

Universidade de Lisboa
Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

Matemática II

27 de Janeiro de 2014

Época de Recurso

Duração: 2 horas

1. Considere a forma quadrática de \mathbb{R}^3 : $Q(x_1, x_2, x_3) = x^T A x = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2kx_2x_3$, com $k \in \mathbb{R}$ e $A = A^T$.

- a) Determine os valores próprios da matriz A .
- b) Classifique a forma quadrática Q em função dos valores de k .

2. Considere a função $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{e^{xy}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \ln(y - x^2)}$$

- a) Indique e represente graficamente o domínio D_f da função f .
- b) Determine a fronteira e a aderência de D_f .

3. Considere a função $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy + \sqrt{xy}}{x^2 + y^2} & \text{se } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = y = 0 \end{cases}$$

- a) Estude f quanto à continuidade.
- b) Seja $g(x, y) = x^3 f(x, y)$. Estude a diferenciabilidade de g em $(0, 0)$.

4. Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$.

5. Determine os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = y^2 - x^2$ na elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

6. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

- a) $ay^2 + b - x^2yy' = 0$, com a e $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$;
- b) $y'' + 2y = e^x$.

7. Usando um integral duplo, calcule a área de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 4x, y \leq 3 - x, x \geq 0, y \geq 0\}$.

8. Considere a função

$$g(x, y) = xy \cdot f\left(\frac{x+y}{xy}\right), \quad (x \neq 0 \text{ e } y \neq 0)$$

onde f é uma função de classe C^1 em \mathbb{R} . Mostre que $x^2 \frac{\partial g}{\partial x} - y^2 \frac{\partial g}{\partial y} = (x - y)g(x, y)$.

Cotação: 1. a) 1,0 b) 1,5; 2. a) 1,5 b) 1,5; 3. a) 1,5; b) 1,5; 4. 2,0; 5. 2,0; 6. a) 1,5 b) 2,0; 7. 2,0; 8. 2,0.