0,0)\}$. c) $int(C) = \emptyset$, $fr(C) = C \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y = 0\}$, $C' = fr(C)$.

2.5. Calcule os seguintes limites de sucessões de pontos em $\mathbb{R}^2$ (caso existam):

$$\text{a) } \lim\left(\left(\frac{2n^2+3}{1+2n^2}\right)^{n^2}, \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) \quad \text{b) } \lim\left(n^3+n-n^2-1), \sqrt{n}.\frac{\sqrt{n}+3}{(\sqrt{n}+1)^2}\right)$$

$$\text{c) } \lim\left(n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right), \sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

Solução: a) $(e, -\frac{1}{2})$; b) $(+\infty, 1)$; c) não existe.

2.6. Calcule os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim \overline{x}_n, \text{ com } \overline{x}_n = \left[\frac{n}{2n+1}, \left(1+\frac{2}{n}\right)^n, \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$$

$$\text{b) } \lim \overline{x}_n \text{ com } \overline{x}_n = \left[\sqrt{n}-\sqrt{n-1}, \left(\sqrt[n]{e}-1\right).n, n.\ln\frac{n+2}{n}, \left(1-\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{n^2+1}{2n^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$

Solução: a) $(1/2, e^2, 1)$; b) $(0, 1, 2, 0)$.

2.7. Estude a existência de limite no ponto (0,0) para as seguintes funções

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x(x+y)}$ b) $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ c) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

d) $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ e) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ f) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

g) $f(x,y) = \dfrac{x^2(x+y)}{x^2+y^2}$ h) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2+2x^3}{x^2+y^2}$, i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}, & \text{se } x>0,\ y>0 \\ 0, & \text{se } x<0 \text{ ou } y<0. \end{cases}$

Solução: a) Não existe b) 0 c) Não existe d) 0 e) Não existe f) Não existe g) 0 h) Não existe i) Não existe.

2.8. Determine, caso exista, o prolongamento por continuidade à origem de cada uma das funções do exercício anterior.

Solução: Relativamente às alíneas em que o limite não existe, não é possível obter o referido prolongamento. Relativamente às outras, basta definir o valor da função na origem como sendo o respectivo limite. Por exemplo, na alínea b) o prolongamento é

$$\begin{cases} f(x,y), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & x=y=0 \end{cases}.$$

2.9. Estude a existência dos seguintes limites

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(x-2)(y-1)}{(x-2)^2+(y-1)^2}$ *b)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-3)} \frac{\sqrt{(x-1)(y+3)}+\sin(x-1)(y+3)}{\sqrt{(x-1)(y+3)}}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{3(x-2)^2(y-1)}{(x-2)^2+(y-1)^2}$ *d)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2-y^2-1}{x-1}$ *f)* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+x^2+y^2}{x^2+y^2}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2\sqrt{|y-1|}}{x^2+(y-1)^2}$ *h)* $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

Solução: a) não existe b) 1 c) 0 d) não existe e) não existe f) 1 g) 0 h) 0.

2.10. Considere a função f de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x-y}.$$

a) Indique o domínio de f.

b) Mostre que x^3-y^3 é multiplo de $x-y$.

c) Pode a função f ser prolongada por continuidade à recta $y=x$?

Solução: a) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$. c) Sim, basta definir o valor de f em pontos da recta como sendo $f(x,x) = 3x^2$.

2.11. Considere a função $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2-y^2}$.

a) Calcule $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0),\\ y=x+x^2}} f(x,y)$. O que pode concluir sobre $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

b) Calcule $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0),\\ y=mx}} f(x,y)$, $|m| \neq 1$. O que pode concluir sobre $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Solução:

a) $-\frac{1}{2}$. Se existir $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, é $-\frac{1}{2}$. b) 0. Não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ $(0 \neq -\frac{1}{2})$.

3 Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

3.1. Determine as derivadas parciais de primeira ordem de cada uma das seguintes funções e defina os respectivos domínios:

a) $f(x,y,z) = 3xy + x^2 - zy + z^2$; b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 - yx, & y \neq x \\ x, & y = x. \end{cases}$

Solução: a) $f'_x = 3y + 2x$; $f'_y = 3x - z$; $f'_z = -y + 2z$; $\mathcal{D}f'_x = \mathcal{D}f'_y = \mathcal{D}f'_z = \mathbb{R}^3$
b) $f'_x = 2x - y$ se $x \neq y$ e $f'_x = 0$ se $x = y = 0$; $f'_y = -x$ se $x \neq y$ e $f'_y = 0$ se $x = y = 0$
$\mathcal{D}f'_x = \mathcal{D}f'_y = \mathbb{R}^2 \backslash \{(a,a) : a \neq 0\}$

3.2. Mostre que $f(x,y) = \dfrac{x-y+1}{x+y}$ é solução da equação

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x+y}$$

em qualquer dos semiplanos abertos $x + y > 0$ ou $x + y < 0$.

3.3. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-y} - (x-y+1)}{x-y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de $f(x,y)$ no ponto (1,1).

b) Verifique que $f'_x(a,a) + f'_y(a,a) = 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$.

Solução:

a) f é contínua no ponto $(1,1)$.

3.4. Dada a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , x = y = 0 \end{cases},$$

indique segundo que vectores existe derivada direccional na origem e calcule o seu valor.

Solução: $\partial_{\overrightarrow{v}} f(0,0)$ existe para $\overrightarrow{v} = (\alpha, \alpha)$ e $\overrightarrow{v} = (\alpha, -\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nesse caso, $\partial_{\overrightarrow{v}} f(0,0) = 0$.

3.5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & , x \neq 0 \\ \\ 0 & , x = 0 \end{cases} ,$$

a) Mostre que a função admite derivada direccional na origem segundo qualquer vector e calcule-a.

b) Mostre também que f não é contínua em $(0,0)$.

c) Sem fazer qualquer cálculo, indique o valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Solução: a) $\partial_{(\alpha,\beta)} f(0,0) = \begin{cases} \dfrac{\beta^2}{\alpha} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

3.6. Estude a diferenciabilidade das seguintes funções nos pontos indicados e escreva as expressões dos respectivos diferenciais de primeira ordem (no caso das funções diferenciáveis):

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, no ponto (0,0);

b) $f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x \neq y \\ \\ x+1, & x = y \end{cases}$, em (1,1);

c) $f(x,y) = \begin{cases} xy - 2y + 3x, & x \neq y \\ \\ x^2y^2 + 3x - 2y, & x = y \end{cases}$, em (0,0);

d) $y = (x^2+1, x)$, em $x = 1$;

Solução:
a) f é diferenciável em $(0,0)$; $Df(0,0)(\mathbf{h}) = 0$; b) f não é diferenciável em $(1,1)$; c) f é diferenciável em $(0,0)$; $Df(0,0)(\mathbf{h}) = 3h_1 - 2h_2$; d) y é diferenciável em $x = 1$; $Df(1)(\mathbf{h}) = (2h, h)$.

3.7. Escreva as expressões do diferencial de primeira ordem das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f(x,y) = y^x$, num ponto genérico (a,b), com $b > 0$;

b) $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1 - x_2 + x_3}{\sqrt{x_3 - 1}}$, no ponto (1,-3,2).

Nota: Admita à partida que as funções são diferenciáveis.

Solução: a) $Df(a,b)(\mathbf{h}) = b^a \log b.h_1 + ab^{a-1}.h_2$ b) $Df(1,-3,2)(\mathbf{h}) = h_1 - h_2 - 2h_3$.

3.8. Mostre que são contínuas e que não são diferenciáveis nos pontos indicados, as funções

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-3x(y-2)^2 + x^3}{x^2+(y-2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,2) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,2), \end{cases}$
em $(0,2)$;

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = y = 0, \end{cases}$
em $(0,0)$;

c) $h(x,y) = \sqrt{|x|}\cos y$, em $(0,0)$.

3.9. Utilize a regra da derivação da função composta para calcular

a) $\dfrac{df}{dt}$, onde $f = x^2y^3$, sendo $x = te^t$ e $y = t^2+1$;

b) $\dfrac{df}{dt}$, onde $f = u^2 + v^3$, sendo $u = \dfrac{x}{y}$, $v = (x+2y)^3$ e $x = \dfrac{1}{t}$, $y = tg\ t$;

c) $\dfrac{dz}{dt}$, supondo que $z = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ e $x = \cos t$, $y = \sin t$.

d) $\nabla f(1,1)$, onde $f(x,y) = \sin(2u - v^3 + w)$, sendo $u = e^{x^2-y}$, $v = xy^2$ e $w = x^3y^2$;

e) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1,1)$, onde $f(x,y,z) = (u^2 - 3v)^5$, com $u = e^{\frac{xy}{z}}$ e $v = \ln(y^2z^3)$;

f) $\nabla f(1,2,3)$, onde $f(x,y,z) = g(u,v,w)$, com $u = 5x+3z$, $v = 8x+2y$, $w = -y+z$ e sabendo que $\nabla g(14,12,1) = (4,5,6)$.

Solução:
a) $\frac{df}{dt} = 2te^{2t}(t+1)(t^2+1)^3 + 6t^3e^{2t}(t^2+1)^2$;
b) $\frac{df}{dt} = -2\frac{1}{t^3}\frac{1}{tg^2\ t} - 2\frac{1}{t^2}\frac{\sec^2 t}{tg^3\ t} + 9(-\frac{1}{t^2} + 2\sec^2 t)(\frac{1}{t} + 2tg\ t)^8$; c) $\frac{dz}{dt} = 2 - 4\sin^2 t$; d) $\nabla f(1,1) = (4\cos 2, -6\cos 2)$; e) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1,1) = -30$; f) $\nabla f(1,2,3) = (60,4,18)$.

3.10. Se a função $f(u,v,w)$ é diferenciável no ponto $u = x-y$, $v = y-z$ e $w = z-x$, prove que, com $F(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x)$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \equiv 0.$$

3.11. Dada a função

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2y^2}{(x-1)^2+y^2}, & (x,y) \neq (1,0) \\ 0, & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

a) Determine as funções derivadas $g'_x(x,y)$ e $g'_y(x,y)$, indicando onde são definidas.

b) Mostre que $g'_x(x,y)$ e $g'_y(x,y)$ são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$.

c) Estude a diferenciabilidade da função no ponto (1,0).

d) Estude a continuidade da função no ponto (1,0).

Solução:

a) $g'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2(x-1)y^4}{((x-1)^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (1,0) \\ 0, & (x,y) = (1,0) \end{cases}$ $\quad g'_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2(x-1)^4 y}{((x-1)^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (1,0) \\ 0, & (x,y) = (1,0) \end{cases}$

Assim, $D_{g'_x} = D_{g'_y} = \mathbb{R}^2$. c) g é diferenciável em (1,0). d) g é contínua em (1,0).

3.12. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ e mostre que é descontínua em (0,0).

c) Verifique que f é diferenciável na origem.

d) Calcule $\partial_{(\frac{3}{5},\frac{4}{5})} f(0,0)$.

e) Estude a continuidade de f na origem.

Solução:

a) $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$;

b) $f'_y(x,y) = \begin{cases} 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - y\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$; d) 0; e) f é contínua em (0,0).

3.13. Utilize a função

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

e o ponto (0,0) para mostrar que o facto de uma função ter derivadas parciais finitas num ponto não significa que seja contínua nesse ponto. A função dada será diferenciável no ponto (0,0)? Justifique.

Solução:

A função não é contínua em $(0,0)$, e portanto também não é diferenciável nesse ponto.

3.14. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Prove que f é contínua em (0,0).

b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) Verifique que f não é diferenciável em (0,0). Sem fazer cálculos, o que pode concluir sobre a continuidade de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ em (0,0)?

Solução:
b) $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ c) Como f não é diferenciável em $(0,0)$, pelo menos uma das funções f'_x ou f'_y (ou ambas) não são contínuas em $(0,0)$.

3.15. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x-y)}{x+y} & \text{se } x+y \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x+y = 0 \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de f no ponto $(0,0)$ (sugestão: calcule o limite segundo a parábola de equação $y = -x + x^2$).

b) Calcule a função derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e estude a sua continuidade em (0,0).

c) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

d) Mostre que $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) . \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \neq \delta_{\vec{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})}} f(0,0)$. Comente esse resultado.

Solução:

a) f não é contínua em (0,0).
b) $f'_x(x,y) = \frac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2}$ se $x+y \neq 0$ e $f'_x(x,y) = 1$ se $(x,y) = (0,0)$ (não existe $f'_x(a,-a), a \neq 0$); a função $f'_x(x,y)$ não é contínua em $(0,0)$.
c) f não é diferenciável em $(0,0)$.
d) Os dois valores só teriam de ser iguais se a função f fosse diferenciável em $(0,0)$.

3.16. Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z \partial y}$, para $f(x,y,z) = z^2x^2y + xye^z$.

Solução: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2yz^2$, $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z \partial y} = 4z$.

3.17. Calcule f''_{x^2}, f''_{xy} e f'''_{xyx} para cada uma das seguintes funções, indicando os respectivos domínios:

$$a)\ f(x,y) = x\sin(x+y); \qquad b)\ f(x,y) = \begin{cases} y\sin x, & y \neq 0 \\ 2, & y = 0 \end{cases}$$

Solução:

a) $f''_{x^2} = 2\cos(x+y) - x\sin(x+y)$, $f''_{xy} = \cos(x+y) - x\sin(x+y)$ e $f'''_{xyx} = -2\sin(x+y) - x\cos(x+y)$.
b) $f''_{x^2} = -y\sin x$, $f''_{xy} = \cos x$ e $f'''_{xyx} = -\sin x$;

3.18. Calcule a segunda, terceira e quarta diferenciais de $f(x,y) = \sqrt{xy}$ no ponto (1,1).

Solução:
$D^2 f(1,1)(\mathbf{h}^2) = -\frac{1}{4}h_1^2 + \frac{1}{2}h_1h_2 - \frac{1}{4}h_2^2$,
$D^3 f(1,1)(\mathbf{h}^3) = \frac{3}{8}h_1^3 - \frac{3}{8}h_1^2h_2 - \frac{3}{8}h_1h_2^2 + \frac{3}{8}h_2^3$,
$D^4 f(1,1)(\mathbf{h}^4) = -\frac{15}{16}h_1^4 + 4\frac{3}{16}h_1^3h_2 + 6\frac{1}{16}h_1^2h_2^2 + 4\frac{3}{16}h_1h_2^3 - \frac{15}{16}h_2^4$.

3.19. Escreva a expressão geral da n-ésima diferencial da função $f(x,y) = \sin(x+y)$ no ponto (0,0).

Solução: $D^n f(0,0)(\mathbf{h}) = \sin(n\pi/2) \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} h_1^i h_2^{n-i}$

3.20. Mostre que $f(x,y) = log(e^x + e^y)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

3.21. Seja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ uma função real tal que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 1$. Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = f(y\text{sen } x, y^2).$$

Mostre que a matriz hessiana de g em $(0,0)$ é $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3.22. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = xy^2 + g(u,v,w), \text{ com } u = \operatorname{sen} y^2, \ v = \ln x \text{ e } w = ye^x.$$

Sabendo que a função g é de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$, calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0)$.

Solução: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0) = e\left(\frac{\partial^2 g}{\partial w \partial v}(0,0,0) + \frac{\partial g}{\partial w}(0,0,0)\right)$.

3.23. Mostre que as funções seguintes são homogéneas ou positivamente homogéneas. Determine o grau de homogeneidade e verifique a identidade de Euler:

a) $f(x,y) = \log \dfrac{(x+y)^2}{xy}$ b) $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}$ c) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Solução:

a) f é homogénea de grau 0;
b) f é positivamente homogénea de grau -1;
c) f é homogénea de grau 1.

3.24. Estude a homogeneidade de $g(x,y,z) = x^2 + x^\alpha y^{\beta-3} - z^{3\alpha} y^\beta$ e de $h(x,y) = \dfrac{x^3 y^\alpha + x^{\beta-1}}{y^{3-\beta}}$, fazendo a discussão em função dos parâmetros α e β reais:

a) Recorrendo directamente à definição.

b) Utilizando a identidade de Euler.

Solução:

g é homogénea de grau 2 para $\alpha = -\frac{3}{2}$ e $\beta = \frac{13}{2}$;
h é homogénea de grau $\alpha + \beta$ para $\beta = \alpha + 4, \alpha \in \mathbb{R}$.

3.25. Sendo $g(u,v)$ diferenciável em $\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{z}{x}\right)$, com $x, y \neq 0$, prove que a função

$$f(x,y,z) = x^2.g\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x}\right),$$

verifica a identidade $x.f'_x + y.f'_y + z.f'_z \equiv 2.f$. Interprete este resultado em termos de homogeneidade.

Solução:

f é positivamente homogénea de grau 2.

3.26. Sendo $f(\mathbf{x})$ uma função de $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ em $\mathbb{R}$, homogénea de grau zero e não constante, prove que não existe o $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x})$.

3.27. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{xy}{x+y}\right).$$

Escreva a fórmula de Taylor de ordem 2, em torno do ponto (1,1).

Solução: $\ln \dfrac{(1+h)(1+k)}{2+h+k} \;=\; -\ln 2 + \dfrac{1}{2}h + \dfrac{1}{2}k + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{3}{4}h^2 + \dfrac{1}{2}hk - \dfrac{3}{4}k^2\right) + r_3(h,k).$

4 Problemas de Extremo

4.1. Determine e classifique os pontos críticos das seguintes funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$

$a)x^2+y^2$	$b)x^2-y^2$	$c)x^3+y^3$	$d)x^3-y^3$
$e)x^4+y^4$	$f)x^4-y^4$	$g)3xy-x^3-y^3$	$h)x\ln x+y\ln y$
$i)x^3+ye^y$	$j)2x^3+xy^2+5x^2+y^2$	$k)x^4+y^4-4xy+1$	$l)x^2y^2$

Solução: a) $(0,0)$ é minimizante; b) c) d) $(0,0)$ é ponto de sela; e) $(0,0)$ é minimizante; f) $(0,0)$ é ponto de sela; g) $(0,0)$ é ponto de sela e $(1,1)$ é maximizante; h) $(1/e,1/e)$ é minimizante i) $(0,-1)$ é ponto de sela; j) $(0,0)$ é minimizante, $(-5/3,0)$ é maximizante, $(-1,2)$ e $(-1,-2)$ são pontos de sela; k) $(0,0)$ é ponto de sela, $(1,1)$ e $(-1,-1)$ são minimizantes; l) $(0,b)$ e $(a,0)$ $\forall a,b\in\mathbb{R}$, são minimizantes;

4.2. Determine e classifique os pontos críticos das funções seguintes, em função do parâmetro $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$a)f(x,y)=e^{x^2-ay^2}$	$b)f(x,y)=ax^2-y^2$
$c)f(x,y)=x^3-ax^2-3y^2$	$d)f(x,y)=\frac{16}{5}x^5+ay^2-x$

Solução: a) Ponto crítico: $(0,0)$. Se $a<0$, minimizante; se $a>0$, ponto de sela. b) Ponto crítico: $(0,0)$. Se $a>0$, $(0,0)$ é ponto de sela; se $a<0$, $(0,0)$ é maximizante. c) Pontos críticos: $(0,0)$ e $(\frac{2a}{3},0)$. Se $a>0$, $(0,0)$ é maximizante e $(\frac{2a}{3},0)$ é ponto de sela; se $a<0$, $(0,0)$ é ponto de sela e $(\frac{2a}{3},0)$ é maximizante. d) Pontos críticos: $(-\frac{1}{2},0)$ e $(\frac{1}{2},0)$. Se $a<0$, $(-\frac{1}{2},0)$ maximizante e $(\frac{1}{2},0)$ é ponto de sela; se $a>0$, $(-\frac{1}{2},0)$ é ponto de sela e $(\frac{1}{2},0)$ é minimizante.

4.3. Considere a função $f(x,y)=(y-\alpha)\,xe^x$.

a) Sabendo que $(0,1)$ é ponto crítico de f, determine α e classifique o ponto crítico $(0,1)$.

b) Mostre que f não é limitada.

Solução: a) $\alpha=1$. O ponto crítico é ponto de sela.

4.4. Seja a função $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=4\alpha(y-2)^2+(\beta^2-1)(2x-2)^2$, onde $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 1$, $\beta\neq -1$. Mostre que $(1,2)$ é o único ponto crítico de f e classifique-o em função dos possíveis valores de α e β.

Solução: Se $|\beta| < 1$ e $\alpha < 0$ então $(1,2)$ é máximo local; se $|\beta| > 1$ e $\alpha > 0$ então $(1,2)$ é mínimo local; nos restantes casos é ponto de sela.

4.5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 e^{y^3-3y}$.

a) Determine os pontos críticos da função f.

b) Mostre que a função f assume nos pontos da forma $(0,b)$ o seu mínimo absoluto.

c) Justifique que

(i) f não é limitada em $\mathbb{R}^2$;

(ii) f tem máximo e mínimo em $B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\big\}$.

Solução: a) Pontos críticos: $(0,b)$ com $b \in \mathbb{R}$.

4.6. Determine os extremos absolutos da função f no conjunto M, com

$$a) f(x,y,z) = x - 2y + 2z, \qquad M = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\}$$

$$b) f(x,y) = 4x^2 + y^2, \qquad M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 1\big\}$$

$$c) f(x,y) = xy, \qquad M = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{x^2}{8} + \tfrac{y^2}{2} = 1\Big\}$$

$$d) f(x,y,z) = x^2 + 2y - 2z, \qquad M = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 8\big\}$$

$$e) f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2, \qquad M = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 = 2\big\}$$

$$f) f(x,y,z) = 2x + 2y^2 + z^2, \qquad M = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2\big\}$$

Solução: a) O valor máximo da função na superfície esférica é 3 e o mínimo é -3; b) O valor máximo da função na elipse é 2 e o mínimo é 1; c) O valor máximo da função na elipse é 2 e o mínimo é -2; d) O valor máximo da função na superfície esférica é 10 e o mínimo é -8; e) O valor máximo da função na circunferência é 25 e o mínimo é 1; f) O valor máximo da função na superfície esférica é $9/2$ e o mínimo é $-2\sqrt{2}$.

4.7. Determine os extremos absolutos da função f no conjunto A, com

$a) f(x,y,z) = x - 2y + 2z$, $\quad A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$
(sugestão: compare com a alínea a) do exercício anterior)

$b) f(x,y) = 4x^2 + y^2$, $\quad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1\right\}$
(sugestão: compare com a alínea b) do exercício anterior)

$c) f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$, $\quad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 \leq 2\right\}$
(sugestão: compare com a alínea e) do exercício anterior)

Solução: a) O valor máximo da função na esfera é 3 e o mínimo é -3; b) O valor máximo da função na região limitada pela elipse é 2 e o mínimo é 0; c) O valor máximo da função no círculo é 25 e o mínimo é 1.

4.8. Determinar as distâncias máxima e mínima da origem à elipse $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

Solução: A distância máxima é 2 e a distância mínima é 1.

4.9. Resolva o problema $\min\,(x + 4y + 3z)$ sujeito à condição $x^2 + 2y^2 + \frac{1}{3}z^2 = b$, $(b > 0)$.

Solução: O valor mínimo da função é $-6\sqrt{b}$, obtido no ponto $(-\frac{\sqrt{b}}{6}, -\frac{\sqrt{b}}{3}, -\frac{3\sqrt{b}}{2})$.

4.10. Determine o ponto da elipse de equação $x^2 + 2xy + 2y^2 = 2$ que tem menor abcissa.

Solução: $(-2, 1)$.

4.11. Determine os extremos absolutos da função $f(x,y) = e^{x^2+y^2+z^2}$ no conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ z = 2 - y\}$.

Solução: O máximo da função é e^{10}, obtido no ponto $(0, -1, 3)$; o mínimo é e^2, obtido em $(0, 1, 1)$.

5 Integrais Múltiplos

5.1. Calcule os seguintes integrais

a) $\displaystyle\int_0^1\int_{-1}^1\int_1^2 x\,dxdydz$ b) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^1 ye^{xy}dxdy$ c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x-y-z}dxdydz$

d) $\displaystyle\int_0^5\int_0^{+\infty}(x^2e^{-2yx}+3ye^{-y^2})dydx$ e) $\displaystyle\int_1^2\int_1^2(1+x+\frac{y}{2})dxdy$ f) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos x\,dxdydz.$

Solução: a) 3 b) $e-\frac{1}{e}-2$ c) 1 d) $\frac{55}{4}$ e) $\frac{13}{4}$ f) $\frac{1}{2}$

5.2. Calcule $\iint_A f(x,y)dxdy$, onde

$a) f(x,y)=\frac{2x}{y^6},\quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le y\le 3,\ 0\le x\le y^4\}$

$b) f(x,y)=e^{\frac{y}{x}},\quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le 2,\ x\le y\le x^3\}$

$c) f(x,y)=x^2y^5,\quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1\}$

$d) f(x,y)=ye^x+x^2y,\quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y^2\}$

$e) f(x,y)=xe^{-xy},\quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le 2,\ \frac{1}{x}\le y<+\infty\}$

$f) f(x,y)=x^3+4y,$ A é a região do plano xOy limitada pelas linhas $y=x^2$ e $y=2x$.

Solução: a) $\frac{26}{3}$ b) $\frac{e^4}{2}-2e$ c) $\frac{2}{45}$ d) $\frac{e}{2}-\frac{23}{24}$ e) $\frac{1}{e}$ f) $\frac{32}{3}$

5.3. Sendo $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\le 1-x,\ y\le 1+x,\ y\ge 0\}$, calcule

a) $\iint_A(x-1)y\,dxdy$ b) $\iint_A(y-2y^2)e^{xy}\,dxdy$ c) $\iint_A(x+y)\,dxdy.$

Solução: a) $-\frac{1}{3}$ b) 0 c) $\frac{1}{3}$

5.4. Calcule $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f(x,y)dxdy$, com $f(x,y)=\begin{cases} xy & x\ge 0\ e\ y\ge 0\\ 1-x-y, & \text{outros } (x,y)\end{cases}$.

Solução: $\frac{17}{4}$

5.5. Calcule com um integral duplo a área da figura plana que é imagem do conjunto A, sendo

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \ \wedge \ x^2 \leq y \leq 1\}$;

b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x \leq y \leq 1 \ \wedge \ x \leq 1\}$;

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$;

d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 2 \geq 0 \ \wedge \ x + y^2 \leq 0\}$;

e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2 \ \wedge \ y - x \geq 0 \ \wedge \ 2y - x \leq 3 \ \wedge \ x \geq 0\}$;

f) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \ \wedge \ x^2 + y^2 \leq 1\}$;

g) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + x \leq 2 \ \wedge \ x - y \geq 0\}$;

h) $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \ \wedge \ x \leq \frac{y^2}{4} + 3\right\}$;

Solução: a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{8}{3}$ d) $\frac{9}{2}$ e) $\frac{35}{48}$ f) $\frac{\pi}{2}$ g) $\frac{9}{2}$ h) 8

5.6. Calcule $\int_0^4 \int_{2x}^8 \sin(y^2) dy dx$ (sugestão: comece por fazer o esboço gráfico da região integranda, invertendo depois a ordem de integração).

Solução: $\frac{1 - \cos 64}{4}$

5.7. Calcule $\int \int_A g(x, y) dx dy$, sendo $A = [0, 2] \times [0, 4]$ e $g(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \leq y \leq 2x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$.

Solução: $-\frac{4}{3}$

6 Equações Diferenciais e de Diferenças

6.1 Equações Diferenciais

6.1. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais de variáveis separáveis

$a) y' = xy - x$ $\quad$ $b)\ dx\, e^y = dy(x+1) - dx$ $\quad$ $c) \frac{dy}{dx} + \frac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0$

$d) \sqrt{1-x^2}dy - \sqrt{1-y^2}dx = 0$ $\quad$ $e) e^{x^4} yy' = x^3\left(9+y^4\right)$ $\quad$ $f) e^y(4+x^2)y' = x\left(2+e^y\right)$

$g) e^{3x}dy + \left(4+y^2\right)dx = 0$ $\quad$ $h) 4xe^y dx + \left(x^4+4\right)dy = 0$

Solução: a) $y(x) = 1 + e^{\frac{1}{2}x^2}C$ b) $\ln\left(e^{y(x)}+1\right) - y(x) + \ln(x+1) = C$ c) $\frac{1}{3}\ln|1+y^3| + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = C$ d) $\arcsin(y(x)) - \arcsin x = C$ e) $\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{1}{3}y^2(x)\right) + \frac{1}{4}e^{-x^4} = C$ f) $\ln\left(2+e^{y(x)}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(4+x^2\right) = C$ g) $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}y(x)\right) - \frac{1}{3}e^{-3x} = C$ h) $-e^{-y(x)} + \arctan\frac{1}{2}x^2 = C$

6.2. Resolva os seguintes problemas de valor inicial

a) $y' + 4y = 0, \quad y(0) = 6$ $\quad$ b) $\dfrac{dy}{dt} + y\sin t = 0, \quad y(\pi/3) = 3/2$

c) $(1+x^2)y' + y = 0, \quad y(1) = 1$ $\quad$ d) $2y' + 4xy = 4x, \quad y(0) = -2$

e) $y' + y\sin x = \sin x\cos x, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0$

Solução: a) $y(x) = 6e^{-4x}$ b) $y(t) = \frac{3}{2}e^{\cos t - \frac{1}{2}}$ c) $y(x) = e^{\frac{\pi}{4} - \arctan(x)}$ d) $y(x) = 1 - 3e^{-x^2}$ e) $y(x) = \cos x + 1 - e^{\cos x}$.

6.3. Mostre que qualquer equação diferencial ordinária linear de primeira ordem que seja homogénea, pode ser escrita como uma equação de variáveis separáveis.

6.4. Determine a solução geral das equações seguintes

$a) y'' - 7y' + 12y = 0$ $\quad$ $b) y'' + 4y = 0$ $\quad$ $c) y'' - 4y' + 4y = 0$

$d) y'' + 2y' + 10y = 0$ $\quad$ $e) y'' + y' - 6y = 8$ $\quad$ $f) y'' + 3y' + 2y = e^{5x}$

$g) y'' - y = \sin x$ $\quad$ $h) y'' - y = e^{-x}$ $\quad$ $i) y'' - 6y = 36(x-1)$

$j) y'' - 9y = 9x^2$ $\quad$ $k) y'' + 3y' + 2y = \sin x$ $\quad$ $l) y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$

$m) y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x}$

Solução: a) $y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$ b) $y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$ c) $y(x) = (C_1 + C_2x)e^{2x}$ d) $y(x) = (C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)e^{-x}$ e) $y(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} - \frac{4}{3}$ f) $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{42}e^{5x}$ g) $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{x} - \frac{1}{2}\sin x$ h) $y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x}$ i) $y(x) = C_1e^{\sqrt{6}x} + C_2e^{-\sqrt{6}x} - 6x + 6$ j) $y(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} - x^2 - \frac{2}{9}$ k) $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$ l) $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + xe^{-x}$ m) $y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + 3x^2e^{2x}$.

6.5. Resolva os seguintes problemas de valor inicial

$a)\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = -1, y'(0) = 1 \end{cases}$ $b)\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$ $c)\begin{cases} y'' + 2y' + y = x^2 \\ y\,(0) = 0,\ y'\,(0) = 1 \end{cases}$

$d)\begin{cases} y'' + 4y = 4x + 1 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ $e)\begin{cases} 9y'' + y = 0 \\ y\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2,\ y'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0 \end{cases}$ $f)\begin{cases} 2y'' - 4y' + 2y = 0 \\ y(0) = -1, y'(0) = 1 \end{cases}$

$g)\begin{cases} y'' - 2y' + 10y = 10x^2 \\ y(0) = 0, y'(0) = 3 \end{cases}$

Solução: a) $y\,(x) = -\frac{2}{3}e^{-2x} - \frac{1}{3}e^{x}$ b) $y\,(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)e^{-x}$ c) $y(x) = -(6 + x)e^{-x} + x^2 - 4x + 6$ d) $y(x) = \frac{2\pi+1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + x + \frac{1}{4}$ e) $y\,(x) = 2\sin(\frac{x}{3})$ f) $y\,(x) = (-1 + 2x)e^{x}$ g) $y(x) = e^{x}\left(\frac{3}{25}\cos 3x + \frac{62}{75}\sin 3x\right) + x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{25}$.

6.6. Resolva os seguintes problemas de valores na fronteira

$a)\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \\ y\,(0) = 0,\ y\,(1) = 0 \end{cases}$ $b)\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y\,(0) = 0,\ y\,(\pi) = 0 \end{cases}$ $c)\begin{cases} y'' - 10y' + 25y = 50 \\ y\,(0) = 0,\ y\,(2) = 2. \end{cases}$

$d)\begin{cases} y'' - 8y' + 16y = 0 \\ y\,(0) = 1,\ y\,(1) = e^4. \end{cases}$

Solução: a) $y(x) = (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2)e^{3x}$ b) $y(x) = C\sin 2x$ c) $y(x) = (-2 + x)e^{5x} + 2$ d) $y(x) = e^{4x}$.

6.7. Sabendo que $y = e^{2x}$ é solução da equação diferencial

$$y'' - \alpha y' + 10y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

determine α e a solução geral da equação dada.

Solução: $\alpha = 7$; $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{5x}$.

6.8. Sabendo que $y(x) = xe^{2x}$ é solução da equação diferencial $2y'' - \alpha y' + 8y = 0$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, resolva o problema de valores na fronteira $\begin{cases} 2y'' - \alpha y' + 8y = 16 \\ y(0) = 1;\ y(1) = 2 \end{cases}$.

Solução: $y(x) = -e^{2x} + xe^{2x} + 2$.

6.9. Resolva o seguinte problema com condições periódicas

$$\begin{cases} y'' + 4y = 4, \\ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right), y'(0) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}.$$

Solução: $y(x) = 1$.

6.10. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

$a) y' + y^2 \sin x = 0$ $\quad b) yy' + x = 0$ $\quad c) y'' - 2y' = 0$

$d) y'y - x(2y^2+1)e^{x^2} = 0$ $\quad e) \frac{dy}{dx} \cos y = -x \frac{\sin y}{1+x^2}$ $\quad f) y' + 6yx^5 - x^5 = 0$

Solução: a) $y^{-1}(x) = -\cos x + C$ b) $y^2(x) = -x^2 + C$ c) $y(x) = C_1 + C_2 e^{2x}$ d) $\frac{1}{4}\ln(2y^2+1) - \frac{1}{2}e^{x^2} = C$ e) $\ln|\sin y| + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = C$ f) $y(x) = \frac{1}{6} + Ce^{-x^6}$.

6.11. Determine os valores de a e b para os quais e^{2x} e e^{-2x} são solução da equação diferencial $y'' + ay' + by = 0$ e, para esses valores de a e b, indique a solução geral da equação dada.

Solução: $a = 0$ e $b = -4$; $y_h(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}, A, B \in \mathbb{R}$.

Aplicações de equações diferenciais

6.12. [Lei de crescimento da população segundo Malthus]

a) Deduza a trajectória da população, $y(t)$, sabendo que: i) em cada instante t, a taxa de crescimento da população, $\dfrac{dy/y}{dt}$, é igual a r (com $r > 0$); ii) no momento $t = 0$ regista-se y_0 (milhões de indivíduos).

b) Estime o valor da população portuguesa no ano 2000 supondo que no ano de 1994 (por hipótese $t = 0$) se regista $y = 10$ (milhões de indivíduos) e que $r = 0.009$.

c) Comente a hipótese malthusiana estudando $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$.

Solução:

a) $y(t) = y_0 e^{rt}$; b) $y(6) = 10 \times e^{0{,}009\times 6}$; c) $+\infty$ se $r > 0$.

6.13. [Lei do crescimento da população segundo Verhulst]

a) Deduza a trajectória da população, $y(t)$, sabendo que: i) em cada instante t, a taxa de crescimento da população, $\dfrac{dy/y}{dt}$, é igual a r menos ay (r: taxa de crescimento natural; a: "taxa de emigração" ou "morte"; com $r > 0$ e $a > 0$); ii) no momento $t = 0$ registam-se y_0 (milhões de indivíduos).

b) Estime o valor da população portuguesa no ano 2030 supondo que no ano de 2010 (por hipótese $t = 0$) se regista $y = 10$ (milhões de indivíduos) e que $r = 0.009$ e $a = 0.0001$.

c) Estude $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$.

6.14. [Modelo de Crescimento de Domar]Considere um modelo económico onde: i) a procura agregada da economia, y_d, varia ao longo do tempo de acordo com a equação $\dfrac{dy_d}{dt} = \dfrac{dI}{dt}\dfrac{1}{s}$, sendo $I = I(t)$ o investimento e s a propensão marginal a poupar ($1/s$ é o multiplicador keynesiano); ii) a capacidade produtiva ($y_c = \rho K$ - note: a capacidade produtiva depende apenas do *stock* de capital) varia ao longo do tempo de acordo com a equação $\dfrac{dy_c}{dt} = \rho\dfrac{dK}{dt}$, sendo $K = K(t)$ o *stock* de capital da economia (naturalmente $\dfrac{dK}{dt} = I(t)$). Deduza a trajectória do investimento, I(t), que satisfaz a condição de equilíbrio no modelo de Domar: variação da procura agregada = variação da capacidade produtiva.

6.15. Considere as seguintes funções, procura e oferta de um bem: $Q_d = a - bP$; $Q_s = -c + dP$.

a) Determine a trajectória temporal do nível de preços $P(t)$ sabendo que, em cada instante t, a taxa de variação de $P(t)$ é proporcional ao excesso de procura, i.e., $\dfrac{dP}{dt} = \alpha(Q_d - Q_s)$ e que $P(0) = P_0 \neq P_e = (a + c)/(b + d)$ (preço de equilíbrio).

b) Verifique em que condições $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = P_e$.

6.2 Equações de Diferenças

6.16. Resolva através de sucessivas iterações as seguintes equações de 1.ª ordem:

a) $y_{t+1} = \alpha y_t,\ y_0 = \beta$ b) $y_t = \alpha y_{t-1} + a,\ y_0 = \beta$

c) $y_{t+n} = y_{t+n-1} - a,\ y_1 = y_0\ (n \in \mathbb{N})$ d) $\begin{cases} y_t = \alpha y_{t-1} + a, \ t \leq t^* \\ y_t = \beta y_{t-1} + b, \ t > t^* \end{cases} \quad y_0 = C$

6.17. Resolva as seguintes equações homogéneas de 1.ª ordem:

a) $y_t = \alpha y_{t-1}, \ \ y_0 = 10$ b) $\Delta y_t = y_t(1-\alpha), \ \ y_0 = \beta$

c) $y_{t+1} + 3y_t = 0, \ \ y_0 = 4$ d) $2y_{t+2} - y_{t+1} = 0, \ \ y_0 = 7$

e) $y_{t-2} = 0.2y_{t-3}, \ \ y_0 = 1$

Solução:

a) $y_t = 10\alpha^t$; b) $y_t = \beta(2-\alpha)^t$; c) $y_t = 4(-3)^t$; d) $y_t = 7(\frac{1}{2})^t$; e) $y_t = (0.2)^t$.

6.18. Resolva as seguintes equações não homogéneas de 1.ª ordem:

a) $y_t = \alpha y_{t-1} + 2$ b) $\Delta y_t = y_t(1-\alpha) + 2.4^t$

c) $y_{t+1} + 3y_t = 4t^2$ d) $y_{t+1} = y_t + 2t3^t$

e) $y_{t-2} = 3y_{t-3} + 8t + 4^t$ f) $\Delta y_t = y_t(1-\alpha) + \alpha - 1$

g) $y_t = 2y_{t-1} + 2^t$

Solução:

a) Se $\alpha \neq 1, y_t = C\alpha^t + \frac{2}{1-\alpha}$; se $\alpha = 1, y_t = C + 2t$ b) Se $\alpha \neq -2, y_t = C(2-\alpha)^t + \frac{2}{2+\alpha}4^t$; se $\alpha = -2, y_t = C4^t + \frac{1}{2}t4^t$ c) $y_t = C(-3)^t + t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}$; d) $y_t = C + (t - \frac{3}{2})3^t$; e) $y_t = C3^t - 14 - 4t + 4^{t+3}$; f) Se $\alpha \neq 1, y_t = C(2-\alpha)^t + 1$; se $\alpha = 1, y_t = C(2-\alpha)^t$ g) $y_t = C2^t + t2^t$.

6.19. Resolva as seguintes equações homogéneas de 2.ª ordem:

a) $y_t + \frac{1}{2}y_{t-1} - \frac{1}{2}y_{t-2} = 0$, sabendo que a solução passa nos pontos (0,1) e (1,1)

b) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 0$, $y(0) = 1, y(1) = 2$; c) $y_{t+2} - y_{t+1} + \dfrac{1}{2}y_t = 0$

d) $\Delta^2 y_t = 0$

Solução:

a) $y_t = -\frac{1}{3}(-1)^t + \frac{4}{3}(\frac{1}{2})^t$; b) $y_t = 2^t$; c) $y_t = (\frac{\sqrt{2}}{2})^t(C_1 \cos\frac{\pi}{4}t + C_2 \sin\frac{\pi}{4}t)$, d) $y_t = C_1 + C_2 t$.

6.20. Resolva as seguintes equações não homogéneas de 2.ª ordem:

a) $y_t + \dfrac{1}{2}y_{t-1} - \dfrac{1}{2}y_{t-2} = 1$ b) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 2^t$ c) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = t$

d) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = t + 2^t$ e) $y_{t+2} - y_{t+1} + \dfrac{1}{2}y_t = t^2$ f) $\Delta^2 y_t = t + e^t$

Solução:
a) $y_t = C_1(\frac{1}{2})^t + C_2(-1)^t + 1$; b) $y_t = (C_1 + C_2 t)2^t + t^2 2^{t-3}$; c) $y_t = (C_1 + C_2 t)2^t + t + 2$ d) $y_t = (C_1 + C_2 t)2^t + t^2 2^{t-3} + t + 2$ e) $y_t = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t \left(C_1 \cos\frac{\pi}{4}t + C_2 \sin\frac{\pi}{4}t\right) + 2t^2 - 8t + 4$; f) $y_t = C_1 + C_2 t + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{e^2 - 2e + 1}e^t$.

6.21. Resolva as seguintes equações de diferenças:

a) $2y_t - y_{t-1} - y_{t-2} = 0$ b) $y_{t+5} - 4y_{t+4} + 4y_{t+3} = 12(3^t)$ c) $2y_{t+1} - 3y_t + y_{t-1} = 3$

d) $y_{t+3} - 2y_{t+2} + y_{t+1} = 4$ e) $3y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 5(-1)^t$

Solução: a) $y_t = C_1 + C_2(-\frac{1}{2})^t$, b) $y_t = (C_1 + C_2 t)2^t + 4(3^{t-2})$, c) $y_t = C_1 + C_2(\frac{1}{2})^t + 3t$, d) $y_t = C_1 + C_2 t + 2t^2$, e) $y_t = C_1(-1)^t + C_2(\frac{2}{3})^t + t(-1)^t$

Aplicações de equações de diferenças finitas

6.22. [Modelo de mercado agrícola com expectativas de preços] Considere o seguinte modelo

$$\begin{cases} Q_{st} = -\gamma + \delta P_t^* \\ Q_{dt} = \alpha - \beta P_t \\ Q_{st} = Q_{dt} \end{cases}$$

onde Q_{st}, Q_{dt} e P_t são, respectivamente, as funções de oferta e de procura de um bem (agrícola) e o preço desse bem, e P_t^* a expectativa de preço formada pelos produtores no período $t-1$ relativamente ao período t. Deduza e comente o comportamento da trajectória do preço P_t admitindo que:
a) $P_t^* = P_{t-1}$ (expectativa *naive*); b) $P_t^* = P_{t-1}^* + \eta(P_{t-1} - P_{t-1}^*)$ (expectativa adaptativa).

6.23. [Modelo de interacção do multiplicador e acelerador de Samuelson] Considere o seguinte modelo económico:

$$\begin{cases} y_t = C_t + I_t + G_0 \\ C_t = \gamma y_{t-1} \\ I_t = \alpha(C_t - C_{t-1}) \end{cases}$$

onde y representa o rendimento, C o consumo, I o investimento, G_0 os gastos do governo (supostos exógenos ao modelo), γ a propensão marginal a consumir ($0 < \gamma < 1$) e α o coeficiente de aceleração ($\alpha > 0$).

a) Deduza a equação do rendimento $y_t + a_1 y_{y-1} + a_2 y_{t-2} = G_0$, identificando os parâmetros a_1 e a_2.

b) Determine $\bar{y}_t$.

c) Mostre que a solução não pode exibir um comportamento oscilatório quando as raízes da equação característica são reais.

d) Mostre que a solução é convergente quando $\alpha\delta < 1$.

e) Determine a trajectória temporal do rendimento nos seguintes cenários: (i) $\alpha = 3.5$, $\gamma = 0.8$, (ii) $\alpha = 2$, $\gamma = 0.7$; (iii) $\alpha = 0.2$, $\gamma = 0.9$; (iv) $\alpha = 1.5$, $\gamma = 0.6$.