TÓPICOS DE RESOLUÇÃO

1. a) Fazendo $|A-\lambda I|=0$, obtêm-se os valores próprios da matriz A da forma quadrática:

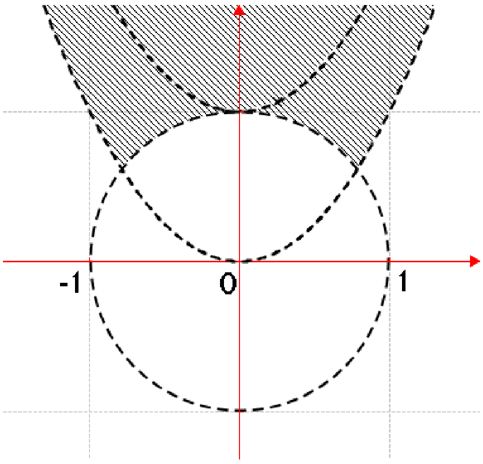
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & k \\ 0 & k & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-k^2\right]=0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(1-\lambda-k)(1-\lambda+k)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda=2 \ \vee\ \lambda=1-k \ \vee \lambda=1+k$$

b) Utilizando os resultados da alínea anterior, a classificação da forma quadrática em função de k, é a seguinte:

- se $k\in\left]-\infty,\ -1\right[\cup\left]1,\ +\infty\right[$, Q é indefinida;
- se $k\in\left]-1,\ 1\right[$, Q é definida positiva;
- se $k=-1$ ou $k=1$, Q é semi definida positiva.

2. a) $D_f=\left\{(x,y)\in\mathrm{R}^2:\ x^2+y^2>1\ \wedge\ y>x^2\ \wedge\ y\neq x^2+1\right\}$.



b) Temos,

$\mathrm{Fr}(D_f)=\left\{(x,y)\in\mathrm{R}^2:\ \left(x^2+y^2=1\ \wedge\ y\geq x^2\right)\vee\left(x^2+y^2\geq 1\ \wedge\ y=x^2\right)\vee\left(y=1+x^2\right)\right\}$.

$\mathrm{Ad}(D_f)=\mathrm{Int}(D_f)\cup\mathrm{Fr}(D_f)=D_f\cup\mathrm{Fr}(D_f)$, já que:

$\mathrm{Int}(Df)=Df=\left\{(x,y)\in\mathrm{R}^2:\ x^2+y^2>1\ \wedge\ y>x^2\ \wedge\ y\neq x^2+1\right\}$.

Logo,

$$\mathrm{Ad}(Df)=\left\{(x,y)\in\mathrm{R}^2:\ x^2+y^2\geq 1\ \wedge\ y\geq x^2\right\}.$$

3. a) $D_f=\left\{(x,y)\in\mathrm{R}^2:\ xy\geq 0\right\}$

- No ponto $(0,\ 0)$, estudemos os limites direccionais segunda as rectas de equação $y=mx$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ y=mx}} \frac{xy+\sqrt{xy}}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2+\sqrt{mx^2}}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2+|x|\sqrt{m}}{x^2\left(1+m^2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{mx\pm\sqrt{m}}{x\left(1+m^2\right)} = \begin{cases}\pm\infty, & m>0\\ 0, & m=0\end{cases}$$

Como os limites direccionais dependem do declive da recta, não existe limite de f na origem, pelo que a função não é contínua em $(0,\ 0)$.

xy e x^2+y^2 são contínuas em R^2 porque são funções polinomiais.

$\sqrt{xy}$ é contínua em D_f porque composição de funções contínuas.

Em $D_f \setminus \{(0,0)\}$, f é soma e depois quociente de funções contínuas em pontos onde o denominador não se anula, pelo que é contínua. Portanto a função f é contínua em todo o seu domínio excepto em $(0,\ 0)$.

b) <u>Cálculo da derivadas parciais em (0, 0)</u>:

- $$\frac{\partial g(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3\dfrac{h\times 0+\sqrt{h\times 0}}{h^2+0}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3}=0$$
- $$\frac{\partial g(0,0)}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0\times\dfrac{0\times h+\sqrt{0\times h}}{0+h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3}=0$$

Logo,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{g(h,k)-g(0,0)-\dfrac{\partial g(0,0)}{\partial x}h-\dfrac{\partial g(0,0)}{\partial y}k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} h^3\frac{hk+\sqrt{hk}}{\left(h^2+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\underset{\substack{\text{Fazendo}\\ k=mh}}{=} \lim_{\substack{h\to 0\\ k=mh}} h^3\frac{mh^2+\sqrt{mh^2}}{\left(h^2+m^2h^2\right)\sqrt{h^2+m^2h^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} h^3\frac{mh^2+\sqrt{mh^2}}{h^3\left(1+m^2\right)\sqrt{1+m^2}}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{mh^2+\sqrt{mh^2}}{\left(1+m^2\right)\sqrt{1+m^2}} = 0$$

Conclui-se que caso o limite exista, ele será nulo. Temos então que fazer a prova:

$$0 \le \left|h^3\frac{hk+\sqrt{hk}}{\left(h^2+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le |h|^3\frac{|hk|+\sqrt{hk}}{\left(h^2+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}} = |h||h|^2\frac{|hk|+\sqrt{hk}}{\left(h^2+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}} \le$$

$$\le |h|\left(h^2+k^2\right)\frac{|hk|+\sqrt{hk}}{\left(h^2+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}} \le |h|\frac{|hk|+\sqrt{hk}}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \sqrt{h^2+k^2}\,\frac{|hk|+\sqrt{hk}}{\sqrt{h^2+k^2}} = hk+\sqrt{hk}$$

Como $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} 0 = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} hk+\sqrt{hk} = 0$, concluímos que $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} h^3\dfrac{hk+\sqrt{hk}}{\left(h^2+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

e portanto, a função g é uma função diferenciável em (0, 0).

4. Determinação dos pontos críticos:

$$\begin{cases} f'_x = 2x + 2xy = 0 \\ f'_y = 2y + x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1+y) = 0 \\ 2y + x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Os pontos críticos são: $(0,\ 0)$, $(\sqrt{2},\ -1)$ e $(-\sqrt{2},\ -1)$.

Classificação dos pontos críticos:

A matriz hessiana é: $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2(y+1) & 2x \\ 2x & 2 \end{bmatrix}$.

- No ponto $(0,\ 0)$, a matriz hessiana $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é definida positiva (valor próprio positivo, de multiplicidade algébrica 2), logo o ponto $(0,\ 0)$ é um ponto de mínimo local de *f*.
- No ponto $(\sqrt{2},\ -1)$, a matriz hessiana $Hf(\sqrt{2},-1) = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ é indefinida ($\Delta_1 = 0$ e $\Delta_2 < 0$), logo o ponto $(\sqrt{2},\ -1)$ é ponto de sela.
- No ponto $(-\sqrt{2},\ -1)$, a matriz hessiana $Hf(-\sqrt{2},-1) = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ é indefinida ($\Delta_1 = 0$ e $\Delta_2 < 0$), logo o ponto $(-\sqrt{2},\ -1)$ é também ponto de sela.

5. Temos $f(x,y) = y^2 - x^2$ sujeita à condição $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, a qual define a equação de uma elipse. Estamos nas condições do teorema de Weierstrass, já que por um lado a função f é uma função contínua em R^2 (aliás $f \in C^\infty$) e por outro lado a restrição define um conjunto compacto (limitado e fechado); e portanto, f admite necessariamente um máximo e um mínimo absolutos, ou seja, existe solução do problema proposto.

Construindo a função Lagrangeana, $L(x,y,\lambda) = y^2 - x^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)$, obtém-se a partir dela o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L'_x = -2x + \frac{\lambda x}{2} = 0 \\ L'_y = 2y + 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

cuja resolução se apresenta seguidamente:

$$\begin{cases} x\left(-2+\dfrac{\lambda}{2}\right)=0 \\ 2y(1+\lambda)=0 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \\ \lambda=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 2 \\ \lambda=4 \end{cases}$$

- Os pontos críticos são:

$$A(0,\ 1)_{\lambda=-1},\ B(0,\ -1)_{\lambda=-1},\ C(2,\ 0)_{\lambda=4} \text{ e } D(-2,\ 0)_{\lambda=4}.$$

Conclui-se que 1 e -4 são respectivamente o máximo e o mínimo absolutos de *f*, já que:
$f(0,\ 1)=f(0,\ -1)=1$
$f(2,\ 0)=f(-2,\ 0)=-4$

6. a) Separando as variáveis em $ay^2+b-x^2yy'=0$, obtém-se:

$$ay^2+b=x^2y\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{y}{ay^2+b}dy=\frac{1}{x^2}dx$$

Primitivando, ambos os membros da igualdade respectivamente em ordem a y e a x, vem:
$\int \frac{y}{ay^2+b}dy=\int \frac{1}{x^2}dx$, obtendo-se a solução geral da equação dada, na sua forma implícita, ou seja, $\frac{1}{2a}\ln\left|ay^2+b\right|=-\frac{1}{x}+c$.

b) $y''+2y=e^x$

$y_h(x)$: $P(D)=0 \Leftrightarrow D^2+2=0 \Leftrightarrow D=\pm\sqrt{2}\ i$.

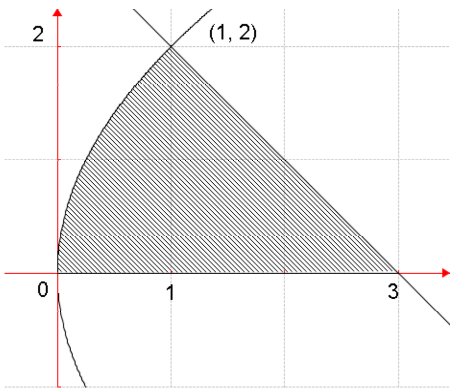
A solução da equação homogénea é: $y_h(x)=c_1\cos\left(\sqrt{2}x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{2}x\right)$.

$y_p(x)$: $y_p(x)=ke^x \Rightarrow y_p''(x)=ke^x$;

substituindo, vem: $ke^x+2ke^x=e^x \Rightarrow k=\frac{1}{3}$; a solução particular da equação não homogénea é: $y_p(x)=\frac{1}{3}e^x$.

A solução geral da equação dada é: $y(x)=c_1\cos\left(\sqrt{2}x\right)+c_2\sin\left(\sqrt{2}x\right)+\frac{1}{3}e^x$, com $c_1,\ c_2\in \mathbb{R}$.

7. $D=\left\{(x,y)\in R^2:\ y^2\le 4x,\ 0\le y\le 3-x,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}$ tem como representação geométrica:



O cálculo da área a sombreado é dado pelo integral duplo:

$$\int_0^2 \int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} dxdy = \int_0^2 [x]_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} dy = \int_0^2 \left(3 - y - \tfrac{y^2}{4}\right) dy = \left[3y - \tfrac{y^2}{2} - \tfrac{y^3}{12}\right]_0^2 = \frac{10}{3}$$

ou alternativamente:

$$\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{x}} dydx + \int_1^3 \int_0^{3-x} dydx = \int_0^1 [y]_0^{2\sqrt{x}} dx + \int_1^3 [y]_0^{3-x} dx = \int_0^1 2\sqrt{x}dx + \int_1^3 (3-x)dx =$$

$$= \left[\tfrac{4}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[3x - \tfrac{x^2}{2}\right]_1^3 =$$

$$= \frac{10}{3}$$

8. Cálculo das derivadas parciais $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}$:

Fazendo $u = \dfrac{x+y}{xy}$, temos:

$$f(u) = f\left(\frac{x+y}{xy}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{xy - (x+y)y}{x^2 y^2} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy - (x+y)x}{x^2 y^2} = -\frac{1}{y^2}.$$

Logo,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y \cdot f(u) + xy \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot f(u) + xy \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(\frac{xy - (x+y)y}{x^2 y^2}\right) = y \cdot f(u) + xy \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) =$$

$$= y \cdot f(u) - \frac{y}{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x \cdot f(u) + xy \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot f(u) + xy \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(\frac{xy - (x+y)x}{x^2 y^2}\right) = x \cdot f(u) + xy \cdot \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(\frac{-1}{y^2}\right) =$$

$$= x \cdot f(u) - \frac{x}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}$$

Substituindo $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ na equação dada, obtém-se:

$$x^2 \frac{\partial g}{\partial x} - y^2 \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 y \cdot f(u) - xy \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - y^2 x \cdot f(u) + xy \cdot \frac{\partial f}{\partial u} =$$

$$= (x-y)xy \cdot f(u) =$$

$$= (x-y)xy \cdot f\left(\frac{x+y}{xy}\right) =$$

$$= (x-y) \cdot g(x,y)$$