TÓPICOS DE RESOLUÇÃO

1. Temos a função $f(x,y)=x^2+3y^2$ sujeita à condição $x^2-2x+y^2=3$, a qual define uma circunferência de centro $(1,\ 0)$ e de raio $r=2$. Estamos nas condições do teorema de Weierstrass, já que por um lado a função f é uma função contínua em $\mathbb{R}^2$ (aliás $f\in C^{\infty}$) e por outro lado a restrição define um conjunto compacto (limitado e fechado); e portanto, *f* admite necessariamente um máximo e um mínimo absolutos, ou seja, existe solução do problema proposto.

Construindo a função Lagrangeana, $L(x,y,\lambda)=x^2+3y^2+\lambda\left(x^2-2x+y^2-3\right)$, obtém-se a partir dela o sistema S) cuja resolução se apresenta seguidamente:

$$S)\begin{cases}L'_x=0\\ L'_y=0\\ L'_\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2\lambda x-2\lambda=0\\ 6y+2\lambda y=0\\ x^2-2x+y^2-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\lambda x-\lambda=0\\ 2y(3+\lambda)=0\\ x^2-2x+y^2-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\lambda x-\lambda=0\\ y=0\\ x^2-2x-3=0\end{cases}\vee\begin{cases}x-3x+3=0\\ \lambda=-3\\ x^2-2x+y^2-3=0\end{cases}$$

- Se $y=0$, temos $x=3$ ou $x=-1$ (equação 3) e consequentemente $\lambda=-\dfrac{3}{2}$ ou $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ (equação 1).
- Se $\lambda=-3$, temos $x=\dfrac{3}{2}$ (equação 1) e consequentemente $y^2=\dfrac{15}{4}$ ou seja $y=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}$ (equação 3).

Os pontos críticos são:

$A(3,\ 0)_{\lambda=-3/2},\ B(-1,\ 0)_{\lambda=-1/2},\ C\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)_{\lambda=-3},\ D\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)_{\lambda=-3}$

Conclui-se que 13,5 e 1 são respectivamente o máximo e o mínimo absolutos de *f*, já que:

$f(3,0)=9$

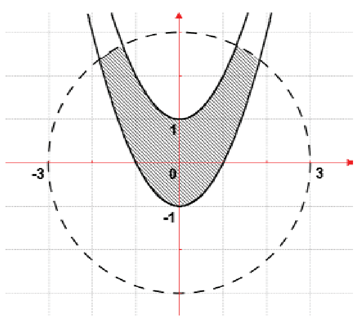
$f(-1,0)=1$

$$f\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{15}}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)=\frac{27}{2}=13{,}5$$

2. a) Analiticamente, o domínio D_f é :

$$\begin{aligned}D_f&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1-\left|y-x^2\right|\geq 0\ \wedge\ 9-x^2-y^2>0\ \wedge\ 1+|x|\neq 0\right\}=\\&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \left|y-x^2\right|\leq 1\ \wedge\ x^2+y^2<9\right\}=\\&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ -1\leq y-x^2\leq 1\ \wedge\ x^2+y^2<9\right\}=\\&=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2-1\leq y\leq 1+x^2\ \wedge\ x^2+y^2<9\right\}\end{aligned}$$

Graficamente, D_f é a área a sombreado:



b) D_f é um conjunto limitado já que está contido numa bola de centro na origem e de raio 3.

$$\mathrm{Ad}(D_f) = \mathrm{Int}(D_f) \cup \mathrm{Fr}(D_f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 + x^2 \le y \le 1 + x^2 \ \wedge \ x^2 + y^2 \le 9\right\}.$$

3. a) $$\frac{\partial z}{\partial x}(0,\frac{\pi}{2}) = \frac{\partial z}{\partial u}\left(u(0,\frac{\pi}{2}),\ v(0,\frac{\pi}{2})\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(0,\frac{\pi}{2}) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(u(0,\frac{\pi}{2}),\ v(0,\frac{\pi}{2})\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(0,\frac{\pi}{2})$$

Temos:

$$u(0,\frac{\pi}{2}) = e^{0\times\frac{\pi}{2}} = 1\ ;\ v(0,\frac{\pi}{2}) = \cos\left(0\times\frac{\pi}{2}\right) = 1 \ \text{ e } \ \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = ye^{xy}\ ;\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -y\sin(xy).$$

Logo,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,\frac{\pi}{2}) = \frac{\partial z}{\partial u}(1,\ 1)\cdot(\frac{\pi}{2}e^0) + \frac{\partial z}{\partial v}(1,\ 1)\cdot(-\frac{\pi}{2}\sin 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi = \frac{\partial z}{\partial u}(1,\ 1)\cdot\frac{\pi}{2} + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u}(1,\ 1) = 2$$

b) Como z homogénea de grau 3 temos, pela identidade de Euler, que

$$u\frac{\partial z}{\partial u}(u,v) + v\frac{\partial z}{\partial v}(u,v) = 3z(u,v) \underset{\substack{\text{Fazendo}\\(u,v)=(1,1)}}{\Rightarrow} 1\cdot\frac{\partial z}{\partial u}(1,1) + 1\cdot\frac{\partial z}{\partial v}(1,1) = 3z(1,1) \Rightarrow$$

$$\underset{\text{hip. e pela alínea a)}}{\Rightarrow} 2 + \frac{\partial z}{\partial v}(1,1) = 3\times\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial v}(1,1) = \frac{11}{2}$$

4. a) Temos,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^2}} \frac{x^2+y^2}{x^2+y\left(1+\sin^2 y\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+k^2x^4}{x^2+kx^2\left(1+\sin^2\left(kx^2\right)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(1+k^2x^2\right)}{x^2\left(1+k\left(1+\sin^2\left(kx^2\right)\right)\right)} = \frac{1}{1+k}.$$

Como este limite depende de k, o limite pedido não existe.

b) Fazendo os limites direccionais, $y = mx$, obtemos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2\left(1+\sin^2 y\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+m^2x^2}{x^2+m^2x^2\left(1+\sin^2\left(mx\right)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(1+m^2\right)}{x^2\left(1+m^2\left(1+\sin^2\left(mx\right)\right)\right)} = \frac{1+m^2}{1+m^2} = 1$$

Logo, se limite existir é 1.

Agora, por enquadramento,

$$0 \le \left|f(x,y)-1\right| = \left|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2\left(1+\sin^2 y\right)} - 1\right| = \left|\frac{x^2+y^2-x^2-y^2-y^2\sin^2 y}{x^2+y^2\left(1+\sin^2 y\right)}\right| = \frac{y^2\sin^2 y}{x^2+y^2+y^2\sin^2 y} \le$$

$$\underset{\substack{\text{como}\\ y^2\le y^2+\left(x^2+y^2\sin^2 y\right)}}{\le} \frac{\left(\cancel{y^2+x^2+y^2\sin^2 y}\right)\sin^2 y}{\cancel{x^2+y^2+y^2\sin^2 y}} \ \text{ e como } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin^2 y = 0$$

temos o resultado.