

TÓPICOS DE RESOLUÇÃO

1. Temos $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeita à condição $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} = 1$, a qual define um elipsóide. Estamos nas condições do teorema de Weierstrass, já que por um lado a função f é uma função contínua em $\mathbb{R}^3$ (aliás $f \in C^\infty$) e por outro lado a restrição define um conjunto compacto (limitado e fechado); e portanto, f admite necessariamente um máximo e um mínimo absolutos, ou seja, existe solução do problema proposto.

Construindo a função Lagrangeana, $L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} - 1 \right)$, obtém-se a partir dela o sistema S) cuja resolução se apresenta seguidamente:

$$\begin{aligned}
 S) \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{2\lambda x}{64} = 0 \\ 2y + \frac{2\lambda y}{36} = 0 \\ 2z + \frac{2\lambda z}{25} = 0 \\ \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \left(1 + \frac{\lambda}{64} \right) = 0 \\ 2y \left(1 + \frac{\lambda}{36} \right) = 0 \\ 2z \left(1 + \frac{\lambda}{25} \right) = 0 \\ \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 1 \text{ (impossível)} \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = -64 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ \frac{x^2}{64} = 1 \text{ (} x = \pm 8 \text{)} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -36 \\ z = 0 \\ \frac{y^2}{36} = 1 \text{ (} y = \pm 6 \text{)} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda = -25 \\ \frac{z^2}{25} = 1 \text{ (} z = \pm 5 \text{)} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Os pontos críticos são:

$$A(8, 0, 0)_{\lambda=-64}, B(-8, 0, 0)_{\lambda=-64}, C(0, 6, 0)_{\lambda=-36}, D(0, -6, 0)_{\lambda=-36}, E(0, 0, 5)_{\lambda=-25}, F(0, 0, -5)_{\lambda=-25}$$

Conclui-se que 64 e 25 são respectivamente o máximo e o mínimo absolutos de f , já que:

$$f(8, 0, 0) = f(-8, 0, 0) = 64$$

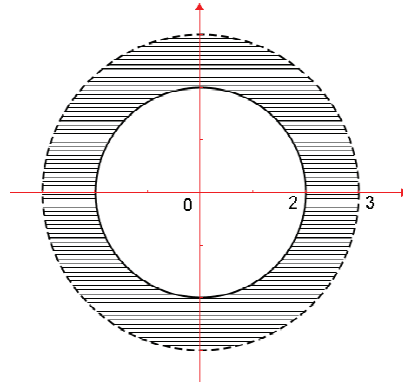
$$f(0, 6, 0) = f(0, -6, 0) = 36$$

$$f(0, 0, 5) = f(0, 0, -5) = 25$$

2. a) Analiticamente, o domínio D_f é :

$$\begin{aligned}
 D_f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9 \wedge x^2 + y^2 \geq 4\} = \\
 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 < 9\}
 \end{aligned}$$

Graficamente, D_f é a área a sombreado:



b) O conjunto D_f diz-se compacto se for limitado e fechado.

D_f é limitado já que está contido numa bola de centro na origem e de raio superior a 3.

D_f não é fechado já que:

$$\text{Ad}(D_f) = \text{Int}(D_f) \cup \text{Fr}(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\} \neq D_f$$

logo D_f não é um conjunto compacto.

3.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\int_{1/x}^{+\infty} x^2 e^{-yx^2} dy \right) dx &= \int_1^2 \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} - \int_{1/x}^b -x^2 e^{-yx^2} dy \right) dx = \int_1^2 \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} -e^{-yx^2} \Big|_{y=1/x}^{y=b} \right) dx = \\ &= \int_1^2 \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} -e^{-bx^2} + e^{-\frac{1}{x}} \right) dx = \int_1^2 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^2 = -e^{-2} + e^{-1} \end{aligned}$$

4. a) g homogénea de grau 4 em $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow x \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 4g(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} f \text{ dif.} \Rightarrow \text{existem} \\ \text{derivadas parciais de } f. \end{matrix} \quad x \left[f(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] + y \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 4xf(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow_{(x,y)=(2,0)} 2f(2,0) + 4 \frac{\partial f}{\partial x}(2,0) + 0 = 8f(2,0) \Leftrightarrow 2 \frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = 3f(2,0). \quad \text{c.q.d}$$

b)

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 x f(x, y)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial \phi(0, 0)}{\partial x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(t, 0) - \phi(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0^3 \times t \times f(t, 0) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial \phi(0, 0)}{\partial y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(0, t) - \phi(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \times 0 \times f(0, t) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\varepsilon(h, k) = \frac{\phi(h, k) - \phi(0, 0) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial \phi}{\partial y}(0, 0)k}{\|(h, k)\|} = \frac{k^3 h f(h, k)}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Ora,

$$0 \leq \varepsilon(h, k) = \left| \frac{k^3 h f(h, k)}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} \right| = \frac{|k|^3 \cdot |h| \cdot |f(h, k)|}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \frac{\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)^3 \cdot |h| \cdot |f(h, k)|}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} = |h| \cdot |f(h, k)|$$

Como f é limitada, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f(h, k)| \leq M$, $\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2$ e, portanto,

$$0 \leq |\varepsilon(h, k)| \leq |h| \cdot M.$$

Sendo $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} |h| \cdot M = 0 \cdot M = 0$, fica provado que $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon(h, k) = 0$ e, portanto, a função ϕ é diferenciável em $(0, 0)$.