

TÓPICOS DE RESOLUÇÃO

1. a) Temos,

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & b \\ 0 & a & -2 \\ b & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b \\ -a-4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

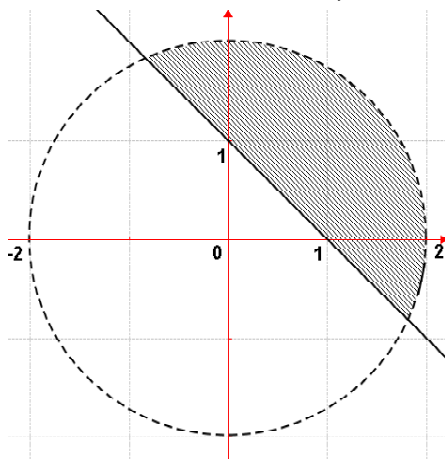
Ora $(2b, -a-4, 6)$ é múltiplo de $(0, -1, 2)$ se e só se $(2b, -a-4, 6) = 3(0, -1, 2)$ ou seja se $a = -1$ e $b = 0$.

Conclui-se que $(0, -1, 2)$ é vetor próprio da matriz A , associado ao valor próprio $\lambda = 3$, se e só se $a = -1$ e $b = 0$.

b) A matriz A é simétrica $\forall a$ e $b \in \mathbb{R}$. Pela classificação dos sinais dos menores primários principais, temos $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 3a$ e $\Delta_3 = -ab^2 + 6a - 12$. Assim,

- i) Se $a = 3$ e $b = 0$, temos: $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 9$ e $\Delta_3 = 6$, pelo que A é definida positiva;
- ii) Não existem valores de a e b tais que A seja definida negativa, já que $\Delta_1 > 0$;
- iii) Se $a = -1$ e $b = 0$, temos: $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = -3$ e $\Delta_3 = -18 (\neq 0)$, pelo que A é indefinida.

2. a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \wedge y \geq -x + 1\}$.



b) Temos:

- $\text{Int}(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \wedge y > -x + 1\}$
- $\text{Fr}(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4 \wedge y \geq -x + 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y = -x + 1\}$
- O conjunto D_f não é um conjunto aberto, já que: $\text{Int}(D_f) \neq D_f$.
- O conjunto D_f é limitado, porque $D_f \subset B_r(0, 0)$, $\forall r > 2$.

3. Temos $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \neq 0\} \Leftrightarrow D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(2, 0)\}$.

A função f admite prolongamento por continuidade a $\mathbb{R}^2$ se e só se $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ existir e for

finito. Temos que estudar a existência de limite de f no ponto $(2, 0)$.

Pelos limites direcionais vem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x-2)y}{(x-2)^2 + y^2} \stackrel{y=m(x-2)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{m(x-2)^2}{(x-2)^2 + m^2(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{m(x-2)^2}{(x-2)^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Os limites direcionais no ponto $(2, 0)$ dependem dos valores de m pelo que não existe o limite de f no ponto $(2, 0)$ e portanto a função f não pode ser prolongada por continuidade ao ponto $(2, 0)$. Conclui-se que não existe prolongamento por continuidade de f a $\mathbb{R}^2$.

4. Temos a função $f(x, y) = 6y - (x-1)^2$ sujeita à condição $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$, a qual define a equação de um círculo de centro $(1, 2)$ e de raio 5. Estamos nas condições do teorema de Weierstrass, já que por um lado a função f é uma função contínua em $\mathbb{R}^2$ ($f \in C^\infty$) e por outro lado a restrição define um conjunto compacto (limitado e fechado); e portanto, f admite necessariamente um máximo e um mínimo absolutos, ou seja, existe solução do problema proposto.

Construindo a função Lagrangeana,

$$L(x, y, \lambda) = 6y - (x-1)^2 + \lambda((x-1)^2 + (y-2)^2 - 25)$$

obtem-se o sistema,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L'_x = -2(x-1) + 2\lambda(x-1) = 0 \\ L'_y = 6 + 2\lambda(y-2) = 0 \\ L'_\lambda = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

cujas soluções se apresentam seguidamente:

$$\begin{cases} x = 1 \\ 6 + 2\lambda(y-2) = 0 \\ (y-2)^2 = 25 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = 1 \\ 6 + 2(y-2) = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{cases}$$

1º Caso: $x = 1 \xRightarrow{3^\text{a equação}} y - 2 = \pm 5 \Rightarrow (y = 7 \text{ com } \lambda = -\frac{3}{5}) \vee (y = -3 \text{ com } \lambda = \frac{3}{5})$

Os pontos críticos são:

$$A(1, 7)_{\lambda=-\frac{3}{5}} \text{ e } B(1, -3)_{\lambda=\frac{3}{5}}$$

2º Caso: $\lambda = 1 \xRightarrow{2^\text{a equação}} y - 2 = -3 \Rightarrow y = -1 \xRightarrow{3^\text{a equação}} (x-1)^2 = 16 \Rightarrow x-1 = \pm 4 \Rightarrow x = 5 \vee x = -3$

Os pontos críticos são:

$$C(5, -1)_{\lambda=1} \text{ e } D(-3, -1)_{\lambda=1}$$

Como $f(1, 7) = 42$, $f(1, -3) = -18$, $f(5, -1) = -22$ e $f(-3, -1) = -22$, conclui-se que -22

e 42 são respectivamente o mínimo e o máximo absolutos da função f no conjunto dado.

5. Temos,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^3 \left(x^2 y - \frac{\sin y}{x} \right) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{x^3}{3} y - \sin y \cdot \ln x \right]_{x=1}^{x=3} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(9y - \sin y \cdot \ln 3 - \frac{y}{3} \right) dy = \\ &= \left[\frac{9y^2}{2} + \cos y \cdot \ln 3 - \frac{y^2}{6} \right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{9\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24} - \ln 3 = \\ &= \frac{13\pi^2}{12} - \ln 3\end{aligned}$$

ou alternativamente:

$$\begin{aligned}\int_1^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 y - \frac{\sin y}{x} \right) dy dx &= \int_1^3 \left[x^2 \frac{y^2}{2} + \frac{\cos y}{x} \right]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} dx = \int_1^3 \left[\left(\frac{\pi^2}{8} x^2 \right) - \left(\frac{1}{x} \right) \right] dx = \\ &= \left[\frac{\pi^2}{8} \frac{x^3}{3} - \ln x \right]_{x=1}^{x=3} = \frac{9\pi^2}{8} - \ln 3 - \frac{\pi^2}{24} = \\ &= \frac{13\pi^2}{12} - \ln 3\end{aligned}$$

6. a) $y'' - 3y' - 4y = 4x$

$y_h(x): y'' - 3y' - 4y = 0$

$$P(D) = 0 \Leftrightarrow D^2 - 3D - 4 = 0 \Leftrightarrow (D+1)(D-4) = 0 \Leftrightarrow D = -1 \text{ ou } D = 4$$

A solução da equação homogênea é: $y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$y_p(x):$

$$y_p(x) = Ax + B \Rightarrow y'_p(x) = A \text{ e } y''_p(x) = 0.$$

$$\text{Substituindo, vem: } -3A - 4Ax - 4B = 4x \Rightarrow \begin{cases} -4A = 4 \\ -3A - 4B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Uma solução particular da equação não homogênea é: $y_p(x) = -x + \frac{3}{4}$.

A solução geral da equação dada é: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - x + \frac{3}{4}$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Cálculo de c_1 e c_2 :

$$\begin{cases} y(0) = \frac{3}{4} \\ y'(0) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 e^0 + c_2 e^0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \\ -c_1 e^0 + 4c_2 e^0 - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 + 4c_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ 5c_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

A solução do P.V.I é : $\boxed{y(x) = -e^{-x} + e^{4x} - x + \frac{3}{4}}$

b) Separando as variáveis em $y' = \frac{y}{x^2 + 2x + 1}$, obtém-se, se $y \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

Primitivando, ambos os membros da igualdade respectivamente em ordem a y e a x , vem:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{(x+1)^2} dx \Leftrightarrow \ln|y| = \int (x+1)^{-2} dx \Leftrightarrow \ln|y| = -\frac{1}{x+1} + c,$$

obtendo-se: $|y| = e^{-\frac{1}{x+1} + c} \Leftrightarrow y = \pm e^c \cdot e^{-\frac{1}{x+1}}$, com $k = \pm e^c \neq 0$.

Se $y = 0$, $y(x)$ verifica a equação dada ($y' = 0$).

Conclui-se que a solução do problema é dada por: $y(x) = k \cdot e^{-\frac{1}{x+1}}$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

7. Seja $u = t^2$ e $v = t^3 + 1$.

$$\bullet \quad \frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} 2t + \frac{\partial f}{\partial v} 3t^2$$

e portanto $\frac{dg(0)}{dt} \Big|_{t=0 \Leftrightarrow (u,v)=(0,1)} = \frac{\partial f(0,1)}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial f(0,1)}{\partial v} \cdot 0 = 0 \Rightarrow t = 0$ é ponto crítico de f .

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{d^2 g}{dt^2} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{du}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{dv}{dt} \right) \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{du}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{dv}{dt} \right) \frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{d^2 v}{dt^2} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} 2t + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} 3t^2 \right) 2t + \frac{\partial f}{\partial u} 2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} 2t + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} 3t^2 \right) 3t^2 + \frac{\partial f}{\partial v} 6t. \end{aligned}$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g(0)}{dt^2} &= \left(\frac{\partial^2 f(0,1)}{\partial u^2} \cdot 0 + \frac{\partial^2 f(0,1)}{\partial v \partial u} \cdot 0 \right) \cdot 0 + \frac{\partial f(0,1)}{\partial u} \cdot 2 + \left(\frac{\partial^2 f(0,1)}{\partial u \partial v} \cdot 0 + \frac{\partial^2 f(0,1)}{\partial v^2} \cdot 0 \right) \cdot 0 + \frac{\partial f(0,1)}{\partial v} \cdot 0 = \\ &= \frac{\partial f(0,1)}{\partial u} \cdot 2 \Big|_{\nabla f(0,1)=(3,-5)} = 3 \cdot 2 = 6 > 0 \end{aligned}$$

Conclui-se que $t = 0$ é minimizante local da função g .