



Lisbon School
of Economics
& Management
Universidade de Lisboa

MESTRADO EM
MÉTODOS QUANTITATIVOS PARA A DECISÃO
ECONÓMICA E EMPRESARIAL

TRABALHO FINAL DE MESTRADO
DISSERTAÇÃO

META-HEURÍSTICA PARA O PROBLEMA DO CAIXEIRO
VIAJANTE COM FAMÍLIAS, MÚLTIPLOS DEPÓSITOS E
RESTRIÇÕES DE AGRUPAMENTO LEVES

MADALENA ALMEIDA NEVES DA SILVA ANACLETO

ORIENTAÇÃO:

PROFESSORA DOUTORA RAQUEL MONTEIRO DE NOBRE COSTA BERNARDINO

DOCUMENTO ESPECIALMENTE ELABORADO PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

OUTUBRO – 2024

Resumo

Neste trabalho foi feito um estudo do Problema do Caixeiro Viajante com Múltiplos Depósitos, Famílias e Restrições de Agrupamento Leves (em inglês *Soft Cluster Muti-Depot Family Traveling Salesman Problem*, SC-MDFTSP). Esta escolha prendeu-se com o facto de a variante selecionada ser a que revela uma maior dificuldade quando comparada com as outras variantes do MDFTSP, uma vez que menos ótimos foram obtidos. O objetivo deste estudo é desenvolver um método eficiente e eficaz para este problema. Para isso, foi implementada uma meta-heurística de pesquisa local iterativa (ILS), baseada num conjunto de vizinhanças e duas perturbações: Perturbação Aleatória e Perturbação Frequência na Rota. Estes algoritmos foram aplicados a um conjunto de instâncias com número de nodos entre 50 e 150, cinco a 30 depósitos e 15 a 75 famílias. Os resultados obtidos através de experiências computacionais não foram tão favoráveis como o esperado, no entanto, permitem-nos concluir que instâncias com maior número de nodos apresentam valores de *gaps* mínimos, máximos e médio menos elevados. No que diz respeito ao tempo médio despendido em segundos, o aumento do número de famílias não teve impacto significativo no tempo de resolução. Quanto ao aumento do número de depósitos, verificou-se um aumento no tempo para instâncias simétricas e uma diminuição para instâncias assimétricas.

Palavras-chave: Problema do Caixeiro Viajante com Famílias, Múltiplos Depósitos, *Soft Cluster*, Vizinhanças, Pesquisa Local Iterativa.

Abstract

This work presents a study of the Multi-Depot Family Traveling Salesman Problem and Soft Cluster Variant (SC-MDFTSP). This choice was due to the fact that the selected variant revealed greater difficulty when compared to the other variants of the MDFTSP, since fewer optima were obtained. The objective of this study is to develop an efficient and effective method for this problem. For this purpose, an Iterated Local Search (ILS) metaheuristic was implemented, based on a set of neighborhoods and two perturbations: Random Perturbation and Route Frequency Perturbation. These algorithms were applied to a set of instances with a number of nodes ranging from 50 to 150, five to 30 depots, and 15 to 75 families. The results obtained through computational experiments were not as favorable as expected, however, they allow us to conclude that instances with a greater number of nodes present lower minimum, maximum and average gap values. Regarding the average time spent, the increase in the number of families had no significant impact on this time. As for the increase in the number of depots, there was an increase in time for symmetric instances and a decrease for asymmetric instances.

Keywords: Family Traveling Salesman Problem, Multi-depot, Soft Cluster, Neighborhoods, Iterative Local Search.

Índice

Índice de Tabelas	v
Índice de Figuras.....	vii
Capítulo 1. Introdução.....	1
Capítulo 2. Revisão de Literatura	5
2.1 Problema do caixeiro-viajante com famílias.....	5
2.2 Problemas de roteamento e restrições de agrupamento leves	6
2.3 Problema do caixeiro-viajante com famílias e múltiplos depósitos	7
Capítulo 3. Metodologia.....	10
3.1 Pesquisa local iterativa	10
3.2 Heurística construtiva	11
3.3 Procedimento de pesquisa local	13
3.4 Perturbações	17
Capítulo 4. Resultados Computacionais	20
4.1 Instâncias.....	20
4.2 Afinação dos parâmetros	21
4.3 Resultados para instâncias com 50 nodos.....	25
4.4 Resultados para instâncias com 100 nodos.....	30
4.5 Resultados para instâncias com 150 nodos.....	35
4.6 Comparação dos resultados.....	40
Capítulo 5. Conclusão	42
Referências	43
Anexo	44

Índice de Tabelas

Tabela 1 – Análise ao número máximo de iterações.	22
Tabela 2 – Análise do número de famílias a ser retirada (Perturbação Aleatória).....	24
Tabela 3 - Análise do número de famílias a ser retirada (Perturbação Frequência na Rota).	24
Tabela 4 - Resultados para instâncias com 50 nodos e número de depósitos diferentes.	26
Tabela 5 - Resultados para instâncias com 50 nodos simétricas e assimétricas.....	27
Tabela 6 - Resultados para instâncias com 50 nodos e número de famílias diferentes. .	28
Tabela 7 - Resultados do padrão de visitas para instâncias com 50 nodos.	29
Tabela 8 - Número de vezes em que cada perturbação obteve melhores resultados (50 nodos).	30
Tabela 9 - Resultados para instâncias com 100 nodos e número de depósitos diferentes.	31
Tabela 10 - Resultados para instâncias com 100 nodos simétricas e assimétricas.....	32
Tabela 11 - Resultados para instâncias com 100 nodos e número de famílias diferentes.	33
Tabela 12 - Resultados do padrão de visitas para instâncias com 100 nodos.	34
Tabela 13 - Número de vezes em que cada perturbação obteve melhores resultados (100 nodos).	35
Tabela 14 - Resultados para instâncias com 150 nodos e número de depósitos diferentes.	36
Tabela 15 - Resultados para instâncias com 150 nodos simétricas e assimétricas.....	37
Tabela 16 - Resultados para instâncias com 150 nodos e número de famílias diferentes.	38
Tabela 17 - Resultados do padrão de visitas para instâncias com 150 nodos.	39
Tabela 18 - Número de vezes em que cada perturbação obteve melhores resultados (150 nodos).	40
Tabela 19 - Média dos gaps mínimos para todas as instâncias.	41
Tabela 20 - Resultados para instâncias com 50 nodos (Perturbação Aleatória).....	44
Tabela 21 - Resultados para instâncias com 50 nodos (Perturbação Frequência na Rota).	46

Tabela 22 - Resultados para instâncias com 100 nodos (Perturbação Aleatória).....	48
Tabela 23 - Resultados para instâncias com 100 nodos (Perturbação Frequência na Rota).	50
Tabela 24 - Resultados para instâncias com 150 nodos (Perturbação Aleatória).....	53
Tabela 25 - Resultados para instâncias com 150 nodos (Perturbação Frequência na Rota).	56

Índice de Figuras

Figura 1 – Exemplo de soluções admissíveis para SC-MDFTSP. (1) nodos visitados consecutivamente; (2) nodos visitados não consecutivamente.	2
Figura 2 - Exemplos de soluções não admissíveis para o SC-MDFTSP. (1) nodos da mesma família em diferentes rotas; (2) número de nodos visitados não satisfeito.	3
Figura 3 - Exemplo de uma solução da vizinhança \mathcal{ND} . (1) rotas da solução inicial x ; (2) rotas de uma solução na vizinhança $\mathcal{ND}(x)$	14
Figura 4 - Exemplo de uma solução da vizinhança \mathcal{NMI} . (1) rota da solução inicial x ; (2) rota de uma solução na vizinhança $\mathcal{NMI}(x)$	14
Figura 5 - Exemplo de uma solução da vizinhança \mathcal{NSI} . (1) rota da solução inicial x ; (2) rota de uma solução na vizinhança $\mathcal{NSI}(x)$	15
Figura 6 - Exemplo de uma solução da vizinhança $\mathcal{N2} - opt$. (1) rota da solução inicial x ; (2) rota de uma solução na vizinhança $\mathcal{N2} - opt(x)$	15
Figura 7 - Exemplo de uma solução da vizinhança \mathcal{NSV} . (1) rota da solução inicial x ; (2) rota de uma solução na vizinhança $\mathcal{NSV}(x)$	16

Capítulo 1. Introdução

Ao longo deste capítulo, será feita a apresentação do Problema do Caixeiro Viajante com Famílias, Múltiplos Depósitos e Restrições de Agrupamento Leves (em inglês *Soft-Clustered Multi-Depot Family Travelling Salesman Problem*, SC-MDFTSP), abordando as suas características e restrições. São apresentados, ainda, exemplos de soluções admissíveis e não admissíveis para o SC-MDFTSP.

No problema do caixeiro-viajante com múltiplos depósitos e famílias (em inglês *Multi-Depot Family Travelling Salesman Problem*, MDFTSP) existem vários depósitos e o conjunto de clientes está particionado em famílias. O objetivo é determinar diversas rotas, em que cada rota contém um único depósito. É visitado um número específico de nodos em cada família. O MDFTSP é definido como um problema de otimização combinatória, que visa minimizar os custos associados ao conjunto de rotas.

Se assumirmos que os clientes pertencentes à mesma família têm obrigatoriamente de ser visitados na mesma rota, obtemos a variante do MDFTSP com restrições de agrupamento leves (em inglês *Soft-Clustered*, SC-MDFTSP), que será estudada neste trabalho. É importante ressaltar que, nesta variante, as restrições de agrupamento limitam-se a garantir que os clientes da mesma família sejam visitados na mesma rota, sem impor qualquer obrigatoriedade na ordem de visita aos nodos. Assim, clientes pertencentes à mesma família não necessitam de ser visitados consecutivamente.

O MDFTSP pode ser representado por um grafo orientado $G = (D \cup N, A)$, onde D representa o conjunto de depósitos, N o conjunto de nodos que pertencem a famílias e A o conjunto de arcos, excluindo arcos entre depósitos e arcos do tipo (i, i) , com $i \in N$, também chamados *loops*. O custo de utilização do arco $(i, j) \in A$ é denotado por c_{ij} . Sabe-se, ainda, que L representa o número de famílias e F_l são os nodos da família l , com $l \in \mathcal{L} = \{1, \dots, L\}$. Cada família $l \in \mathcal{L}$ contém n_l nodos. Sendo $|N|$ o número total de nodos, temos $\sum_{l=1}^L n_l = |N|$. Os nodos pertencentes a cada família são consecutivos, ou seja, a família 1 é composta pelos nodos de 1 até n_1 , a família 2 pelos nodos de $n_1 + 1$ até $n_1 + n_2$, e assim sucessivamente para todas as restantes famílias. É ainda definido o número de nodos de uma família que são visitados como v_l , com $l \in \mathcal{L}$, e o número total de nodos visitados como $V = \sum_{l=1}^L v_l$. Considera-se que $n_l, v_l \geq 1, \forall l \in \mathcal{L}$.

Na Figura 1, apresentam-se dois exemplos de soluções admissíveis para uma instância do SC-MDFTSP. Esta instância tem dois depósitos, designados por d_1 e d_2 , 14 nodos, que pertencem a quatro famílias, representadas pelas diferentes cores. A família 1, visível pela cor azul-escuro, contém três elementos (nodos de 1 a 3); a família 2, representada pela cor azul-claro, é composta por quatro elementos (nodos 4 a 7); a família 3, representada pela cor cinzento-claro, contém três elementos (nodos 8 a 10); e, por fim, a família 4, representada pela cor cinzento-escuro, composta por quatro elementos (nodos 11 a 14). Sabe-se, ainda, que a família 1, família 2 e família 4 contam com duas visitas e a família 3 com três visitas, ou seja, $v_1 = 2$, $v_2 = 2$, $v_3 = 3$ e $v_4 = 2$.

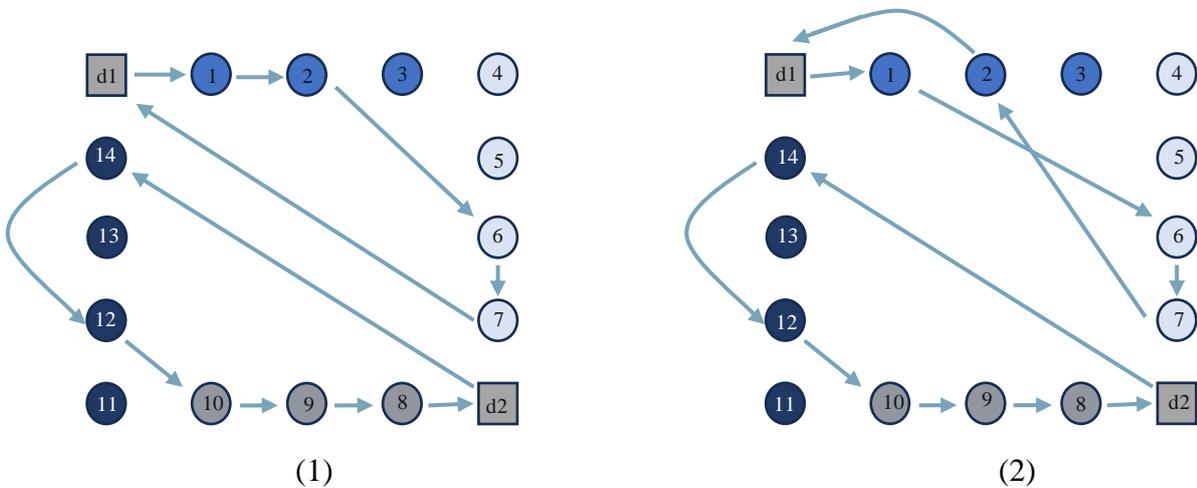


Figura 1 – Exemplo de soluções admissíveis para SC-MDFTSP. (1) nodos visitados consecutivamente; (2) nodos visitados não consecutivamente.

Na Figura 1, estão representados exemplos de soluções admissíveis para a instância do SC-MDFTSP descrita anteriormente, uma vez que cada rota contém apenas um depósito, o número de visitas necessário é satisfeito e nodos da mesma família são visitados na mesma rota.

O diagrama (1), apresentado na Figura 1, cumpre com todos os requisitos necessários. Visto que não é imperativa a visita consecutiva de nodos da mesma família, é apresentado um segundo diagrama (2), em que, para além de garantir que elementos da mesma família são visitados na mesma rota, os nodos não são visitados consecutivamente.

A Figura 2 contém exemplos de duas soluções não admissíveis para a instância do SC-MDFTSP apresentada anteriormente.

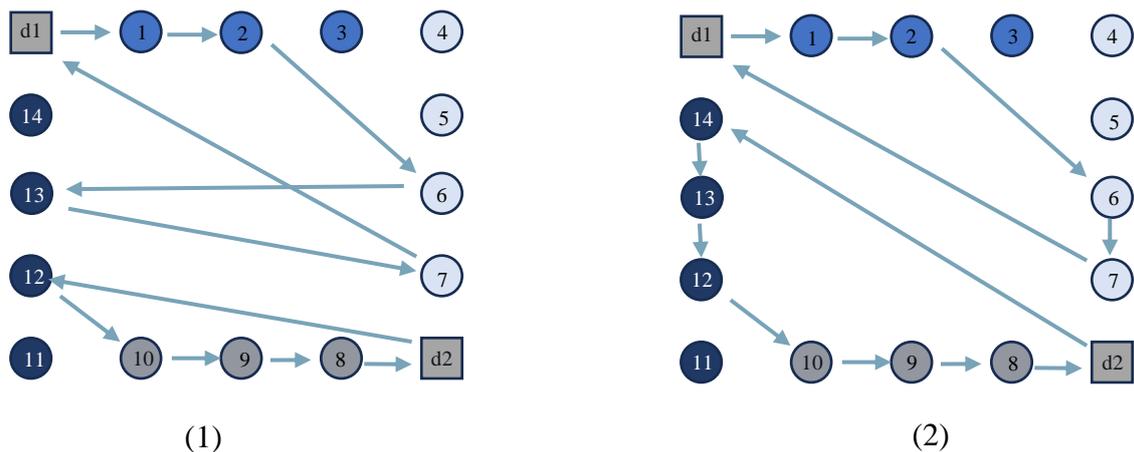


Figura 2 - Exemplos de soluções não admissíveis para o SC-MDFTSP. (1) nodos da mesma família em diferentes rotas; (2) número de nodos visitados não satisfeito.

No diagrama (1) da Figura 2, existem nodos da mesma família a pertencer a rotas diferentes. Neste caso, o nodo 13, elemento da família 4, pertence à rota do depósito d_1 , enquanto o nodo 12, da mesma família, está associado à rota do depósito d_2 , o que não é admissível para o SC-MDFTSP.

No diagrama (2) da Figura 2, o número de visitas obrigatório das famílias não é cumprido. Sabe-se que da família 4 é necessário visitar dois nodos, visto que $v_4 = 2$, e, neste diagrama, são visitados três nodos desta família, o que torna a solução apresentada no diagrama referido não admissível.

Para além destes casos, existe ainda a não admissibilidade de uma rota não conter nenhum depósito ou a existência de dois depósitos na mesma rota. Apesar de não estarem representados, são também exemplos de soluções não admissíveis para o SC-MDFTSP.

Partindo do MDFTSP, este estudo incide sobre a variante de Restrições de Agrupamento Leves. Esta escolha prende-se com o facto de a variante seleccionada revelar uma maior dificuldade quando comparada com outras variantes do problema do Caixeiro Viajante com Famílias e Múltiplos Depósitos, uma vez que menos ótimos foram obtidos (Bernardino, Gouveia, Paias, & Santos, 2022). O objetivo deste estudo é desenvolver um método eficiente e eficaz para este problema. Uma vez que se trata de um problema NP-difícil, optou-se pelo uso de heurísticas. A escolha do ILS prende-se com o facto de este apresentar bons resultados para problemas de roteamento (Benavent & Martínez, 2013).

Inicialmente foi feita a revisão da literatura, apresentada no Capítulo 2, de modo a encontrar a perspetiva dos vários autores. No Capítulo 3 é apresentada a metodologia

utilizada neste estudo. No Capítulo 4 são apresentados os resultados computacionais. Por último, o Capítulo 5 conta com as conclusões retiradas.

Capítulo 2. Revisão de Literatura

De modo a enquadrar o SC-MDFTSP, foi feita uma revisão de literatura, apresentada nas Secções 2.1 a 2.3, que incide essencialmente nos seguintes problemas: problema do caixeiro-viajante com famílias; problema de roteamento com restrições de agrupamento leves; e problema do caixeiro-viajante com famílias e múltiplos depósitos.

2.1 Problema do caixeiro-viajante com famílias

O conhecido problema do caixeiro-viajante (em inglês *Traveling Salesman Problem*, TSP) tem como objetivo selecionar uma rota de custo (ou distância, tempo, entre outros) mínimo, visitando todos os clientes uma única vez (Tiburcio da Silva, Chaves, Vianna, & Schenekemberg, 2024).

O problema do caixeiro-viajante com famílias (em inglês *Family Traveling Salesman Problem*, FTSP) é uma variante do TSP, onde o conjunto de nodos é particionado em vários subconjuntos denominados por famílias, admitindo ainda a existência de um único depósito.

O objetivo do FTSP é determinar a rota de custo mínimo que começa e termina no depósito, e que visita um determinado número de nodos de cada família (Bernardino et al., 2022, Bernardino & Paias, 2018).

Comparativamente ao TSP, no problema do caixeiro-viajante com famílias observa-se um nível de decisão adicional que consiste em selecionar os nodos a serem visitados (Bernardino & Paias, 2018).

O FTSP foi introduzido Mórán-Mirabal et al. (2014), motivado pelo problema de recolha de produtos em sistemas de armazenamento disperso, onde produtos iguais estão armazenados em diferentes locais do armazém. Atualmente, a identificação dos produtos é feita através de rádio frequência, o que permite encontrar os produtos muito facilmente, mesmo que armazenados separadamente.

Se considerarmos que cada produto é uma família e que o número de nodos da família a visitar é a procura do produto associado a essa família, então o problema da recolha de pedidos num armazém onde os produtos são armazenados separadamente poderá ser visto como um problema do caixeiro-viajante com famílias (Morán-Mirabal, González-Velarde, & Resende, 2014).

Para resolver o FTSP, são apresentados na literatura diversos métodos heurísticos. Em Morán-Mirabal et al. (2014), foram propostas duas heurísticas com o objetivo de encontrar soluções de boa qualidade (ótimas ou perto do ótimo), nomeadamente, o algoritmo genético *biased random key* (BRKGA) e um procedimento *greedy randomized adaptive search* (GRASP) com *evolutionary path-relinking* (evPR); Bernardino et al. (2022) e Bernardino & Paias (2018) aplicaram uma meta-heurística de pesquisa local iterativa. Tiburcio et al. (2024) desenvolveram uma meta-heurística que combina conceitos e parâmetros dos algoritmos BRKGA e *Q-learning*.

Bernardino & Paias (2021) propuseram duas meta-heurísticas para resolução do FTSP, que forneceram soluções melhores que os melhores limites superiores conhecidos da literatura na altura, e que correspondem a metodologias heurísticas distintas. Mais precisamente, foram propostos um algoritmo genético e um algoritmo de Pesquisa Local Iterativa (em inglês *Iterated Local Search*, ILS), que é uma melhoria em relação ao apresentado por Bernardino & Paias (2018), uma vez que é capaz de obter resultados significativamente melhores. Em relação ao descrito em trabalhos anteriores, o ILS proposto considera duas vizinhanças adicionais e um método de perturbação diferente, que é baseado numa pesquisa dinâmica de grandes vizinhanças. Devido à sua dimensão, uma das novas vizinhanças é pesquisada usando um método adaptativo de pesquisa em grandes vizinhanças.

2.2 Problemas de roteamento e restrições de agrupamento leves

No problema tradicional de roteamento de veículos (em inglês *Vehicle Routing Problem*, VRP), os veículos são enviados de um único depósito para distribuir as encomendas e a capacidade dos veículos não pode ser excedida (Gulczynski, Golden, & Wasil, 2011).

Em Benavent & Martínez (2011), o problema do roteamento de veículos com múltiplos depósitos (em inglês *Multi-Depot Vehicle Routing Problem*, MDVRP) consiste em “encontrar um conjunto de rotas baseadas num dado conjunto de depósitos para fazer face à procura de um conjunto de clientes com veículos de capacidade limitada”.

Este tipo de problemas envolvem o roteamento de uma frota de veículos de vários depósitos para servir um número de clientes, sendo que cada veículo volta sempre ao depósito de origem (Bernardino, Gouveia, Paias, & Santos, 2022).

O problema de roteamento de veículos com restrições de agrupamento leves (em inglês *Soft- Clustered Vehicle Routing Problem*, SoftCluVRP) foi introduzido por Defryn & Sorensen, em 2017. No clássico problema de roteamento de veículos, os clientes estão agrupados em *clusters* VRP (em inglês *Cluster Vehicle- Routing Problem*, CVRP) e todos os clientes do mesmo *cluster* devem ser servidos pelo mesmo veículo e em visitas consecutivas (Hintsch & Irnich, 2019). Tendo por base a redução de custos, embora mantendo a imposição dos clientes do mesmo *cluster* terem de ser visitados pelo mesmo veículo no SoftCluVRP, é abandonada a restrição das visitas terem de ser feitas consecutivamente aos clientes do mesmo *cluster*. Assim, nas restrições de agrupamento leves, clientes da mesma família são visitados pela mesma rota, sem a obrigatoriedade de visitas consecutivas. (Defryn & Sörensen, 2017).

Na procura da melhor solução para a resolução do SoftCluVRP, os autores têm recorrido a meta-heurísticas, nomeadamente o Procedimento de Pesquisa Local Iterativa e Pesquisa de Vizinhanças Variável (em inglês *Variable Neighborhood Search*, VNS) (Defryn & Sörensen, 2017).

A VNS é utilizada para encontrar um ótimo local. Esta meta-heurística revelou elevado sucesso na resolução de problemas de otimização combinatória, em especial os problemas de roteamento, através da exploração do espaço de soluções para clientes agrupados em *clusters* e para clientes isolados (Defryn & Sörensen, 2017).

2.3 Problema do caixeiro-viajante com famílias e múltiplos depósitos

O problema do caixeiro-viajante com famílias e múltiplos depósitos (em inglês *Multi-depot family travelling salesman problema*, MDFTSP) foi definido como o

problema de encontrar o conjunto de rotas de custo mínimo, onde cada rota contenha apenas um depósito, garantindo que o número necessário de nodos de cada família seja visitado na mesma rota (Bernardino, Gouveia, Paias, & Santos, 2022). O MDFTSP tem aplicação prática em problemas de recolha de pedidos e reposição de *stock*, em armazéns com armazenamento disperso, que surgem com o crescimento do volume de vendas no comércio eletrónico.

Este tipo de armazéns caracteriza-se por pedidos de pequenas dimensões e curtos prazos de entrega, onde os produtos com as mesmas unidades de *stock* estão espalhados por todo o armazém. O problema tem como objetivo de reduzir a distância média de qualquer local do armazém até o item mais próximo (Bernardino, Gouveia, Paias, & Santos, 2022).

Os sistemas de armazenamento disperso estão a tornar-se mais populares, à medida que as empresas retalhistas de comércio eletrónico que operam em grandes armazéns pretendem acelerar as operações dentro dos armazéns (Bernardino, Gouveia, Paias, & Santos, 2022). É destacada a importância de estudar este problema, quer por tem sido pouco abordado pela literatura, quer pelo desafio que representa.

Com o objetivo de procurar novas soluções para o MDFTSP, foram apresentadas novas variantes de FTSP com múltiplos depósitos e restrições de agrupamento, SC-MDFTSP e HC-MDFTSP (em inglês *Hard-Clustered*, HC-MDFTSP), que consiste em visitar nodos da mesma família consecutivamente.

Foram apresentadas formulações de programação linear inteira mista para o MDFTSP, desenvolvidos diversos algoritmos baseados em *branch-&cut* para estas variantes e apresentadas comparações computacionais entre elas. Identificaram-se as principais diferenças entre as variantes no que diz respeito às abordagens de modulação, bem como aos métodos de solução com uma avaliação dos limites dos modelos e algoritmos propostos. Através da análise dos resultados, foi possível concluir que, de todas as variantes estudadas, o SC-MDFTSP foi o que apresentou maior dificuldade, uma vez que foram encontrados menos ótimos. Foram, ainda, apresentadas um conjunto de instâncias de referência (Bernardino, Gouveia, Paias, & Santos, 2022).

Para cada um dos problemas em estudo, foram apontados alguns caminhos para futuras investigações, nomeadamente a sugestão de que um trabalho mais teórico deverá

ser centrado no SC-MDFTSP com novas desigualdades e novas abordagens de modelação.

Capítulo 3. Metodologia

Ao longo deste capítulo, serão apresentadas as abordagens heurísticas desenvolvidas para o problema SC-MDFTSP.

O SC-MDFTSP requer abordagens eficientes e eficazes para encontrar soluções de qualidade, devido à sua complexidade computacional e à natureza combinatória. Por esta razão, serão utilizados métodos heurísticos que possam lidar com essa complexidade de forma eficiente e eficaz, tentando proporcionar soluções admissíveis de boa qualidade no menor tempo computacional possível.

Na Secção 3.1, é apresentado para o SC-MDFTSP uma abordagem iterativa que combina a intensificação da pesquisa local com a diversificação proporcionada pela perturbação; na Secção 3.2, é apresentada a heurística construtiva, que desempenha um papel fundamental na geração de soluções admissíveis; na Secção 3.3 será abordado o procedimento de pesquisa local usado no algoritmo ILS; e, por fim, na Secção 3.4 são apresentadas as perturbações utilizadas, que desempenham um papel importante na diversificação da pesquisa e para escapar de ótimos locais.

3.1 Pesquisa local iterativa

Na resolução de problemas de otimização complexos, a pesquisa de soluções ótimas pode representar um desafio devido à elevada dimensão do espaço de soluções e à complexidade dos algoritmos exatos existentes. Neste contexto, surgem as meta-heurísticas, apresentando-se como ferramentas importantes para encontrar soluções de boa qualidade num espaço de tempo computacional reduzido.

Uma das meta-heurísticas amplamente utilizada na literatura para problemas de roteamento é o ILS. Esta abordagem possui um conjunto de características fundamentais que a tornam atrativa: é simples de entender, fácil de implementar e altamente eficaz na resolução de uma variedade de problemas de otimização. A ideia essencial do ILS consiste na pesquisa de ótimos locais e a sua eficácia depende essencialmente da perturbação. Devido à sua estrutura, o ILS leva tempos curtos, conferindo-lhe vantagem sobre as meta-heurísticas mais complexas (Gendreau & Potvin, 2019).

O ILS consiste em encontrar ótimos locais, aos quais é aplicado um método de perturbação, de modo a escapar desses ótimos locais. Este processo de aplicação do procedimento de pesquisa local e do método de perturbação é feito de forma iterativa, até um certo critério de paragem (Bernardino & Paias, 2021).

No Algoritmo 1, é apresentado o pseudo-código do algoritmo ILS para o SC-MDFTSP, adaptado de Bernardino e Paias (2021).

Algoritmo 1. Algoritmo de Pesquisa Local Iterativa para o SC-MDFTSP.

1. Determinar uma solução admissível s para o SC-MDFTSP.
 2. Aplicar o procedimento de pesquisa local a s e obter uma nova solução s^* .¹
 3. **while** Critério de paragem não for satisfeito
 4. Aplicar o procedimento da perturbação a s^* e obter uma solução p .
 5. Aplicar o procedimento de pesquisa local a p e obter uma nova solução p^* .
 6. **if** $\text{custo}(p^*) < \text{custo}(s^*)$ **then**
 7. Atualizar a melhor solução para p^* .
 8. **end if**
 9. Fazer $s^* = p^*$.
 10. **end while**
-

A ideia base deste método é partir de uma solução admissível inicial, neste caso parte da solução encontrada através da heurística construtiva apresentada na Secção 3.2, e utilizar o algoritmo de pesquisa local na solução inicial, com o intuito de obter um ótimo local. De seguida, é introduzida uma perturbação que consiste em trocar famílias de rotas, e é feita novamente uma pesquisa local nessa mesma solução perturbada. O processo repete-se até ser atingido o critério de paragem.

3.2 Heurística construtiva

Foi implementada uma heurística construtiva para o SC-MDFTSP, de modo a encontrar a solução que servirá de ponto de partida para o ILS. As heurísticas construtivas são algoritmos que constroem soluções de forma progressiva, adicionando componentes à solução, de modo a obter uma solução admissível.

¹ Se após aplicar o procedimento de pesquisa local a melhor solução continuar a ser s , será essa a solução guardada.

Com base na conhecida heurística do vizinho mais próximo, Bernardino et al. (2022) desenvolveram uma heurística construtiva para o SC-MDFTSP, de modo a satisfazer todas as suas restrições. O Algoritmo 2 apresenta o pseudo-código da heurística construtiva para o SC-MDFTSP, proposta por Bernardino et al. (2022).

Algoritmo 2. Heurística construtiva para o SC-MDFTSP.

1. Inicializar o conjunto de nodos visitados por cada família a um conjunto vazio, ou seja, para $l \in \mathcal{L}$, $\mathcal{V}(l) = \emptyset$.
 2. **for all** $d \in D$
 3. Inserir na rota do depósito d o nodo $i \in F_l: i \notin \mathcal{V}(l)$ e $|\mathcal{V}(l)| < v_l$ com o menor c_{di} .
 4. Inserir i em $\mathcal{V}(l)$.
 5. **end for**
 6. **while** $\sum_{l \in \mathcal{L}} |\mathcal{V}(l)| < V$
 7. Seja $\alpha = +\infty$, $NodoEscolhido = -1$ e $DepósitoEscolhido = -1$.
 8. **for all** $d \in D$
 9. **for all** $i \in N$
 10. **if** $i \notin \mathcal{V}(l), \forall l \in \mathcal{L}$ e $|\mathcal{V}(l)| < v_l$ e não há nodos da família l em outra rota
 11. Seja j o último nodo inserido na rota do depósito d .
 12. **if** $c_{ji} < \alpha$ **then**
 13. $\alpha = c_{ji}$, $NodoEscolhido = i$ e $DepósitoEscolhido = d$.
 14. **end if**
 15. **end if**
 16. **end for**
 17. **end for**
 18. Inserir $NodoEscolhido$ no local que originou o menor custo de inserção do depósito $DepósitoEscolhido$ e atualizar inserir $NodoEscolhido$ no $\mathcal{V}(l)$ correspondente.
 19. **end while**
-

Para construir uma solução admissível para o SC-MDFTSP, cada rota é inicializada com um depósito. Neste estudo, a rota 1 contém o depósito 1, a rota 2 o depósito 2, e assim sucessivamente até todos os depósitos estarem associados a uma rota distinta. Tendo em conta a matriz de custos, é inserido em cada rota um nodo $i \in N$ mais próximo do depósito d , de acordo com o custo c_{di} , sendo que só podem ser considerados nodos que ainda não estão na solução e cuja família ainda não está completa nem está associada a outro depósito. Resultam, assim, $|D|$ rotas, cada uma com um depósito e um nodo.

De seguida, tendo em conta o último nodo visitado de cada rota, é analisado o custo de inserção de todos os nodos não visitados em todas as rotas, sendo inserido o nodo no local que originou o menor custo de inserção. Apenas é possível inserir um nodo na rota se este ainda não pertencer a nenhuma rota (não está na solução), a sua família não estiver completa, e não existirem nenhuns nodos da sua família na rota de outro depósito. O processo é repetido até que todas as famílias estejam completas, ou seja, até ser cumprido o número de visitas de cada família.

3.3 Procedimento de pesquisa local

Depois de obter uma solução admissível para o SC-MDFTSP na fase construtiva, foi aplicado um procedimento de pesquisa local, baseado na pesquisa de um conjunto de vizinhanças adaptadas ao SC-MDFTSP.

O processo de pesquisa utilizado, considerando uma vizinhança genérica \mathcal{N} e uma solução admissível s , consiste em pesquisar a vizinhança $\mathcal{N}(s)$ e determinar a solução s^* , de forma a $custo(s^*) \leq custo(s'), \forall s' \in \mathcal{N}(s)$. De seguida, considera-se $\mathcal{N}(s^*)$ e repete-se o processo até que não se encontre em $\mathcal{N}(s^*)$ uma solução com um custo inferior ao custo de s^* , ou seja, as vizinhanças são pesquisadas até ser obtido um ótimo local (Bernardino, Gouveia, Paias, & Santos, 2022).

Para o SC-MDFTSP, foram definidas na literatura cinco vizinhanças, divididas em três grupos, sendo estes mover entre rotas, mover dentro de cada rota e mover um nodo do conjunto de nodos visitados para o conjunto de nodos não visitados. A vizinhança *depósitos* (\mathcal{N}_D), definida no contexto deste TFM, consiste na troca dos depósitos de cada rota e pertence ao grupo de mover entre rotas. Esta vizinhança ainda não havia sido explorada para este problema.

Existem três vizinhanças definidas por movimentos dentro de cada rota, nomeadamente vizinhança *move-in* (\mathcal{N}_{MI}), vizinhança *switch-in* (\mathcal{N}_{SI}) e vizinhança *2-opt* (\mathcal{N}_{2-opt}). As soluções da vizinhança \mathcal{N}_{MI} podem ser obtidas através da remoção de um nodo de uma rota e da inserção do mesmo numa posição diferente na mesma rota; as soluções da vizinhança \mathcal{N}_{SI} são obtidas através da troca de posição de dois nodos numa rota; e, por fim, a vizinhança \mathcal{N}_{2-opt} consiste em inverter a ordem de um caminho dentro de uma rota.

Foi ainda definida a vizinhança que move um nodo do conjunto de nodos visitados para o conjunto de nodos não visitados, a vizinhança *switch-visited* (\mathcal{N}_{SV}), que consiste em trocar um nodo visitado por um nodo não visitado da mesma família.

Na Figura 3 está representado um exemplo de uma solução admissível para a vizinhança depósitos. As famílias, nodos e depósitos apresentados nestas figuras são referentes ao exemplo descrito na Figura 1, nomeadamente ao diagrama (1), que se encontra no Capítulo 1.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Rota 1 } (s) = [d1, 1, 2, 6, 7, d1] & \text{Rota 1 } (s) = [d2, 1, 2, 6, 7, d2] \\
 \text{Rota 2 } (s) = [d2, 14, 12, 10, 9, 8, d2] & \text{Rota 2 } (s) = [d1, 14, 12, 10, 9, 8, d1] \\
 (1) & (2)
 \end{array}$$

Figura 3 - Exemplo de uma solução da vizinhança \mathcal{N}_D . (1) rotas da solução inicial x ; (2) rotas de uma solução na vizinhança $\mathcal{N}_D(x)$.

No diagrama (1) da Figura 3, é apresentado um exemplo de uma solução admissível para o SC-MDFTSP, tal como será apresentado em todos os diagramas (1) das figuras seguintes. No diagrama (2), é apresentada a solução que pertence à vizinhança *depósitos* da solução inicial, que consiste na troca dos depósitos $d1$ e $d2$ de rotas. Neste caso, o $d1$ encontrava-se inicialmente na *Rota 1* e, na solução vizinha, este mesmo depósito passa a pertencer à *Rota 2*. O mesmo acontece para o $d2$, pertencendo à *Rota 1* na solução vizinha.

De seguida é apresentada a Figura 4, um exemplo de uma solução admissível para a vizinhança *move-in*.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Rota 1 } (s) = [d1, 1, 2, 6, 7, d1] & \text{Rota 1 } (s) = [d1, 2, 6, 1, 7, d1] \\
 (1) & (2)
 \end{array}$$

Figura 4 - Exemplo de uma solução da vizinhança \mathcal{N}_{MI} . (1) rota da solução inicial x ; (2) rota de uma solução na vizinhança $\mathcal{N}_{MI}(x)$.

A solução apresentada na figura anterior pode ser obtida através da remoção de um nodo de uma rota e da inserção do mesmo numa posição diferente na mesma rota. Neste caso, no diagrama (2), verifica-se que o nodo 1, inicialmente na primeira posição

após o depósito, foi agora inserido entre os nodos 6 e 7, tratando-se assim de uma solução pertencente à vizinhança \mathcal{N}_{MI} .

A Figura 5 diz respeito a uma solução admissível para a vizinhança *switch-in*.

$$\begin{aligned} \text{Rota 1 (s)} &= [d1, 1, 2, 6, 7, d1] \\ &(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rota 1 (s)} &= [d1, 7, 2, 6, 1, d1] \\ &(2) \end{aligned}$$

Figura 5 - Exemplo de uma solução da vizinhança \mathcal{N}_{SI} . (1) rota da solução inicial x ; (2) rota de uma solução na vizinhança $\mathcal{N}_{SI}(x)$.

O diagrama (2) da Figura 5 consiste na troca do nodo 1 e 7 de posição, ou seja, o nodo 7 agora ocupa a posição onde inicialmente se encontrava o nodo 1 e vice-versa. Uma vez que a vizinhança *switch-in* consiste na troca de dois nodos de posição, este exemplo apresenta uma solução pertencente à vizinhança \mathcal{N}_{SI} .

Na Figura 6 está representado um exemplo de uma solução da vizinhança *2-opt*, em que é invertida a ordem de um caminho dentro de uma rota.

$$\begin{aligned} \text{Rota 2 (s)} &= [d2, 14, 12, 10, 9, 8, d2] \\ &(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rota 2 (s)} &= [d2, 14, 8, 9, 10, 12, d2] \\ &(2) \end{aligned}$$

Figura 6 - Exemplo de uma solução da vizinhança \mathcal{N}_{2-opt} . (1) rota da solução inicial x ; (2) rota de uma solução na vizinhança $\mathcal{N}_{2-opt}(x)$.

No diagrama (2) é possível verificar que o caminho $[..., 12, 10, 9, 8, ...]$ foi invertido, começando agora no nodo 8 e terminando no nodo 12. Verifica-se, assim, que se trata de uma solução da vizinhança \mathcal{N}_{2-opt} .

Por fim, a Figura 7 diz respeito a um exemplo de uma solução da vizinhança *switch-visited*, que consiste na troca de um nodo visitado por um nodo não visitado da mesma família. Relembramos que a família 1 tem três nodos, os nodos 1, 2 e 3, mas apenas é necessário visitar dois destes nodos.

$$\text{Rota 1 } (s) = [d1, 1, 2, 6, 7, d1]$$

(1)

$$\text{Rota 1 } (s) = [d1, 1, 3, 6, 7, d1]$$

(2)

Figura 7 - Exemplo de uma solução da vizinhança \mathcal{N}_{SV} . (1) rota da solução inicial x ; (2) rota de uma solução na vizinhança $\mathcal{N}_{SV}(x)$.

No diagrama (2), o nodo 2 já não pertence à rota, tendo sido trocado pelo nodo 3, também dessa família, mas que inicialmente não pertencia a nenhuma rota, representando, assim, um exemplo de uma solução da \mathcal{N}_{SV} .

O Algoritmo 3 apresenta o procedimento de pesquisa local, tendo em conta as vizinhanças definidas anteriormente.

Algoritmo 3. Procedimento de pesquisa local usado no algoritmo ILS.

Requer: uma solução admissível s para o SC-MDFTSP.

1. fazer $CustoVelho = custo(s)$ e $CustoNovo = -\infty$.
2. **while** $CustoNovo < CustoVelho$
3. fazer $CustoVelho = CustoNovo$.
4. pesquisar $\mathcal{N}_D(s)$ e obter s^* . Atualizar $s = s^*$.
5. pesquisar $\mathcal{N}_{SV}(s)$ e obter s^* . Atualizar $s = s^*$.
6. pesquisar $\mathcal{N}_{SI}(s)$ e obter s^* . Atualizar $s = s^*$.
7. pesquisar $\mathcal{N}_{2-opt}(s)$ e obter s^* . Atualizar $s = s^*$.
8. pesquisar $\mathcal{N}_{MI}(s)$ e obter s^* . Atualizar $s = s^*$.
9. $CustoNovo = custo(s^*)$.
10. **end while**

Garante: uma solução s^* tal que $custo(s^*) \leq custo(s)$.

No procedimento de pesquisa local para o SC-MDFTSP, as vizinhanças *depósitos*, *switch-in*, *move-in*, *2-opt* e *switch-visited* são pesquisadas uma única vez sequencialmente, de acordo com a ordem \mathcal{N}_D , \mathcal{N}_{SV} , \mathcal{N}_{SI} , \mathcal{N}_{2-opt} e, por fim, \mathcal{N}_{MI} . Este processo repete-se até não ser possível encontrar nenhuma solução melhor que a encontrada na iteração anterior em nenhuma das vizinhanças.

3.4 Perturbações

Em algumas meta-heurísticas, são introduzidas perturbações que têm como objetivo diversificar as soluções, permitindo que o algoritmo explore diferentes regiões do espaço de soluções, evitando que fique preso em ótimos locais.

Para o SC-MDFTSP, foram definidas duas perturbações. A Perturbação Aleatória, apresentada no Algoritmo 4, cuja ideia base consiste em retirar famílias (aleatórias) de uma rota escolhida aleatoriamente e inseri-las numa outra rota também escolhida aleatoriamente e a Perturbação Frequência na Rota, onde a escolha das famílias a serem retiradas é feita de acordo com a frequência na rota, ou seja, são retiradas as famílias que mais vezes se encontraram na rota de onde estão a ser retiradas e inseridas na rota onde estiveram menos vezes.

Algoritmo 4. Perturbação Aleatória utilizada no algoritmo ILS.

Requer: uma solução admissível s para o SC-MDFTSP e α .

1. escolher aleatoriamente uma rota r_d , com $d \in D$, que visita mais do que α famílias.
 2. selecionar aleatoriamente α famílias, que sejam visitadas na rota r_d .
 3. escolher aleatoriamente uma rota $r_{d'}$, com $r_{d'} \neq r_d$.
 4. remover os nodos das famílias selecionadas na rota r_d .
 5. inserir os nodos visitados das famílias selecionadas na rota $r_{d'}$, nas posições que minimizam o custo de inserção.
-

O método de perturbação definido é inicializado com uma solução admissível s para o SC-MDFTSP, resultado da exploração das vizinhanças definidas anteriormente e com um valor de α , que representa o número de famílias a serem retiradas. De seguida, é escolhida uma rota r_d , com $d \in D$, aleatoriamente, desde que essa mesma rota contenha mais de α famílias, uma vez que não é possível a existência de uma rota sem famílias inseridas. Após a escolha da rota, são escolhidas α famílias pertencentes a essa rota, também aleatoriamente, e são removidas.

Na fase seguinte é selecionada uma outra rota $r_{d'}$, diferente da rota escolhida inicialmente. Todos os nodos das famílias selecionadas são retirados da rota r_d e, posteriormente, adicionados à rota $r_{d'}$ nas posições que originam o menor custo de inserção. Deste modo, a solução inicial é modificada, através do movimento de famílias de uma rota para outra.

De forma a tentar obter soluções de melhor qualidade, foi criada a Perturbação Frequência na Rota, apresentada no Algoritmo 5, onde apenas a escolha da rota inicial é aleatória. A escolha das famílias a serem retiradas e da rota onde as famílias vão ser inseridas é feita de acordo com a frequência na rota, ou seja, são retiradas as famílias que mais vezes se encontraram na rota de onde estão a ser retiradas e inseridas na rota onde estiveram menos vezes. Para tal, em cada iteração, foi feita uma contagem do número de vezes em que cada família esteve na rota.

Algoritmo 5. Perturbação Frequência na Rota utilizada no algoritmo ILS.

Requer: uma solução admissível s para o SC-MDFTSP e α .

1. escolher aleatoriamente uma rota r_d , com $d \in D$, que visita mais do que α famílias.
 2. seleccionar α famílias visitadas na rota r_d , que estiveram mais vezes nessa rota.
 3. escolher uma rota $r_{d'}$, rota onde as famílias seleccionadas estiveram menos vezes, com $r_{d'} \neq r_d$.
 4. remover os nodos das famílias seleccionadas na rota r_d .
 5. inserir os melhores nodos das famílias seleccionadas nas posições da rota $r_{d'}$ que minimizam o custo de inserção.
 6. para cada família removida, inserir os nodos da família nas posições que minimizam o custo de inserção.
-

A Perturbação Frequência na Rota é inicializada da mesma forma que a perturbação apresentada no Algoritmo 4, com uma solução admissível s para o SC-MDFTSP, que resultou da exploração das vizinhanças e com um valor de α , o número de famílias a serem retiradas. De seguida, tal como na perturbação definida anteriormente, é escolhida uma rota r_d , com $d \in D$, aleatoriamente, que contenha mais de α famílias. Após a escolha da rota, são escolhidas α famílias pertencente a essa rota, que mais vezes estiveram nessa mesma rota. Nos casos em que várias famílias apresentam o mesmo número de presenças na rota, a escolha é feita de forma aleatória.

Na fase seguinte, é seleccionada uma outra rota $r_{d'}$, diferente da rota escolhida inicialmente, sendo esta a rota onde as famílias retiradas foram colocadas menos vezes. Todos os nodos das famílias seleccionadas são retirados da rota r_d e, posteriormente, são adicionados à rota $r_{d'}$ os nodos das famílias seleccionadas nas posições que originam o menor custo de inserção, ou seja, após serem retirados da rota inicial, é feita uma nova análise dos custos de inserção de todos os nodos pertencentes às famílias seleccionadas, de modo a inserir os melhores nodos nas melhores posições.

As duas perturbações serão comparadas na experiência computacional, apurando, assim, a que melhor se adequa ao SC-MDFTSP.

Capítulo 4. Resultados Computacionais

Ao longo deste capítulo, dividido em seis secções, serão apresentados os resultados computacionais obtidos através do algoritmo ILS programado na ferramenta *Spyder*(*Python 3.9*) num computador com processador AMD *Ryzen 7 3700U* e com 12GB de memória RAM. Na Secção 4.1, são descritas as instâncias utilizadas neste estudo e a explicação da utilização de diferentes sementes. A Secção 4.2 contém os testes feitos sobre a afinação dos parâmetros existentes, nomeadamente o número de iterações a utilizar e número de famílias a retirar das rotas. Na Secção 4.3, estão presentes os resultados dos testes realizados a instâncias com 50 nodos. A Secção 4.4 contém os resultados de instâncias com 100 nodos e na Secção 4.5 são descritos os resultados computacionais de instâncias com 150 nodos. Por fim, na Secção 4.6 é feita uma comparação dos resultados considerando todas as instâncias. É importante salientar que, ao longo destas secções, apenas será apresentada uma síntese dos resultados. Os resultados detalhados de todos os conjuntos de instâncias estudados estão disponíveis em <https://www.dropbox.com/scl/fo/cecqrjlg0lma87qdwribh/AGIU4T5bjSgphbtBmRCpjDY?rlkey=z3pmvsxvymisl831rjuf1b1wo6&st=a7nfu7qb&dl=0>.

4.1 Instâncias

Para a experiência computacional, foram utilizadas instâncias de referência da literatura², propostas por Bernardino et al. (2022), agrupadas em três grupos, de acordo com o número de nodos existentes em cada uma. O primeiro grupo contém instâncias com 50 nodos, o segundo com 100 e o último com 150 nodos. A análise de resultados será feita de acordo com esta divisão, sendo depois na fase final feita uma comparação de todos os grupos de instâncias. No total, serão analisadas 288 instâncias, das quais 72 pertencem ao grupo dos 50 nodos e os restantes grupos contêm um total de 108 instâncias cada.

De modo a compreender melhor a diferença entre as instâncias, o nome destas foi dado tendo em conta certas características: o primeiro valor corresponde ao número de

² As instâncias utilizadas neste estudo foram retiradas de <http://familytsp.rd.ciencias.ulisboa.pt>, em Novembro de 2023.

nodos, o segundo indica o número de famílias, e o terceiro indica o número de depósitos. Para além destas características, estas instâncias estão ainda divididas em dois grupos, sendo estes instâncias simétricas e instâncias assimétricas. A distinção entre os dois grupos é feita através da quarta posição no nome da instância. Todas as que apresentam a letra “a” após o número, como por exemplo, 150-45-20-2a-1, são as assimétricas. Se a quarta posição apenas apresentar um número sem qualquer letra, trata-se de uma instância simétrica. Este mesmo número na quarta posição, indica o número da instância. Para cada combinação de número de nodos, número de depósitos, número de famílias e padrão de visitas, existem três instâncias simétricas e três assimétricas.

A posição final no nome da instância representa um indicativo do número de nodos a ser visitados, ou seja, as instâncias terminadas em “3” têm mais nodos a ser visitados do que instâncias terminadas em “1”. As instâncias terminadas em “2” contêm um número de nodos a visitar menor que o número de nodos visitados de instâncias terminadas em “1” e as instâncias terminadas em “1” são as de referência.

Para instâncias assimétricas, a vizinhança *2-opt* não foi pesquisada, pois o tempo computacional para calcular uma solução vizinha, neste caso, é maior.

Como o ILS tem componentes aleatórias, o código foi executado considerando diversas sementes. A utilização das mesmas garante que os dados aleatórios sejam fixados, permitindo, assim, correr o programa várias vezes obtendo os mesmos resultados, de modo a ser possível comparar com outros conjuntos de dados. Foram, assim, utilizadas 10 sementes para cada instância, e os resultados apresentados nas próximas secções são uma média dessas 10 corridas.

4.2 Afição dos parâmetros

Com o objetivo de testar qual o melhor número de iterações a ser utilizado, foram escolhidas as 36 menores instâncias e foram retirados resultados, fixando o número máximo de iterações em 5.000 e 10.000. Para o conjunto de instâncias testado, foram executadas as duas perturbações definidas no Capítulo 3, de modo a verificar qual a que produzia melhores resultados.

A Tabela 1 contém os resultados para os números máximos de iterações referidas para cada perturbação. A tabela contém o menor *gap* mínimo (gap_m) e o tempos de execução da semente que apresentou menor *gap* mínimo em segundos (t).

Para o cálculo do *gap*, foi utilizado o valor ótimo³ e o valor obtido através do ILS através da seguinte fórmula: $gap = \left(\frac{Z(x) - Z(x^*)}{Z(x^*)} \times 100 \right) \%$, em que $Z(x^*)$ é o valor ótimo da instância em estudo e $Z(x)$ o valor obtido através do ILS apresentado no Algoritmo 1.

É importante salientar que todas as tabelas que serão apresentadas ao longo deste capítulo apresentam alguns valores de *gaps* negativos, uma vez que existiam várias instâncias de referência da literatura sem valor ótimo conhecido, sendo então apresentado um intervalo real, que representa a faixa de valores possíveis para a solução ótima, refletindo a incerteza sobre o valor exato. Os *gaps* foram calculados tendo em conta o valor superior desse mesmo intervalo que corresponde ao valor da melhor solução admissível encontrada no tempo limite, sendo assim possível obter *gaps* com valor inferior a zero.⁴

Tabela 1 – Análise ao número máximo de iterações.

Instância	Perturbação Aleatória				Perturbação Frequência na Rota			
	10000		5000		10000		5000	
	gap_m	t	gap_m	t	gap_m	t	gap_m	t
50-15-5-1-1	9,12%	123,64	9,12%	64,8	7,80%	98,6	8,90%	62,64
50-15-5-1-2	6,49%	109,26	12,32%	59,1	7,68%	103,23	7,68%	52,78
50-15-5-1-3	-3,73%	264,41	-0,24%	72,48	-2,52%	167,72	0,53%	82,74
50-15-5-1a-1	21,85%	68,52	28,94%	34,2	29,53%	48,05	29,53%	25,59
50-15-5-1a-2	33,25%	39,09	39,00%	19,28	29,25%	39,09	31,50%	16,86
50-15-5-1a-3	18,00%	233,78	19,16%	63,24	16,93%	233,78	17,12%	64,38
50-15-5-2-1	14,85%	125,75	14,85%	72,87	19,25%	91,68	19,25%	48,27
50-15-5-2-2	13,09%	127,79	13,09%	57,29	7,85%	127,79	7,85%	44,35
50-15-5-2-3	-0,58%	194,41	-0,58%	108,64	-1,12%	192,33	0,58%	86,72
50-15-5-2a-1	18,12%	69,76	18,12%	16,49	26,84%	48,14	26,84%	24,99
50-15-5-2a-2	36,87%	43,45	39,39%	21,4	37,12%	33	38,89%	16,9
50-15-5-2a-3	13,00%	143,39	13,00%	73,48	12,65%	132,58	12,65%	70,04
50-15-5-3-1	3,76%	137,94	3,76%	80,18	10,59%	114,29	16,82%	56,43
50-15-5-3-2	13,79%	133,28	15,61%	69,67	11,13%	95,97	11,13%	49,96
50-15-5-3-3	-0,42%	197,22	-0,42%	108,39	-1,84%	188,69	0,94%	111,16
50-15-5-3a-1	29,18%	63,94	29,81%	33,46	25,58%	55,76	25,58%	26,9
50-15-5-3a-2	33,43%	44,56	33,43%	21,22	30,42%	33,93	35,54%	16,92

³ Todos os valores ótimos podem ser encontrados em Bernardino et al. (2022).

⁴ Na fórmula do *gap* apresentada, $Z(x^*)$ é substituído pelo limite máximo do intervalo.

<i>Instância</i>	Perturbação Aleatória				Perturbação Frequência na Rota			
	10000		5000		10000		5000	
	<i>gap_m</i>	<i>t</i>	<i>gap_m</i>	<i>t</i>	<i>gap_m</i>	<i>t</i>	<i>gap_m</i>	<i>t</i>
<i>50-15-5-3a-3</i>	9,68%	144,54	11,05%	62,48	7,33%	148,67	7,33%	62,94
média	14,99%	125,82	16,63%	57,70	15,25%	108,52	16,59%	51,14
<i>50-15-10-1-1</i>	-0,33%	135,08	6,64%	67,38	5,46%	132,38	7,43%	65,96
<i>50-15-10-1-2</i>	12,42%	127,2	15,38%	63,19	16,70%	127,2	21,28%	54,55
<i>50-15-10-1-3</i>	119,13%	166,8	119,13%	77,99	114,31%	181,27	115,40%	92,61
<i>50-15-10-1a-1</i>	13,53%	43,38	13,53%	20,73	15,02%	43,94	15,14%	18,2
<i>50-15-10-1a-2</i>	7,55%	34,48	20,65%	19,3	15,56%	28,62	15,56%	14,07
<i>50-15-10-1a-3</i>	-3,92%	82,39	-3,92%	36,3	2,54%	71,55	2,88%	38,45
<i>50-15-10-2-1</i>	-0,24%	167,17	-0,24%	71,95	4,50%	131,43	4,50%	64,97
<i>50-15-10-2-2</i>	11,92%	134,08	11,92%	72,1	11,92%	107,61	11,92%	53,55
<i>50-15-10-2-3</i>	-2,22%	176,91	-2,22%	91,89	-1,99%	157,91	-0,77%	85,06
<i>50-15-10-2a-1</i>	10,50%	41,8	10,50%	25,21	11,40%	37,14	11,40%	20,25
<i>50-15-10-2a-2</i>	20,71%	36,86	20,71%	19,27	22,57%	31,57	22,57%	17,68
<i>50-15-10-2a-3</i>	-0,83%	88,76	-0,83%	43,45	-1,87%	85,81	0,78%	42,96
<i>50-15-10-3-1</i>	-6,52%	159,65	-6,52%	68,72	5,66%	132,53	5,66%	63,22
<i>50-15-10-3-2</i>	8,89%	130,54	9,97%	67,15	14,15%	113,01	17,39%	61,51
<i>50-15-10-3-3</i>	-13,65%	169,47	-13,65%	85,77	-13,65%	178,05	-13,65%	84,99
<i>50-15-10-3a-1</i>	15,04%	53,27	16,16%	31,12	18,38%	40,85	18,94%	21,01
<i>50-15-10-3a-2</i>	19,69%	38,01	19,69%	18,39	10,92%	30,78	10,92%	16,92
<i>50-15-10-3a-3</i>	-6,78%	71,03	-6,78%	33,93	-10,05%	75,81	-10,05%	38,58
média	11,38%	103,16	12,78%	50,77	13,42%	94,86	14,29%	47,47
média total	13,18%	114,49	14,71%	54,24	14,33%	101,69	15,44%	49,31

É observado que o *gap* mínimo médio aumentou de 13,18% para 14,71% para a Perturbação Aleatória e o tempo médio total sofreu uma diminuição de 114,49 para 54,24 segundos com a diminuição do número de iterações de 10.000 para 5.000. Para a Perturbação Frequência na Rota, foi observado um aumento de 14,33% para 15,44% no *gap* mínimo e um decréscimo de 101,69 para 49,31 segundos no tempo médio total.

Tal como esperado, para ambas as perturbações, de modo geral, os resultados foram mais favoráveis com o número de iterações 10.000, sendo que várias instâncias mantiveram os valores com 5.000 e 10.000 iterações. Apesar de exigir um tempo computacional mais elevado, o custo total e o *gap* foram menores para 10.000 iterações. O tempo despendido apresenta frequentemente uma redução de 50% quando o número de iterações também sofre uma redução da mesma proporção. No entanto, mesmo os valores maiores continuam a ser razoáveis. Deste modo, para todo este estudo, serão utilizadas 10.000 iterações como o número máximo de iterações em todas as instâncias.

Para além do número de iterações, foi ainda testado um outro parâmetro: o número de famílias a ser retirado, tanto na Perturbação Aleatória, apresentada no Algoritmo 4, como na Perturbação Frequência na Rota, apresentada no Algoritmo 5. Foram, assim, selecionadas aleatoriamente sete instâncias⁵, de modo a considerar na experiência aleatória todos os números de famílias possíveis, ou seja, as instâncias selecionadas apresentam diferentes números de famílias.

Nas Tabelas 2 e 3 estão apresentados, respetivamente, os resultados tirando várias números de famílias das rotas. Para as duas perturbações consideradas, são apresentados os *gaps* médios (\overline{gap}) e tempos médios em segundos (\bar{t}) quando é retirada apenas uma família, 10% e 20% das famílias existentes na instância.

Tabela 2 – Análise do número de famílias a ser retirada (Perturbação Aleatória).

<i>Instância</i>	1 família		10% famílias		20% famílias	
	\overline{gap}	\bar{t}	\overline{gap}	\bar{t}	\overline{gap}	\bar{t}
50-25-5-3-1	28,03%	142,42	47,62%	165,69	50,42%	65,19
100-30-10-3a-3	7,13%	290,53	12,68%	76,31	12,68%	87,76
100-50-10-1a-1	34,82%	181,66	65,91%	61,28	65,91%	67,09
150-45-20-2-1	-5,33%	1050,44	-2,46%	522,57	-2,46%	504,84
150-75-30-2a-3	-5,50%	471,95	-1,86%	153,27	-1,86%	166,33
200-60-20-2a-2	-10,14%	323,55	-10,14%	99,52	-10,14%	107,12
200-100-20-1a-1	-10,81%	659,86	-8,01%	206,96	-8,01%	263,59
<i>média</i>	5,46%	445,77	14,82%	183,66	15,22%	180,27

Tabela 3 - Análise do número de famílias a ser retirada (Perturbação Frequência na Rota).

<i>Instância</i>	1 família		10% famílias		20% famílias	
	\overline{gap}	\bar{t}	\overline{gap}	\bar{t}	\overline{gap}	\bar{t}
50-25-5-3-1	24,47%	118,71	50,42%	106,74	50,42%	104,23
100-30-10-3a-3	6,44%	284,98	12,68%	231,13	12,68%	241,74
100-50-10-1a-1	27,64%	157,61	65,91%	207,8	65,91%	205,55
150-45-20-2-1	-5,50%	922,34	-2,46%	700,85	-2,46%	582,53
150-75-30-2a-3	-5,23%	367,96	-1,86%	534,27	-1,86%	512,7
200-60-20-2a-2	-10,14%	265,28	-10,14%	235,6	-10,14%	251,17
200-100-20-1a-1	-10,19%	1661,56	-8,01%	988,89	-8,01%	911,75
<i>média</i>	3,93%	539,78	15,22%	429,33	15,22%	401,38

⁵ As instâncias foram selecionadas através de um gerador de números aleatórios.

Selecionar uma percentagem das famílias exige frequentemente um tempo computacional menos elevado. Para a Perturbação Aleatória, ao retirar 10% das famílias, o tempo computacional médio diminui para 183,66 segundos quando o de retirar apenas uma família era de 445,77 segundos. Ao retirar 20% das famílias, o tempo computacional é de 180,27 segundos. Para a Perturbação Frequência na Rota, o tempo de retirar uma família é de 539,78 segundos, e quando se retira 10% e 20% das famílias os tempos computacionais são de 429,33 e 401,38 segundos, respetivamente. Quanto ao *gap* médio, para a Perturbação Aleatória, quando se retira uma família, é de 5,46% e de 14,82% quando se retira 10% e 15,22% quando se retira 20% das famílias. Para a Perturbação Frequência na Rota, os *gaps* apresentam valores de 3,93% quando é retirada uma família e 15,22% quando se retira quer 10% quer 20% das famílias.

Tal como se pode verificar nas Tabelas 2 e 3, os resultados não foram mais favoráveis quando são retiradas 10% ou 20% das famílias. Apesar na diminuição dos tempos médios computacionais, o principal objetivo continua a ser obter os menores *gaps* possíveis, razão pela qual foi selecionada a opção de retirar apenas uma família, uma vez que o tempo médio em segundos apresenta valores razoáveis para cada perturbação. Visto que as famílias retiradas pertencem sempre à mesma rota, temos menos possibilidades de seleção, uma vez que a rota escolhida tem de conter várias famílias para ser possível retirar quer 10%, quer 20% destas. Deste modo, é expectável que retirar apenas uma família da rota obtenha melhores resultados, quando comparado com retirar 10% ou 20% das famílias.

Assim, concluiu-se que a remoção de apenas uma família é a que apresenta os melhores resultados em termos de *gaps* e, por isso, será a utilizada. Para além disso, como não foi possível estabelecer qual a melhor perturbação, serão utilizadas as duas.

4.3 Resultados para instâncias com 50 nodos

Ao longo desta secção, será feita a análise dos resultados computacionais de instâncias com 50 nodos.

Pela observação das Tabela 20 e Tabela 21 no Anexo, que contêm os resultados gerais para instâncias com 50 nodos, verificou-se que os *gaps* médios não ultrapassam os

86% e não são inferiores a -5%. O tempo médio está compreendido entre 34,48 e 264,41 segundos para a Perturbação Aleatória e entre 28,62 e 233,78 segundos para a Perturbação Frequência na Rota. Foi ainda verificado quantas vezes cada conjunto de nodos apresentou *gaps* médios negativos, sendo que para instâncias com 50 nodos apenas quatro apresentaram *gaps* médios negativos e 68 instâncias com *gaps* médios positivos.

A Tabela 4 apresenta os *gaps* mínimo, máximo (gap_M) e médio, e tempo médio em segundos (\bar{t}) para instâncias com 50 nodos e $|D|$ número de depósitos para a Perturbação Aleatória e para a Perturbação Frequência na Rota. Todas as tabelas ao longo deste capítulo estão organizadas da mesma forma.

Tabela 4 - Resultados para instâncias com 50 nodos e número de depósitos diferentes.

$ D $	Perturbação Aleatória				Perturbação Frequência na Rota			
	gap_m	gap_M	\overline{gap}	\bar{t}	gap_m	gap_M	\overline{gap}	\bar{t}
5	18,26%	39,39%	31,51%	127,02	18,59%	38,15%	30,39%	108,58
10	20,13%	32,25%	27,40%	103,69	19,99%	32,63%	27,64%	93,53
média total	19,19%	35,82%	29,46%	115,35	19,29%	35,39%	29,01%	101,05

Pela Tabela 4, é possível verificar que o *gap* médio diminui à medida que o número de depósitos aumenta, de 31,51% para 27,40% para a Perturbação Aleatória e de 30,39% para 27,64% para a Perturbação Frequência na Rota, uma vez que aumento do número de depósitos implica um maior número de rotas, e, conseqüentemente, um aumento das possibilidades de agrupar todos os nodos. Visto que o objetivo do estudo é obter os menores *gaps* médios possíveis, os resultados são mais favoráveis para um maior número de depósitos. Quanto aos *gaps* mínimos e máximos médios, estes são, respetivamente, de 19,19% e 35,82% para a Perturbação Aleatória e 19,29% e 35,39% para a Perturbação Frequência na Rota.

Assim, verificou-se que os *gaps* mínimos são bastante semelhantes para ambas as perturbações, assim como os *gaps* máximos. É ainda notável uma diferença entre o *gap* mínimo e máximo de, aproximadamente, 16%, um valor considerado significativo. No que diz ao tempo médio, este sofreu uma diminuição de 127,02 para 103,69 segundos quando o número de depósitos aumenta de cinco para 10, para a Perturbação Aleatória.

Quanto à Perturbação Frequência na Rota, foi verificado que o tempo médio em segundos diminui de 108,58 para 93,53 segundos quando o número de depósitos duplica o seu valor.

É ainda observado que existe uma grande discrepância entre o *gap* mínimo e máximo, para ambas as perturbações, cerca de 20% para instâncias com cinco depósitos e 12% para instâncias com 10 depósitos.

Assim, observou-se que os resultados obtidos foram mais favoráveis com o aumento do número de depósitos. A Tabela 5 apresenta os valores de *gaps* e tempo médio para instâncias simétricas e assimétricas, seguindo a mesma organização da Tabela 4.

Tabela 5 - Resultados para instâncias com 50 nodos simétricas e assimétricas.

simetria	Perturbação Aleatória				Perturbação Frequência na Rota			
	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	\overline{gap}	\bar{t}	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	\overline{gap}	\bar{t}
<i>assimétrica</i>	26,36%	45,98%	37,91%	75,76	26,60%	44,45%	36,61%	68,02
<i>simétrica</i>	12,03%	25,65%	21,00%	154,94	11,98%	26,33%	21,42%	134,09
média total	19,19%	35,82%	29,46%	115,35	19,29%	35,39%	29,01%	101,05

Através da Tabela 5, é possível verificar que o *gap* médio para instâncias assimétricas é de 37,91% para a Perturbação Aleatória e de 36,61% para a Perturbação Frequência na Rota. Quanto às instâncias simétricas, este é de 21% para a Perturbação Aleatória e de 21,42% para a Perturbação Frequência na Rota. É notável que os *gaps* médios são menores para instâncias simétricas do que para instâncias assimétricas. Os *gaps* mínimos e máximos seguem o mesmo padrão que o *gap* médio para ambas as perturbações, com uma diferença de, aproximadamente, 16% entre eles, para ambas as perturbações.

O tempo médio de execução do algoritmo é bastante mais reduzido para instâncias assimétricas do que para instâncias simétricas, apresentando uma diferença entre os dois tipos de instâncias de 79,18 segundos para a Perturbação Aleatória e 66,07 segundos para a Perturbação Frequência na Rota. No caso de instâncias assimétricas, não foi pesquisada a vizinhança *2-opt*, tal como dito anteriormente.

É ainda verificado que o tempo médio despendido é sempre menor para a Perturbação Frequência na Rota. No entanto, não se trata de uma diferença significativa.

É possível ainda verificar nas Tabela 20 e Tabela 21 do Anexo que para as instâncias simétricas, o tempo sofreu um ligeiro aumento com o aumento de número de depósitos, enquanto as instâncias assimétricas têm um comportamento contrário, ou seja, o tempo médio diminui ligeiramente com o aumento do número de depósitos. No entanto, estas variações são de pequena dimensão, não tendo um impacto elevado.

Na Tabela 6 são observáveis os resultados para instâncias com 50 nodos e número de famílias diferentes, para ambas as perturbações, seguindo a mesma lógica das tabelas anteriores.

Tabela 6 - Resultados para instâncias com 50 nodos e número de famílias diferentes.

<i>L</i>	Perturbação Aleatória				Perturbação Frequência na Rota			
	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	\overline{gap}	\bar{t}	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	\overline{gap}	\bar{t}
15	13,18%	30,06%	23,16%	114,49	14,33%	29,79%	23,55%	101,69
25	25,20%	41,57%	35,75%	116,22	24,25%	40,99%	34,48%	100,42
<i>média total</i>	19,19%	35,82%	29,46%	115,35	19,29%	35,39%	29,01%	101,05

A Tabela 6 apresenta os resultados agrupados pelo número de famílias. Os *gaps* médios sofrem um acréscimo à medida que o número de famílias aumenta, de 23,16% para 35,75% na Perturbação Aleatória, e de 23,55% para 34,48% na Perturbação Frequência na Rota, tirando pequenas exceções, como instâncias do tipo “1-2” e “1-3”, tanto para instâncias simétricas como para assimétricas, tal como se pode observar nas Tabela 20 e Tabela 21 em anexo. Quantas mais famílias existirem, mais difícil é de acertar na combinação de famílias por depósito, obtendo-se, assim, resultados menos favoráveis. Quanto aos *gaps* mínimos, estes sofrem um aumento de 13,18% para 25,20% para a Perturbação Aleatória e de 14,33% para 24,25% para a Perturbação Frequência na Rota. Os *gaps* máximos seguem o mesmo padrão, aumentando de 30,06% para 41,57% para a Perturbação Aleatória e de 29,79% para 40,99% para a Perturbação Frequência na Rota. Foi, assim, verificado que os *gaps* mínimos são bastante semelhantes para ambas as perturbações, assim como os *gaps* máximos. É ainda notável uma diferença entre o *gap* mínimo e máximo de, aproximadamente, 16%, um valor considerado significativo.

É ainda possível verificar na Tabela 6 que o aumento do número de famílias não tem uma relevância impactante no tempo despendido pelo programa. Apesar de sofrer

ligeiras alterações, estas não ultrapassam os dois segundos, pelo que se conclui que o número de famílias não afeta o tempo despendido. Assim, é possível aumentar o número de famílias sem implicar elevados tempos computacionais, tanto para a Perturbação Aleatória como para a Perturbação Frequência na Rota.

Na Tabela 7 estão apresentados os resultados divididos pelo número de visitas por famílias. Tal como referido anteriormente, as instâncias terminadas em “2” contêm menos visitas que instâncias terminadas em “1”, sendo as instâncias terminadas em “3” as que contêm maiores número de visitas. Nesta tabela, estão representados os resultados tendo em conta esta nomenclatura.

Tabela 7 - Resultados do padrão de visitas para instâncias com 50 nodos.

<i>Padrão visitas</i>	Perturbação Aleatória				Perturbação Frequência na Rota			
	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	\overline{gap}	\bar{t}	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	\overline{gap}	\bar{t}
1	20,13%	38,34%	31,52%	105,44	21,93%	38,20%	31,45%	90,16
2	27,40%	47,24%	39,69%	87,28	26,32%	46,48%	38,72%	74,46
3	10,05%	21,87%	17,16%	153,34	9,63%	21,48%	16,88%	138,54
<i>média total</i>	19,19%	35,82%	29,46%	115,35	19,29%	35,39%	29,01%	101,05

Através da Tabela 7, é possível verificar que instâncias com um maior número de visitas, neste caso instâncias terminadas em “3”, apresentam melhores valores para o caso em estudo, cerca de 17,16% para a Perturbação Aleatória e 16,88% para a Perturbação Frequência na Rota. No entanto, instâncias terminadas em “2” são as que apresentam piores valores, 39,69% para a Perturbação Aleatória e 38,72% para a Perturbação Frequência na Rota. Os resultados para instâncias terminadas em “1” apresentam valores intermédios, 31,52% na Perturbação Aleatória e 31,45% na Perturbação Frequência na Rota. Relativamente aos *gaps* mínimos, as instâncias terminadas em “3” são as que apresentam melhores valores. Os *gaps* máximos apresentam resultados semelhantes, sendo as instâncias terminadas em “3” as melhores e as instâncias terminadas em “2” as piores. Assim, verificou-se que os *gaps* mínimos apresentados são bastante semelhantes para ambas as perturbações, assim como os *gaps* máximos. É ainda notável uma diferença entre o *gap* mínimo e máximo de, aproximadamente, 16%, um valor considerado significativo.

No que diz respeito ao tempo médio, quando o padrão de visitas passa de “1” para “2”, na Perturbação Aleatória o tempo diminui de 105,44 para 87,28 segundos e na Perturbação Frequência na Rota de 90,16 para 74,46 segundos. Quando o padrão de visitas passa para “3”, o tempo aumenta para 153,34 segundos na Perturbação Aleatória e para 138,54 segundos para a Perturbação Frequência na Rota. Conclui-se, assim, que o ILS desenvolvido obtém melhores resultados para instâncias com um maior número de visitas, apesar do aumento do tempo médio.

Por fim, a Tabela 8 contém o número de vezes em que cada perturbação obteve melhores resultados, para instâncias de 50 nodos e para ambas as perturbações.

Tabela 8 - Número de vezes em que cada perturbação obteve melhores resultados (50 nodos).

	Nº vezes melhor
Perturbação Aleatória	34
Perturbação Frequência na Rota	32

Foram, ainda, comparados os resultados para verificar qual das duas perturbações criadas obtinha melhores resultados. Através da Tabela 8, é possível verificar que o número de vezes que cada perturbação apresenta os resultados melhores é bastante similar, sendo a diferença de apenas duas instâncias.

4.4 Resultados para instâncias com 100 nodos

Ao longo desta secção, serão estudadas as instâncias que contêm 100 nodos, seguindo a mesma estrutura da secção anterior.

Para além de instâncias com cinco e 10 depósitos, como nas instâncias de 50 nodos estudadas, as instâncias de 100 nodos contam ainda com um conjunto de dados que contém 20 depósitos.

Através das Tabela 22 e Tabela 23 no Anexo, verificou-se, de um modo geral, que os *gaps* médios estão compreendidos entre -30% e 50% e os tempos médios entre 109,64 e 719,42 segundos para a Perturbação Aleatória e 87,68 e 714,56 segundos para a Perturbação Frequência na Rota. Sabe-se, ainda, que 38 instâncias apresentam valores de *gaps* médios negativos e 70 instâncias valores positivos.

A Tabela 9 diz respeito aos resultados de instâncias com 100 nodos, sendo analisados os *gaps* e tempos médios para diferentes números de depósitos, tal como na Tabela 4.

Tabela 9 - Resultados para instâncias com 100 nodos e número de depósitos diferentes.

D	Perturbação Aleatória				Perturbação Frequência na Rota			
	gap_m	gap_M	\overline{gap}	\bar{t}	gap_m	gap_M	\overline{gap}	\bar{t}
5	12,42%	22,06%	18,83%	453,23	10,35%	21,18%	17,59%	403,82
10	8,22%	16,54%	17,47%	367,03	6,91%	16,04%	12,51%	326,76
20	-2,18%	5,56%	2,65%	369,96	-1,17%	5,82%	3,15%	319,83
média total	6,15%	14,72%	12,98%	396,74	5,37%	14,35%	11,08%	350,13

Na Tabela 9, verifica-se que os *gaps* médios diminuem à medida que o número de depósito aumenta. No caso da Perturbação Aleatória, diminui de 18,83%, no caso de cinco depósitos, para 2,65% no caso de 20 depósitos. Na Perturbação Frequência na Rota, este fenómeno também é observado, passando de 17,59% para 3,15% quando o número de depósito aumenta de cinco para 20.

Quanto aos *gaps* mínimos, para a Perturbação Aleatória, quando o número de depósitos aumenta de cinco para 20, estes *gaps* diminuem de 12,42% para -2,18%, tal como os *gaps* médios. Na Perturbação Frequência na Rota, este fenómeno também é verificado, sendo que o *gap* mínimo sofre uma diminuição de 10,35% para -1,17% quando o número de depósitos passa de cinco para 20. Os *gaps* máximos comportam-se da mesma forma, diminuindo de 22,06% para 5,56% e de 21,18% para 5,82%, respetivamente para a Perturbação Aleatória e para a Perturbação Frequência na Rota, para a mesma alteração no número de depósitos. Os *gaps* mínimos apresentados são bastante semelhantes para ambas as perturbações, assim como os *gaps* máximos. É ainda notável uma diferença entre o *gap* mínimo e máximo de, aproximadamente, 9% entre eles, sendo este um valor significativo.

A Tabela 10 apresenta os resultados médios para instâncias simétricas e assimétricas com 100 nodos e está organizada como a Tabela 5.

Tabela 10 - Resultados para instâncias com 100 nodos simétricas e assimétricas.

simetria	Perturbação Aleatória				Perturbação Frequência na Rota			
	gap_m	gap_M	\overline{gap}	\bar{t}	gap_m	gap_M	\overline{gap}	\bar{t}
assimétrica	18,12%	29,68%	25,12%	257,88	16,75%	28,85%	24,09%	232,81
simétrica	-5,82%	-0,24%	0,84%	535,60	-6,02%	-0,15%	-1,92%	467,45
média total	6,15%	14,72%	12,98%	396,74	5,37%	14,35%	11,08%	350,13

Na Tabela 10, é possível verificar que o gap médio para instâncias assimétricas para a Perturbação Aleatória é de 25,12% e para a Perturbação Frequência na Rota é de 24,09%. Quanto às instâncias simétricas, este é de 0,84% para a Perturbação Aleatória e de -1,92% para a Perturbação Frequência na Rota, verificando-se uma grande diferença para instâncias simétricas e assimétricas. Os $gaps$ mínimos e máximos seguem o mesmo padrão. Mais uma vez, os $gaps$ mínimos são bastante semelhantes para ambas as perturbações, tal como os $gaps$ máximos. É ainda notável uma diferença entre o gap mínimo e máximo de, aproximadamente, 9% entre eles, apresentando um valor significativo.

O tempo médio em segundos, e tal como ocorreu nas instâncias de 50 nodos, sofre uma redução nas instâncias assimétricas, comparativamente às instâncias simétricas, uma vez que apenas são pesquisadas quatro vizinhanças no procedimento de pesquisa local, levando assim a uma redução do tempo médio em segundos. Na Tabela 10 é observado que, para instâncias simétricas, é obtido um tempo médio de 535,60 segundos para a Perturbação Aleatória e de 467,45 segundos para a Perturbação Frequência na Rota. No que diz respeito às instâncias simétricas, o tempo médio é de 257,88 segundos para a Perturbação Aleatória e de 232,81 segundos para a Perturbação Frequência na Rota.

É ainda verificado que para as instâncias assimétricas, o tempo apresenta sempre um decréscimo quando o número de depósitos é aumentado, enquanto as instâncias com matrizes simétricas têm um padrão diferente⁶. Nestes casos, o tempo apresenta sempre um aumento com o aumento do número de depósitos, exceto para instâncias terminadas em “3”. Assim, quando o número de nodos visitados aumenta, os resultados são melhores para instâncias com menos depósitos.

⁶ Este fenómeno é observado nas Tabela 22 e Tabela 23, apresentadas no Anexo.

Na Tabela 11 são observáveis os resultados agrupados pelo número de famílias, para ambas as perturbações, tal como na Tabela 6. Para o conjunto de instâncias de 100 nodos, foram estudadas duas variações no número de famílias: 30 e 50.

Tabela 11 - Resultados para instâncias com 100 nodos e número de famílias diferentes.

<i>L</i>	Perturbação Aleatória				Perturbação Frequência na Rota			
	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	\overline{gap}	\bar{t}	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	\overline{gap}	\bar{t}
30	7,86%	16,69%	16,17%	379,36	6,81%	16,73%	13,24%	326,97
50	4,45%	12,75%	9,79%	414,12	3,92%	11,96%	8,93%	373,30
<i>média total</i>	6,15%	14,72%	12,98%	396,74	5,37%	14,35%	11,08%	350,13

É verificado que os *gaps* médios diminuem à medida que o número de famílias aumenta, para ambas as perturbações. A Perturbação Aleatória sofreu uma redução de 16,17% para 9,79% e a Perturbação Frequência na Rota de 13,24% para 8,93%. Quanto ao *gap* mínimo, este diminui de 7,86% para 4,45% para a Perturbação Aleatória e de 6,81% para 3,92% para a Perturbação Frequência na Rota, quando o número de famílias aumenta de 30 para 50. O *gap* máximo também sofre uma diminuição de 16,69% para 12,75% para a Perturbação Aleatória e de 16,73% para 11,96% para a Perturbação Frequência na Rota. Verificou-se que os *gaps* mínimos apresentados são bastante semelhantes para ambas as perturbações, assim como os *gaps* máximos. É ainda notável uma diferença entre o *gap* mínimo e máximo de, aproximadamente, 9%, sendo este um valor significativo. No entanto, foram verificadas algumas exceções, apresentadas nas Tabela 22 e Tabela 23 do anexo, em que instâncias do tipo “2a” e instâncias terminadas em “3” não seguem o mesmo padrão. Nestes casos, os resultados obtidos têm pior qualidade quando comparados com os resultados de instâncias com as mesmas características, mas com um menor número de famílias, resultando em *gaps* médios superiores aos obtidos inicialmente.

Tal como verificado anteriormente, é possível aumentar o número de famílias sem implicar aumentos acentuados dos tempos computacionais, uma vez que as diferenças não ultrapassam, em média, os 35 segundos para a Perturbação Aleatória e os 46 segundos para a Perturbação Baseada na Frequência.

A Tabela 12 contém os resultados agrupados pelo padrão de visitas, para instâncias com 100 nodos, tanto para a Perturbação Aleatória como para a Perturbação Frequência na Rota, seguindo a estrutura da Tabela 7.

Tabela 12 - Resultados do padrão de visitas para instâncias com 100 nodos.

<i>Padrão visitas</i>	Perturbação Aleatória				Perturbação Frequência na Rota			
	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gap̄</i>	<i>t̄</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gap̄</i>	<i>t̄</i>
1	2,97%	11,29%	8,04%	371,90	1,46%	10,93%	7,38%	314,87
2	17,30%	26,85%	23,82%	317,43	16,74%	26,46%	23,12%	263,95
3	-1,81%	6,02%	7,09%	500,89	-2,10%	5,65%	2,76%	471,59
<i>média total</i>	6,15%	14,72%	12,98%	396,74	5,37%	14,35%	11,08%	350,13

Uma vez mais, através da Tabela 12, verificou-se que instâncias com um maior número de visitas, neste caso instâncias terminadas em “3”, apresentam melhores valores, um *gap* médio de cerca de 7,09% para a Perturbação Aleatória e 2,76% para a Perturbação Frequência na Rota. Instâncias terminadas em “2” são as que apresentam piores valores, 23,82% para a Perturbação Aleatória e 23,12% para a Perturbação Frequência na Rota. Os resultados para instâncias terminadas em “1” apresentam valores de 8,04% na Perturbação Aleatória e 7,38% na Perturbação Frequência na Rota. Quanto ao *gap* mínimo, este apresenta valores de 2,97%, 17,30% e -1,81% para instâncias terminadas em “1”, “2” e “3”, respetivamente, para a Perturbação Aleatória e 1,46%, 16,74% e -2,10% para a Perturbação Frequência na Rota. O *gap* máximo segue a mesma lógica, sendo os valores de 11,29%, 26,85% e 6,02% para a Perturbação Aleatória e 10,93%, 26,46% e 5,65% para a Perturbação Frequência na Rota. Os *gaps* mínimos apresentados são bastante semelhantes para ambas as perturbações, tal como os *gaps* máximos. É ainda notável uma diferença entre o *gap* mínimo e máximo de, aproximadamente, 9%, apresentando um valor significativo.

Relativamente ao tempo médio, este diminui quando o padrão de visitas passa de “1” para “2”, na Perturbação Aleatória de 371,90 para 317,43 segundos e na Perturbação Frequência na Rota de 314,87 para 263,95 segundos. Quando o padrão de visitas passa para “3”, o tempo sofre um aumento para 500,89 segundos na Perturbação Aleatória e de 263,95 segundos para 471,59 segundos para a Perturbação Frequência na Rota. Conclui-

se, mais uma vez, que as instâncias que melhor se adequam a este estudo são as que apresentam um maior número de visitas, apesar do aumento do tempo médio.

A Tabela 13 contém o número de vezes em que cada perturbação obteve melhores resultados, para instâncias com 100 nodos, como na Tabela 8.

Tabela 13 - Número de vezes em que cada perturbação obteve melhores resultados (100 nodos).

	Nº vezes melhor
Perturbação Aleatória	44
Perturbação Frequência na Rota	51

Tal como anteriormente, foram comparados os resultados para verificar qual a perturbação que apresentava melhores resultados. Na Tabela 13, mais uma vez, é possível verificar que o número de vezes que cada perturbação resulta em melhores valores é bastante similar, sendo a diferença de apenas sete instâncias. Não foi verificado nenhum padrão para qual as perturbações mais adequadas para cada tipo de instância.

4.5 Resultados para instâncias com 150 nodos

Por último, serão estudadas as instâncias com 150 nodos, analisando os mesmos parâmetros que foram analisados anteriormente. Neste caso foram estudadas instâncias com 10, 20 e 30 depósitos.

De forma geral, *gaps* médios não ultrapassam os 30% e não apresentam valores inferiores a -30% e os tempos médios estão entre 214,34 e 2144,27 segundos para a Perturbação Aleatória e entre 172,39 e 1413,88 para a Perturbação Frequência na Rota, tal como se pode observar nas Tabela 24 e Tabela 25 inseridas no anexo. Foi, ainda, analisado o número de instâncias que apresenta *gaps* médios negativos, sendo este de 75 instâncias, restando, assim, 33 instâncias apenas com *gaps* positivos.

A Tabela 14 apresenta os resultados para instâncias com 150 nodos e para todos os valores de depósitos estudados, para ambas as perturbações. A estrutura da tabela apresentada segue a mesma organização da Tabela 9.

Tabela 14 - Resultados para instâncias com 150 nodos e número de depósitos diferentes.

D	Perturbação Aleatória				Perturbação Frequência na Rota			
	gap_m	gap_M	\overline{gap}	\bar{t}	gap_m	gap_M	\overline{gap}	\bar{t}
10	-10,42%	-4,29%	-6,12%	761,36	-12,34%	-4,15%	-6,76%	681,58
20	-10,91%	-4,07%	-6,41%	697,76	-11,56%	-3,78%	-6,42%	613,75
30	-14,54%	-5,51%	-8,43%	767,75	-14,16%	-5,10%	-7,68%	662,85
média total	-11,96%	-4,62%	-6,98%	742,29	-12,69%	-4,34%	-6,95%	652,73

Tal como nos outros conjuntos de instâncias, com 50 e 100 nodos, os *gaps* médios diminuem com o aumento do número de depósitos, originando melhores resultados quanto mais depósitos a instância contiver, tanto para instâncias simétricas como para assimétricas, na maior parte dos casos. No caso da Perturbação Aleatória, o *gap* médio diminuiu de -6,12% para -8,43% e para a Perturbação Frequência de Rota diminuiu de -6,76% para -7,68%, quando o número de depósitos aumenta de 10 para 30. O *gap* mínimo também sofre uma diminuição de -10,42% para -14,54%, para a Perturbação Aleatória, quando o número de depósitos aumenta de 10 para 30, e de -12,34% para -14,16% para a Perturbação Frequência na Rota. Quanto ao *gap* máximo, este diminui de -4,29% para -5,51% para a Perturbação Aleatória e de -4,15% para -5,10% para a Perturbação Frequência na Rota, quando o número de depósitos sofre o mesmo aumento. É possível concluir, assim, os *gaps* mínimos apresentados são bastante semelhantes para ambas as perturbações, assim como os *gaps* máximos. É ainda notável uma diferença entre o *gap* mínimo e máximo de, aproximadamente, 8%, sendo este um valor significativo.

A tabela apresenta, ainda, os tempos médios despendidos para instâncias com diferentes números de depósitos. É possível verificar que, com o aumento do número de depósitos, o tempo médio despendido sofre um decréscimo quando o número de depósitos aumenta de 10 para 20, de 761,36 para 697,76 segundos na Perturbação Aleatória e de 681,58 para 613,75 segundos na Perturbação Frequência na Rota. Quando o número de depósitos é aumentado para 30, o tempo comporta-se de forma diferente, sofrendo agora um acréscimo para 767,75 e 662,85 segundos, respetivamente para cada perturbação.

A Tabela 15 apresenta os resultados para instâncias simétricas e assimétricas com 150 nodos, seguindo a estrutura da Tabela 10.

Tabela 15 - Resultados para instâncias com 150 nodos simétricas e assimétricas.

simetria	Perturbação Aleatória				Perturbação Frequência na Rota			
	gap_m	gap_M	\overline{gap}	\bar{t}	gap_m	gap_M	\overline{gap}	\bar{t}
assimétrica	-3,95%	3,24%	0,52%	395,95	-5,31%	3,17%	0,20%	367,79
simétrica	-19,96%	-12,48%	-14,49%	1088,63	-20,06%	-11,85%	-14,11%	937,67
média total	-11,96%	-4,62%	-6,98%	742,29	-12,69%	-4,34%	-6,95%	652,73

Através da Tabela 15, verifica-se que o gap médio para instâncias assimétricas é de 0,52% para a Perturbação Aleatória e de 0,20% para a Perturbação Frequência na Rota. No que diz respeito às instâncias simétricas, este é de -14,49% para a Perturbação Aleatória e de -14,11% para a Perturbação Frequência na Rota, verificando-se uma grande diferença para instâncias simétricas e assimétricas. Os $gaps$ mínimos seguem o mesmo padrão, diminuindo de -3,95% para -19,96% para a Perturbação Aleatória e de -5,31% para -20,06% para a Perturbação Frequência na Rota. Quanto aos $gaps$ máximos, para instâncias assimétricas estes apresentam valores de 3,24% para a Perturbação Aleatória e 3,17% para a Perturbação Frequência na Rota. Para instâncias simétricas, estes valores são de -12,48% e -11,85% para as duas perturbações, respetivamente. Os $gaps$ mínimos apresentados são bastante semelhantes para ambas as perturbações, assim como os $gaps$ máximos. É ainda notável uma diferença entre o gap mínimo e máximo de, aproximadamente, 8%, sendo este um valor significativo.

É importante salientar que, uma vez mais, tempo médio despendido é bastante mais reduzido para instâncias assimétricas do que para instâncias simétricas. Tal como observado na Tabela 15, o tempo médio tem uma redução de mais de 50%.

É ainda verificado, nas Tabela 24 e Tabela 25 do anexo, que com o aumento do número de depósitos, o tempo médio despendido sofre também um acréscimo para instâncias simétricas. No entanto, para instâncias assimétricas, o tempo médio diminui, comportando-se assim de forma contrária às instâncias simétricas. Todavia, esta diminuição é bastante reduzida, não tendo um impacto significativo no estudo.

Na Tabela 16 são observáveis os resultados para instâncias com 150 nodos agrupados pelo número de famílias, para ambas as perturbações, tal como na Tabela 11. As instâncias de 150 nodos contam com duas variações no número de famílias: 45 e 75.

Tabela 16 - Resultados para instâncias com 150 nodos e número de famílias diferentes.

<i>L</i>	Perturbação Aleatória				Perturbação Frequência na Rota			
	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gap̄</i>	<i>t̄</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gap̄</i>	<i>t̄</i>
45	-7,11%	3,59%	0,04%	772,98	-7,88%	4,18%	0,45%	652,96
75	-16,80%	-12,83%	-14,01%	711,60	-17,49%	-12,86%	-14,35%	652,50
média total	-11,96%	-4,62%	-6,98%	742,29	-12,69%	-4,34%	-6,95%	652,73

Através da Tabela 16, observa-se que os *gaps* médios diminuem à medida que o número de famílias aumenta. É ainda importante salientar que essas variações de *gaps* têm uma pequena amplitude. Para a Perturbação Aleatória, o *gap* médio diminui de 0,04% para -14,01%, enquanto na Perturbação Frequência na Rota, o *gap* médio diminui de 0,45% para -14,35%. Quanto ao *gap* mínimo, este diminui de -7,11% para -16,80% para a Perturbação Aleatória e de -7,88% para -17,49% para a Perturbação Frequência na Rota, quando o número de famílias aumenta de 45 para 75. O *gap* máximo sofre também uma diminuição de 3,59% para -12,83% para a Perturbação Aleatória e de 4,18% para -12,86% para a Perturbação Frequência na Rota. Verificou-se, assim, que os *gaps* mínimos apresentados são bastante semelhantes para ambas as perturbações, assim como os *gaps* máximos. É ainda notável uma diferença entre o *gap* mínimo e máximo de, aproximadamente, 8%, sendo este um valor significativo.

Tal como era expectável, uma vez mais, o aumento do número de famílias não tem impacto no tempo médio despendido em segundos, sendo cerca de 61 segundos para a Perturbação Aleatória e 0,46 segundos para a Perturbação Frequência na Rota.

Para concluir, de um modo global, o aumento do número de famílias resulta em *gaps* médios menores, obtendo assim resultados melhores do que os obtidos com um menor número de famílias.

Na Tabela 17 estão apresentados os resultados agrupados pelo padrão de visitas para instâncias com 150 nodos, sendo que esta tabela está organizada da mesma forma que a Tabela 12.

Tabela 17 - Resultados do padrão de visitas para instâncias com 150 nodos.

Padrão vistas	Perturbação Aleatória				Perturbação Frequência na Rota			
	gap_m	gap_M	\overline{gap}	\bar{t}	gap_m	gap_M	\overline{gap}	\bar{t}
1	-13,76%	-5,87%	-8,76%	851,43	-13,61%	-6,34%	-8,67%	622,72
2	-8,85%	-0,80%	-2,97%	665,17	-9,64%	-1,10%	-3,23%	534,02
3	-11,96%	-4,62%	-6,98%	742,29	-14,81%	-5,58%	-8,95%	801,45
média total	-11,96%	-4,62%	-6,98%	742,29	-12,69%	-4,34%	-6,95%	652,73

Neste caso, verificaram-se conclusões diferentes para as diferentes perturbações. Na Perturbação Aleatória, as instâncias terminadas em “1” são as que apresentam melhores resultados, com um gap médio de -8,76%. As instâncias terminadas em “3” apresentam um valor de -6,98% e, por último, as instâncias que resultaram em piores $gaps$ médios, as instâncias terminadas em “2”, com um gap médio de -2,97%. Já na Perturbação Frequência na Rota, as instâncias que apresentam melhores valores são as terminadas em “3”, com valor de -8,95%. De seguida, estão as instâncias terminadas em “1”, com um gap médio de -8,67% e, por fim, tal como na Perturbação Aleatória, as instâncias terminadas em “2”, com um valor de -3,23%. Os $gaps$ mínimos apresentados são bastante semelhantes para ambas as perturbações, assim como os $gaps$ máximos. É ainda notável uma diferença entre o gap mínimo e máximo de, aproximadamente, 8%, sendo este um valor significativo.

No que diz respeito ao tempo médio, este diminui quando o padrão de visitas passa de “1” para “2”, na Perturbação Aleatória de 851,43 para 665,17 segundos e na Perturbação Frequência na Rota de 622,72 para 534,02 segundos. Quando o padrão de visitas passa para “3”, o tempo sofreu um acréscimo de 665,17 para 742,29 na Perturbação Aleatória e de 534,02 para 801,45 segundos para a Perturbação Frequência na Rota.

A Tabela 18 apresenta o número de vezes em que cada perturbação obteve melhores resultados, para instâncias com 150 nodos, de modo verificar qual das duas perturbações criadas obteve melhores resultados.

Tabela 18 - Número de vezes em que cada perturbação obteve melhores resultados (150 nodos).

	Nº vezes melhor
Perturbação Aleatória	35
Perturbação Frequência na Rota	46

É possível verificar, mais uma vez, que o número de vezes que cada perturbação resulta em melhores valores é bastante similar, sendo a diferença de apenas 11 instâncias.

4.6 Comparação dos resultados

De forma geral, é possível concluir que tanto o número de depósitos como o número de famílias existentes têm impacto na qualidade da solução obtida pelo ILS, assim como o número de nodos existentes e o número de visitas por família. Através da análise de todas as tabelas presentes neste capítulo, conclui-se que quanto mais depósitos, melhores são os resultados. O mesmo se pode dizer acerca do aumento do número de famílias e do aumento do número de visitas.

No que diz respeito ao tempo médio despendido, foi verificado que as instâncias assimétricas resultam num menor tempo computacional, quando comparado com instâncias simétricas. Já o aumento do número de famílias não teve impacto significativo no tempo computacional. Quanto ao aumento de depósitos, o impacto no tempo tem um comportamento diferente, com tendência para aumentar para instâncias simétricas e diminuir para instâncias assimétricas.

Apesar de terem sido elaboradas duas perturbações, os resultados obtidos não diferem tanto como o esperado, não tendo sido possível concluir qual a que permite obter os melhores resultados. No entanto, foi observado que estas diferenças vão aumentando com o aumento do número de nodos, sendo a Perturbação Frequência na Rota a que apresenta *gaps* e tempos médios menos elevados.

É ainda de referir que os *gaps* obtidos, tanto mínimos quanto médios não foram os mais favoráveis, sendo que a média de *gap* mínimo melhora com o aumento do número de nodos. A Tabela 19 apresenta essa mesma média, para os três conjuntos de dados

estudados, tanto para a Perturbação Aleatória como para a Perturbação Frequência na Rota.

Tabela 19 - Média dos gaps mínimos para todas as instâncias.

$ N $	<i>Perturbação Aleatória</i>	<i>Perturbação Frequência na Rota</i>
50	19,53%	19,29%
100	6,15%	5,37%
150	-11,83%	-12,55%

Através da observação da Tabela 19, é possível verificar que quanto mais nodos estiverem presentes, menor é a média dos *gaps* mínimos, mais uma vez, para ambas as perturbações, sendo os valores mais reduzidos para a Perturbação Frequência na Rota, rondando uma diferença de, no máximo, um ponto percentual. Uma das razões para tal acontecer pode estar relacionado com o facto de o método exato dar piores resultados para instâncias com maior número de nodos.

Apesar de não ter sido possível encontrar soluções de boa qualidade consistentemente, é de salientar que, de modo geral, o método proposto é capaz de obter soluções que apresentam valores inferiores ao método existente na literatura usado para comparar. Assim, podemos concluir que os resultados apresentam uma melhoria, especialmente para instâncias de maiores dimensões, quando comparados com os resultados anteriores.

Capítulo 5. Conclusão

Ao longo deste estudo, foi abordado o problema do caixeiro-viajante com múltiplos depósitos e famílias, com restrições de agrupamento leves, em que clientes da mesma famílias têm de ser visitados na mesma rota (denominado SC-MDFTSP). A escolha desta variante prendeu-se com o facto de esta ter sido até à data a variante que apresentou piores resultados e revelou maior dificuldade quando comparada com outras variantes, uma vez que menos ótimos foram obtidos.

Foi aplicado o ILS, partindo de uma solução admissível para o SC-MDFTSP obtida na fase construtiva, baseado num conjunto de cinco vizinhanças. Com o objetivo de diversificar as soluções, foram aplicadas ainda duas perturbações: Perturbação Aleatória e Perturbação Frequência na Rota.

Para este estudo, foram analisados os resultados de 288 instâncias de referência da literatura, com 50, 100 e 150 nodos, sendo que os resultados obtidos não foram tão favoráveis como os expectáveis. No entanto, os resultados obtidos foram melhores que os resultados da literatura, para certas instâncias. Foi possível concluir que o método utilizado produz melhores resultados para instâncias com maior número de nodos, uma vez que estas apresentam valores de *gaps* mínimos, máximos e médios menos elevados. Este resultado mais favorável pode estar relacionado com o facto de, para instâncias com um maior número de nodos, não ter sido encontrado um ótimo na literatura, mas antes um intervalo real, o que pode ter influenciado positivamente os resultados obtidos.

Instâncias com menos nodos são as que apresentam mais ótimos conhecidos na literatura. À medida que aumenta o número de nodos, o número de ótimos conhecidos é cada vez mais diminuto, sendo que em instâncias com 150 nodos é mesmo inexistente.

Sugere-se em futuros estudos a utilização de um tipo de meta-heurística diferente da pesquisa local iterativa, como a *Adaptive Large Neighborhood Search*, que poderá eventualmente revelar resultados mais favoráveis, na medida em que representa diferentes maneiras de modificar a solução inicial, podendo ser adaptada durante a execução e onde é definida uma estrutura de vizinhança grande, podendo estas características fazer a diferença nos resultados obtidos.

Referências

- Defryn, C., & Sörensen, K. (2017). A fast two-level variable neighborhood search for the clustered vehicle routing problem. *Computers and Operations Research* 83, 78-94.
- Benavent, E. , & Martínez, A. (2013). Multi-depot Multiple TSP: a polyhedral study. *Springer Science+Business Media*, 207:7–25.
- Bernardino, R., & Paias, A. (2018). Solving the family traveling salesman problem. *European Journal of Operational Research* 267, 453-466.
- Bernardino, R., & Paias, A. (2021). Heuristic approaches for the family traveling salesman problem. *International Transactions in Operational Research* 28, 262-295.
- Bernardino, R., Gouveia, L., Paias, A., & Santos, D. (2022). The multi-depot family traveling salesman problem and clustered variants: Mathematical formulations and branch-&-cut based methods. *Networks*, 70.
- Burger, M., Su, Z., & De Schutter, B. (2018). A node current-based 2-index formulation for the fixed-destination multi-depot travelling salesman problem. *European Journal of Operational Research* 265, 463-477.
- Gendreau, & Potvin. (2019). *Handbook of Metaheuristics*. Cham: Springer Nature Switzerland AG.
- Gulczynski, D., Golden, B., & Wasil, E. (2011). The multi-depot split delivery vehicle routing problem: An integer programming-based heuristic, new test problems, and computational results. *Computers & Industrial Engineering* 61, 794-804.
- Hintsch, T., & Irnich, S. (2019). Exact solution of the soft-clustered vehicle-routing problem. *European Journal of Operational Research* 280, 164-178.
- Morán-Mirabal, L., González-Velarde, J., & Resende, M. (2014). Randomized heuristics for the family traveling salesperson. *International Transactions in Operational Research* 21, 41-57.
- Tiburcio da Silva, T., Chaves, A. A., Vianna, B. L., & Schenekemberg, C. M. (2024). A parallel branch-and-cut and an adaptive metaheuristic to solve the Family. *Expert Systems With Applications* 238, Part A, Article 121735.

Anexo

Na Tabela 20 estão apresentados os resultados para instâncias com 50 nodos, para a Perturbação Aleatória. A Tabela está organizada da mesma forma que todas as tabelas do Capítulo 4.

Tabela 20 - Resultados para instâncias com 50 nodos (Perturbação Aleatória).

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gap</i>	<i>t̄</i>
50-15-5-1-1	9,12%	24,95%	20,96%	123,64
50-15-5-1-2	6,49%	27,95%	21,77%	109,26
50-15-5-1-3	-3,73%	5,87%	2,01%	264,41
50-15-5-1a-1	21,85%	60,24%	44,07%	68,52
50-15-5-1a-2	33,25%	44,50%	42,88%	39,09
50-15-5-1a-3	18,00%	27,43%	21,55%	233,78
50-15-5-2-1	14,85%	42,46%	32,85%	125,75
50-15-5-2-2	13,09%	39,26%	29,52%	127,79
50-15-5-2-3	-0,58%	10,82%	6,23%	194,41
50-15-5-2a-1	18,12%	48,03%	35,68%	69,76
50-15-5-2a-2	36,87%	65,40%	52,91%	43,45
50-15-5-2a-3	13,00%	27,09%	19,84%	143,39
50-15-5-3-1	3,76%	30,35%	23,16%	137,94
50-15-5-3-2	13,79%	35,71%	24,02%	133,28
50-15-5-3-3	-0,42%	11,50%	6,87%	197,22
50-15-5-3a-1	29,18%	48,84%	40,27%	63,94
50-15-5-3a-2	33,43%	59,64%	48,53%	44,56
50-15-5-3a-3	9,68%	21,41%	15,33%	144,54
média	14,99%	35,08%	27,14%	125,82
50-15-10-1-1	-0,33%	16,12%	9,91%	135,08
50-15-10-1-2	12,42%	27,09%	20,66%	127,2
50-15-10-1-3	119,13%	122,53%	118,10%	166,8
50-15-10-1a-1	13,53%	29,93%	21,70%	43,38
50-15-10-1a-2	7,55%	38,52%	25,37%	34,48
50-15-10-1a-3	-3,92%	6,86%	3,60%	82,39
50-15-10-2-1	-0,24%	10,02%	6,19%	167,17
50-15-10-2-2	11,92%	33,74%	24,65%	134,08
50-15-10-2-3	-2,22%	1,65%	-0,49%	176,91
50-15-10-2a-1	10,50%	20,90%	16,98%	41,8
50-15-10-2a-2	20,71%	33,85%	28,24%	36,86
50-15-10-2a-3	-0,83%	5,36%	2,57%	88,76
50-15-10-3-1	-6,52%	15,24%	8,43%	159,65
50-15-10-3-2	8,89%	27,36%	18,74%	130,54
50-15-10-3-3	-13,65%	-1,72%	-4,34%	169,47
50-15-10-3a-1	15,04%	28,55%	21,28%	53,27
50-15-10-3a-2	19,69%	33,53%	25,87%	38,01
50-15-10-3a-3	-6,78%	1,21%	-2,04%	71,03

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gap</i>	<i>t̄</i>
média	11,38%	25,04%	19,19%	101,28
50-25-5-1-1	3,73%	3,73%	3,73%	144,88
50-25-5-1-2	11,38%	12,31%	12,23%	125,63
50-25-5-1-3	1,07%	24,96%	16,87%	188,56
50-25-5-1a-1	33,33%	60,53%	52,19%	93,03
50-25-5-1a-2	34,95%	87,47%	71,10%	61,79
50-25-5-1a-3	22,99%	43,06%	33,96%	141,09
50-25-5-2-1	17,82%	23,91%	23,24%	164,75
50-25-5-2-2	19,28%	45,76%	44,34%	117,49
50-25-5-2-3	-4,68%	9,13%	2,79%	258,93
50-25-5-2a-1	31,86%	60,94%	48,97%	87,56
50-25-5-2a-2	39,24%	79,32%	66,39%	57,27
50-25-5-2a-3	10,99%	29,03%	21,27%	153,18
50-25-5-3-1	18,81%	42,91%	30,48%	145,87
50-25-5-3-2	18,72%	37,33%	28,02%	121,36
50-25-5-3-3	15,42%	25,95%	24,58%	176,10
50-25-5-3a-1	39,83%	70,69%	56,87%	81,30
50-25-5-3a-2	54,31%	81,68%	69,91%	54,42
50-25-5-3a-3	18,48%	47,74%	39,12%	134,71
média	21,53%	43,69%	35,89%	128,22
50-25-10-1-1	31,65%	31,65%	31,65%	132,1
50-25-10-1-2	8,10%	9,11%	9,01%	129,62
50-25-10-1-3	11,84%	19,91%	15,58%	146,23
50-25-10-1a-1	35,92%	53,72%	45,97%	51,83
50-25-10-1a-2	77,27%	94,44%	86,23%	42,79
50-25-10-1a-3	24,78%	33,33%	28,99%	84,44
50-25-10-2-1	42,99%	56,58%	54,06%	165,35
50-25-10-2-2	37,69%	38,59%	38,50%	154,44
50-25-10-2-3	-0,47%	1,48%	1,07%	156,08
50-25-10-2a-1	30,52%	45,48%	40,29%	58,6
50-25-10-2a-2	73,21%	85,71%	79,51%	43,74
50-25-10-2a-3	10,87%	19,97%	15,54%	77,82
50-25-10-3-1	22,68%	40,74%	37,55%	163,06
50-25-10-3-2	0,00%	17,83%	14,14%	146,35
50-25-10-3-3	-8,79%	0,65%	-1,05%	160,47
50-25-10-3a-1	45,19%	53,64%	49,92%	52,3
50-25-10-3a-2	65,34%	77,61%	70,08%	41,28
50-25-10-3a-3	10,97%	29,75%	23,84%	69,35
média	28,88%	39,46%	35,60%	104,22
média total	19,19%	35,82%	29,46%	115,35

Na Tabela 21 estão apresentados os resultados para instâncias com 50 nodos, para a Perturbação Frequência na Rota. Mais uma vez, a organização da tabela segue o mesmo formato das tabelas do Capítulo 4.

Tabela 21 - Resultados para instâncias com 50 nodos (Perturbação Frequência na Rota).

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gap̄</i>	<i>t̄</i>
50-15-5-1-1	7,80%	24,95%	22,68%	98,6
50-15-5-1-2	7,68%	27,95%	21,85%	103,23
50-15-5-1-3	-2,52%	6,94%	2,89%	167,72
50-15-5-1a-1	29,53%	53,54%	41,90%	48,05
50-15-5-1a-2	29,25%	44,50%	42,88%	39,09
50-15-5-1a-3	16,93%	27,43%	21,55%	233,78
50-15-5-2-1	19,25%	41,58%	32,70%	91,68
50-15-5-2-2	7,85%	39,26%	29,52%	127,79
50-15-5-2-3	-1,12%	9,22%	5,37%	192,33
50-15-5-2a-1	26,84%	45,47%	36,23%	48,14
50-15-5-2a-2	37,12%	58,08%	49,64%	33
50-15-5-2a-3	12,65%	24,30%	18,83%	132,58
50-15-5-3-1	10,59%	32,47%	22,22%	114,29
50-15-5-3-2	11,13%	39,37%	22,57%	95,97
50-15-5-3-3	-1,84%	9,50%	5,34%	188,69
50-15-5-3a-1	25,58%	46,93%	37,74%	55,76
50-15-5-3a-2	30,42%	53,31%	44,62%	33,93
50-15-5-3a-3	7,33%	19,65%	14,00%	148,67
média	15,25%	33,58%	26,25%	108,52
50-15-10-1-1	5,46%	18,42%	13,05%	132,38
50-15-10-1-2	16,70%	27,09%	20,66%	127,2
50-15-10-1-3	114,31%	123,11%	119,20%	181,27
50-15-10-1a-1	15,02%	28,44%	22,38%	43,94
50-15-10-1a-2	15,56%	31,74%	26,10%	28,62
50-15-10-1a-3	2,54%	7,90%	4,28%	71,55
50-15-10-2-1	4,50%	11,70%	8,37%	131,43
50-15-10-2-2	11,92%	37,07%	30,15%	107,61
50-15-10-2-3	-1,99%	1,96%	0,30%	157,91
50-15-10-2a-1	11,40%	20,70%	15,68%	37,14
50-15-10-2a-2	22,57%	39,26%	29,50%	31,57
50-15-10-2a-3	-1,87%	5,04%	2,58%	85,81
50-15-10-3-1	5,66%	16,81%	12,58%	132,53
50-15-10-3-2	14,15%	34,91%	24,98%	113,01
50-15-10-3-3	-13,65%	-1,10%	-4,77%	178,05
50-15-10-3a-1	18,38%	30,50%	25,08%	40,85
50-15-10-3a-2	10,92%	34,50%	27,86%	30,78
50-15-10-3a-3	-10,05%	-0,11%	-2,66%	75,81
média	13,42%	26,00%	20,85%	94,86

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gap</i>	<i>t̄</i>
50-25-5-1-1	3,73%	3,73%	3,73%	139,41
50-25-5-1-2	12,31%	12,31%	12,31%	105,46
50-25-5-1-3	4,30%	27,94%	17,69%	160,70
50-25-5-1a-1	38,05%	61,32%	49,91%	77,76
50-25-5-1a-2	47,03%	84,40%	64,40%	53,74
50-25-5-1a-3	19,96%	40,24%	32,63%	122,51
50-25-5-2-1	12,45%	23,91%	22,92%	132,88
50-25-5-2-2	24,68%	45,76%	43,30%	96,31
50-25-5-2-3	-7,82%	9,95%	3,24%	155,73
50-25-5-2a-1	38,03%	59,91%	49,55%	73,59
50-25-5-2a-2	43,04%	75,74%	64,42%	47,39
50-25-5-2a-3	15,26%	24,85%	20,65%	128,43
50-25-5-3-1	17,70%	43,10%	31,06%	125,72
50-25-5-3-2	11,78%	37,43%	26,71%	100,03
50-25-5-3-3	9,02%	25,95%	23,40%	179,44
50-25-5-3a-1	37,07%	71,72%	55,01%	81,84
50-25-5-3a-2	39,44%	77,16%	63,61%	47,15
50-25-5-3a-3	28,76%	43,70%	36,90%	127,43
média	21,93%	42,73%	34,52%	108,64
50-25-10-1-1	20,15%	31,65%	29,94%	123,62
50-25-10-1-2	9,11%	9,11%	9,11%	106,56
50-25-10-1-3	4,83%	19,91%	15,20%	132,74
50-25-10-1a-1	41,21%	53,61%	46,97%	45,46
50-25-10-1a-2	73,74%	97,31%	82,54%	34,56
50-25-10-1a-3	24,93%	36,06%	29,51%	83,53
50-25-10-2-1	43,42%	56,58%	52,45%	151,53
50-25-10-2-2	38,59%	38,59%	38,59%	125,88
50-25-10-2-3	-2,77%	1,48%	0,82%	145,13
50-25-10-2a-1	30,61%	42,08%	37,22%	49,43
50-25-10-2a-2	61,53%	78,57%	71,75%	37,39
50-25-10-2a-3	9,78%	21,34%	16,02%	71
50-25-10-3-1	22,68%	40,74%	37,16%	142,38
50-25-10-3-2	0,00%	17,83%	14,73%	125,46
50-25-10-3-3	-8,79%	0,65%	-0,98%	136,47
50-25-10-3a-1	41,31%	56,92%	48,25%	45,47
50-25-10-3a-2	55,06%	74,39%	67,35%	35,25
50-25-10-3a-3	12,85%	29,75%	23,04%	67,77
média	26,57%	39,25%	34,43%	92,2
média total	19,29%	35,39%	29,01%	101,05

A Tabela 22 apresenta os resultados para instâncias com 100 nodos, para a Perturbação Aleatória. A Tabela está organizada da mesma forma que todas as tabelas deste anexo.

Tabela 22 - Resultados para instâncias com 100 nodos (Perturbação Aleatória).

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gap̄</i>	<i>t̄</i>
100-30-5-1-1	-7,38%	2,48%	1,49%	473,73
100-30-5-1-2	20,50%	39,70%	37,11%	426,90
100-30-5-1-3	-6,75%	13,12%	6,09%	691,80
100-30-5-1a-1	26,32%	44,26%	33,44%	475,75
100-30-5-1a-2	29,53%	57,89%	47,16%	167,73
100-30-5-1a-3	15,23%	25,22%	20,59%	653,33
100-30-5-2-1	3,03%	14,18%	10,12%	450,43
100-30-5-2-2	16,51%	17,35%	17,19%	399,31
100-30-5-2-3	9,94%	12,87%	11,70%	719,42
100-30-5-2a-1	18,95%	18,95%	18,95%	237,90
100-30-5-2a-2	22,38%	24,90%	24,64%	179,96
100-30-5-2a-3	29,27%	35,57%	33,44%	571,52
100-30-5-3-1	24,46%	27,81%	27,13%	460,20
100-30-5-3-2	26,04%	26,04%	26,04%	424,42
100-30-5-3-3	-14,92%	-14,25%	-14,31%	633,28
100-30-5-3a-1	27,00%	30,51%	29,90%	256,60
100-30-5-3a-2	52,72%	75,65%	72,37%	166,94
100-30-5-3a-3	4,14%	4,35%	4,33%	548,69
média	16,50%	25,37%	22,63%	440,99
100-30-10-1-1	-7,30%	-3,01%	-4,50%	481,915
100-30-10-1-2	10,24%	23,45%	20,56%	407,359
100-30-10-1-3	-12,06%	-10,89%	-11,01%	627,541
100-30-10-1a-1	38,50%	47,90%	44,45%	168,015
100-30-10-1a-2	62,40%	79,34%	72,09%	113,911
100-30-10-1a-3	8,48%	21,93%	15,53%	290,313
100-30-10-2-1	-11,46%	-4,05%	-8,12%	444,643
100-30-10-2-2	-17,09%	-14,14%	-14,47%	402,978
100-30-10-2-3	-11,81%	-2,21%	-5,53%	572,994
100-30-10-2a-1	16,03%	21,30%	20,33%	185,09
100-30-10-2a-2	31,39%	33,11%	32,93%	116,279
100-30-10-2a-3	3,34%	6,30%	6,00%	300,462
100-30-10-3-1	-3,30%	1,25%	0,23%	442,706
100-30-10-3-2	57,66%	68,52%	67,22%	426,159
100-30-10-3-3	-5,87%	0,05%	145,31%	588,909
100-30-10-3a-1	16,28%	39,44%	27,49%	189,231
100-30-10-3a-2	16,23%	32,56%	25,60%	109,688
100-30-10-3a-3	3,18%	12,68%	7,73%	295,077
média	10,82%	19,64%	24,55%	342,40

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gap̄</i>	<i>t̄</i>
100-30-20-1-1	-10,82%	-2,37%	-7,01%	586,323
100-30-20-1-2	8,04%	20,87%	14,24%	546,089
100-30-20-1-3	-16,50%	-4,12%	-10,27%	563,832
100-30-20-1a-1	12,00%	18,45%	15,30%	144,126
100-30-20-1a-2	17,50%	34,64%	26,03%	130,957
100-30-20-1a-3	-3,64%	2,60%	0,00%	199,977
100-30-20-2-1	-18,29%	-10,47%	-13,22%	551,132
100-30-20-2-2	3,96%	3,96%	3,96%	487,002
100-30-20-2-3	-10,85%	-5,99%	-7,80%	590,531
100-30-20-2a-1	-1,38%	7,05%	3,61%	159,668
100-30-20-2a-2	18,27%	25,07%	22,41%	135,407
100-30-20-2a-3	-7,70%	-3,14%	-5,09%	225,642
100-30-20-3-1	-10,09%	-0,98%	-5,52%	549,511
100-30-20-3-2	-15,26%	1,26%	-3,77%	497,276
100-30-20-3-3	-8,01%	2,33%	-1,65%	592,111
100-30-20-3a-1	-8,76%	-2,98%	-6,03%	130,532
100-30-20-3a-2	-6,95%	5,03%	1,84%	109,635
100-30-20-3a-3	-8,99%	-0,06%	-3,10%	184,509
média	-3,33%	5,50%	1,82%	370,46
100-50-5-1-1	-6,29%	4,04%	0,65%	513,72
100-50-5-1-2	-2,95%	-1,04%	-1,49%	414,61
100-50-5-1-3	24,53%	34,39%	30,91%	672,04
100-50-5-1a-1	23,05%	41,44%	33,48%	281,08
100-50-5-1a-2	47,54%	68,44%	56,66%	236,52
100-50-5-1a-3	10,56%	22,14%	15,39%	555,57
100-50-5-2-1	-11,14%	0,10%	-2,40%	455,17
100-50-5-2-2	-11,64%	-2,23%	-4,50%	454,87
100-50-5-2-3	-3,24%	8,79%	6,55%	641,9
100-50-5-2a-1	8,53%	25,16%	17,97%	306,37
100-50-5-2a-2	22,61%	37,72%	34,33%	261,51
100-50-5-2a-3	12,36%	30,61%	23,41%	629,33
100-50-5-3-1	-7,02%	-7,02%	-7,02%	486,28
100-50-5-3-2	-25,56%	-25,30%	-25,33%	459,56
100-50-5-3-3	-10,35%	-7,80%	-8,26%	702,75
100-50-5-3a-1	21,93%	22,73%	22,65%	385,41
100-50-5-3a-2	39,39%	60,06%	54,94%	257,00
100-50-5-3a-3	17,78%	25,39%	22,39%	664,63
média	9,20%	19,62%	15,86%	462,62
100-50-10-1-1	-24,37%	-24,37%	-24,37%	486,51
100-50-10-1-2	-16,75%	-14,43%	-14,66%	527,43
100-50-10-1-3	-8,70%	-4,47%	-5,00%	572,57
100-50-10-1a-1	29,25%	39,29%	34,49%	182,12
100-50-10-1a-2	39,43%	56,04%	47,26%	162,87
100-50-10-1a-3	12,79%	24,65%	19,03%	359,85
100-50-10-2-1	-29,70%	-29,70%	-29,70%	520,74
100-50-10-2-2	-12,69%	-12,69%	-12,69%	483,59

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gap̄</i>	<i>t̄</i>
100-50-10-2-3	-25,25%	-25,25%	-25,25%	635,4
100-50-10-2a-1	0,20%	18,11%	12,73%	226,97
100-50-10-2a-2	69,18%	78,69%	76,67%	184,27
100-50-10-2a-3	-8,08%	8,82%	1,80%	405,67
100-50-10-3-1	18,06%	23,73%	22,53%	519,43
100-50-10-3-2	14,01%	14,01%	14,01%	462,58
100-50-10-3-3	-13,91%	-9,28%	-9,74%	580,85
100-50-10-3a-1	17,34%	36,16%	25,78%	216,38
100-50-10-3a-2	36,04%	43,84%	41,92%	176,86
100-50-10-3a-3	4,10%	18,88%	12,22%	345,8
média	5,61%	13,45%	10,39%	391,66
100-50-20-1-1	-26,66%	-26,53%	-26,55%	636,52
100-50-20-1-2	-1,03%	-1,03%	-1,03%	549,09
100-50-20-1-3	-15,87%	-11,02%	-11,59%	591,78
100-50-20-1a-1	19,49%	29,85%	29,85%	165,79
100-50-20-1a-2	67,63%	84,44%	75,85%	155,02
100-50-20-1a-3	4,20%	9,70%	6,95%	230,9
100-50-20-2-1	-26,61%	-26,61%	-26,61%	640,64
100-50-20-2-2	-18,93%	-16,45%	-16,70%	580,87
100-50-20-2-3	-19,92%	-19,92%	-19,92%	599,53
100-50-20-2a-1	7,17%	22,77%	17,64%	186,38
100-50-20-2a-2	11,05%	20,96%	19,60%	141,71
100-50-20-2a-3	4,39%	13,76%	10,40%	229,27
100-50-20-3-1	-21,24%	-17,59%	-18,45%	603,88
100-50-20-3-2	-7,40%	-6,64%	-6,73%	533,26
100-50-20-3-3	-16,06%	-11,49%	-12,27%	558,47
100-50-20-3a-1	11,28%	25,12%	18,67%	187,34
100-50-20-3a-2	18,69%	26,97%	26,15%	137,99
100-50-20-3a-3	-1,06%	12,54%	6,25%	205,88
média	-0,60%	6,05%	3,97%	385,24
média total	6,15%	14,72%	12,98%	396,74

A Tabela 23 apresenta os resultados para instâncias com 100 nodos, para a Perturbação Frequência na Rota e está organizada como as restantes.

Tabela 23 - Resultados para instâncias com 100 nodos (Perturbação Frequência na Rota).

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gap̄</i>	<i>t̄</i>
100-30-5-1-1	-6,59%	2,48%	0,80%	449,872
100-30-5-1-2	27,77%	39,70%	38,43%	331,967
100-30-5-1-3	-1,01%	9,96%	3,45%	610,14
100-30-5-1a-1	25,60%	36,72%	31,42%	209,324
100-30-5-1a-2	30,20%	56,88%	48,37%	144,639
100-30-5-1a-3	13,19%	24,27%	19,10%	594,821

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gāp</i>	<i>t̄</i>
<i>100-30-5-2-1</i>	2,44%	14,18%	11,37%	388,436
<i>100-30-5-2-2</i>	17,35%	17,35%	17,35%	334,372
<i>100-30-5-2-3</i>	6,61%	12,87%	11,59%	608,342
<i>100-30-5-2a-1</i>	5,88%	18,95%	15,84%	211,477
<i>100-30-5-2a-2</i>	9,23%	24,90%	20,20%	156,989
<i>100-30-5-2a-3</i>	23,55%	35,57%	31,06%	542,896
<i>100-30-5-3-1</i>	27,81%	27,81%	27,81%	398,895
<i>100-30-5-3-2</i>	26,04%	26,04%	26,04%	297,133
<i>100-30-5-3-3</i>	-14,52%	-14,25%	-14,27%	583,5
<i>100-30-5-3a-1</i>	16,22%	30,51%	26,92%	257,038
<i>100-30-5-3a-2</i>	47,08%	75,65%	68,53%	136,626
<i>100-30-5-3a-3</i>	4,35%	4,35%	4,35%	522,959
<i>média</i>	14,51%	24,66%	21,58%	376,63
<i>100-30-10-1-1</i>	-14,69%	-3,01%	-5,39%	381,90
<i>100-30-10-1-2</i>	5,99%	23,45%	18,20%	309,50
<i>100-30-10-1-3</i>	-16,71%	-10,89%	-11,62%	579,85
<i>100-30-10-1a-1</i>	28,92%	49,06%	39,88%	136,89
<i>100-30-10-1a-2</i>	66,67%	79,48%	72,33%	92,97
<i>100-30-10-1a-3</i>	3,47%	19,47%	14,74%	272,18
<i>100-30-10-2-1</i>	-13,08%	-0,26%	-5,88%	370,11
<i>100-30-10-2-2</i>	-14,14%	-14,14%	-14,14%	405,88
<i>100-30-10-2-3</i>	-8,60%	-2,21%	-4,66%	555,64
<i>100-30-10-2a-1</i>	9,47%	21,30%	18,59%	160,92
<i>100-30-10-2a-2</i>	33,11%	33,11%	33,11%	89,47
<i>100-30-10-2a-3</i>	2,39%	6,30%	5,91%	278,32
<i>100-30-10-3-1</i>	-13,08%	1,25%	-2,71%	379,16
<i>100-30-10-3-2</i>	47,17%	68,52%	62,23%	352,93
<i>100-30-10-3-3</i>	-5,85%	0,05%	-1,55%	523,52
<i>100-30-10-3a-1</i>	23,16%	31,26%	26,87%	151,97
<i>100-30-10-3a-2</i>	17,24%	35,38%	25,78%	88,88
<i>100-30-10-3a-3</i>	1,00%	12,27%	7,32%	289,02
<i>média</i>	8,47%	19,47%	15,50%	301,06
<i>100-30-20-1-1</i>	-10,59%	-1,27%	-4,83%	452,56
<i>100-30-20-1-2</i>	12,41%	22,27%	16,03%	410,91
<i>100-30-20-1-3</i>	-16,50%	-3,44%	-10,20%	500,14
<i>100-30-20-1a-1</i>	11,47%	20,80%	16,26%	133,04
<i>100-30-20-1a-2</i>	16,25%	32,05%	27,74%	99,4
<i>100-30-20-1a-3</i>	-1,85%	3,81%	0,75%	251,16
<i>100-30-20-2-1</i>	-14,60%	-8,16%	-10,70%	470,38
<i>100-30-20-2-2</i>	3,96%	3,96%	3,96%	430,23
<i>100-30-20-2-3</i>	-7,31%	-5,11%	-6,21%	529,78
<i>100-30-20-2a-1</i>	-3,48%	7,48%	4,58%	140,35
<i>100-30-20-2a-2</i>	17,11%	27,85%	23,39%	104,34
<i>100-30-20-2a-3</i>	-8,82%	-2,57%	-4,54%	180,41
<i>100-30-20-3-1</i>	-10,09%	0,17%	-4,72%	454,03
<i>100-30-20-3-2</i>	-15,26%	1,13%	-3,17%	424,64

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>g_{ap}</i>	<i>t̄</i>
<i>100-30-20-3-3</i>	-8,01%	2,78%	-1,07%	497
<i>100-30-20-3a-1</i>	-6,01%	0,22%	-3,36%	110,71
<i>100-30-20-3a-2</i>	0,87%	6,83%	4,62%	87,68
<i>100-30-20-3a-3</i>	-5,60%	0,39%	-1,15%	181,1
<i>média</i>	-2,56%	6,07%	2,63%	326,54
<i>100-50-5-1-1</i>	-7,92%	0,36%	-3,96%	408,99
<i>100-50-5-1-2</i>	-17,37%	-1,04%	-3,34%	362,54
<i>100-50-5-1-3</i>	20,72%	34,39%	31,28%	632,95
<i>100-50-5-1a-1</i>	25,62%	37,59%	32,01%	257,28
<i>100-50-5-1a-2</i>	49,27%	61,38%	55,34%	216,08
<i>100-50-5-1a-3</i>	4,66%	22,82%	15,02%	569,01
<i>100-50-5-2-1</i>	-13,28%	0,10%	-2,35%	456,12
<i>100-50-5-2-2</i>	-7,19%	-2,23%	-3,68%	377,26
<i>100-50-5-2-3</i>	-0,59%	8,79%	5,31%	595,01
<i>100-50-5-2a-1</i>	5,87%	25,24%	17,28%	288,95
<i>100-50-5-2a-2</i>	23,37%	40,76%	31,24%	215,32
<i>100-50-5-2a-3</i>	9,59%	24,86%	18,78%	662,32
<i>100-50-5-3-1</i>	-7,14%	-7,02%	-7,03%	435,19
<i>100-50-5-3-2</i>	-25,30%	-25,30%	-25,30%	373,61
<i>100-50-5-3-3</i>	-9,33%	-7,80%	-7,95%	714,56
<i>100-50-5-3a-1</i>	17,35%	22,73%	22,01%	306,86
<i>100-50-5-3a-2</i>	33,75%	58,68%	51,80%	220,44
<i>100-50-5-3a-3</i>	9,43%	24,11%	18,51%	665,46
<i>média</i>	6,20%	17,69%	13,61%	431
<i>100-50-10-1-1</i>	-24,37%	-24,37%	-24,37%	444,21
<i>100-50-10-1-2</i>	-14,90%	-14,43%	-14,48%	488,02
<i>100-50-10-1-3</i>	-7,01%	-4,47%	-4,72%	567,47
<i>100-50-10-1a-1</i>	20,93%	36,51%	29,72%	158,77
<i>100-50-10-1a-2</i>	34,64%	46,00%	39,91%	142,08
<i>100-50-10-1a-3</i>	10,47%	26,42%	17,59%	333,4
<i>100-50-10-2-1</i>	-31,51%	-29,70%	-29,88%	476,32
<i>100-50-10-2-2</i>	-12,69%	-12,69%	-12,69%	380,68
<i>100-50-10-2-3</i>	-28,20%	-25,25%	-25,55%	567,36
<i>100-50-10-2a-1</i>	9,89%	18,11%	13,46%	185,61
<i>100-50-10-2a-2</i>	62,40%	78,69%	73,93%	161,11
<i>100-50-10-2a-3</i>	-2,00%	6,94%	3,50%	366,06
<i>100-50-10-3-1</i>	23,73%	23,73%	23,73%	422,66
<i>100-50-10-3-2</i>	14,01%	14,01%	14,01%	381,7
<i>100-50-10-3-3</i>	-11,12%	-9,28%	-9,47%	538,93
<i>100-50-10-3a-1</i>	14,86%	36,16%	25,90%	200,07
<i>100-50-10-3a-2</i>	29,06%	43,84%	38,10%	151,87
<i>100-50-10-3a-3</i>	8,20%	16,87%	12,58%	377,85
<i>média</i>	5,36%	12,62%	9,52%	352,45
<i>100-50-20-1-1</i>	-26,53%	-26,53%	-26,53%	504,85
<i>100-50-20-1-2</i>	-1,03%	-1,03%	-1,03%	453,32
<i>100-50-20-1-3</i>	-14,22%	-11,12%	-11,49%	540,78

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>g_{ap}</i>	<i>t̄</i>
100-50-20-1a-1	16,64%	29,75%	24,50%	148,32
100-50-20-1a-2	67,55%	80,79%	75,57%	123,41
100-50-20-1a-3	2,27%	9,70%	7,16%	234,41
100-50-20-2-1	-28,13%	-26,61%	-26,86%	539,38
100-50-20-2-2	-18,06%	-16,45%	-16,71%	471,25
100-50-20-2-3	-19,92%	-19,92%	-19,92%	554,98
100-50-20-2a-1	12,66%	22,77%	17,80%	143,88
100-50-20-2a-2	17,32%	20,96%	20,42%	119,11
100-50-20-2a-3	3,66%	13,73%	10,41%	235,47
100-50-20-3-1	-21,10%	-17,59%	-18,13%	547,11
100-50-20-3-2	-7,40%	-6,64%	-6,73%	455,7
100-50-20-3-3	-16,06%	-11,49%	-12,19%	520,76
100-50-20-3a-1	6,25%	22,60%	15,62%	153,68
100-50-20-3a-2	26,20%	26,97%	26,90%	110,02
100-50-20-3a-3	3,93%	10,36%	7,33%	199,54
média	0,22%	5,57%	3,67%	336,44
média total	5,37%	14,35%	11,08%	350,13

Na Tabela 24 estão apresentados os resultados para instâncias com 150 nodos, para a Perturbação Aleatória. A organização da tabela é feita da mesma forma que todas as tabelas do anexo.

Tabela 24 - Resultados para instâncias com 150 nodos (Perturbação Aleatória).

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>g_{ap}</i>	<i>t̄</i>
150-45-10-1-1	-11,46%	-4,45%	-5,36%	1001,08
150-45-10-1-2	-27,51%	-12,25%	-14,23%	891,76
150-45-10-1-3	-8,84%	-8,71%	-8,72%	1274,79
150-45-10-1a-1	-6,72%	-1,63%	-2,34%	452,02
150-45-10-1a-2	-12,64%	-11,38%	-11,51%	295,91
150-45-10-1a-3	-6,37%	-0,10%	-2,03%	787,81
150-45-10-2-1	-13,78%	-5,05%	-7,06%	1003,17
150-45-10-2-2	-5,18%	8,57%	7,06%	939,79
150-45-10-2-3	-13,82%	-3,08%	-5,77%	1163,57
150-45-10-2a-1	11,07%	21,73%	17,01%	550,21
150-45-10-2a-2	27,15%	38,36%	33,61%	255,49
150-45-10-2a-3	3,28%	15,56%	9,80%	743,36
150-45-10-3-1	-0,77%	9,57%	3,17%	1136,24
150-45-10-3-2	0,43%	7,79%	6,64%	858,96
150-45-10-3-3	-16,24%	-4,41%	-8,22%	1291,08
150-45-10-3a-1	12,63%	20,00%	16,86%	447,95
150-45-10-3a-2	0,68%	8,28%	6,28%	251,08
150-45-10-3a-3	3,57%	9,43%	6,74%	821,67
média	-3,58%	4,90%	2,33%	787,00

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gāp</i>	<i>t̄</i>
150-45-20-1-1	-8,14%	3,79%	-0,41%	1017,81
150-45-20-1-2	-9,02%	3,37%	1,10%	1045,52
150-45-20-1-3	-15,19%	-7,98%	-10,36%	1078,15
150-45-20-1a-1	-13,06%	-9,83%	-10,81%	318,94
150-45-20-1a-2	14,36%	20,58%	19,05%	214,34
150-45-20-1a-3	-14,22%	-3,17%	-7,00%	426,65
150-45-20-2-1	-16,37%	-2,30%	-7,94%	1047,54
150-45-20-2-2	-13,40%	6,65%	4,32%	1084,58
150-45-20-2-3	-13,04%	-2,56%	-6,77%	1228,26
150-45-20-2a-1	-4,92%	4,48%	1,53%	319,64
150-45-20-2a-2	11,04%	21,05%	17,13%	217,38
150-45-20-2a-3	-9,49%	-1,37%	-4,55%	516,47
150-45-20-3-1	-5,66%	4,70%	0,26%	1097,29
150-45-20-3-2	-2,96%	20,81%	10,73%	999,53
150-45-20-3-3	-14,88%	-1,24%	-4,85%	1095,36
150-45-20-3a-1	0,84%	7,43%	2,84%	337,95
150-45-20-3a-2	25,70%	33,31%	29,33%	227,51
150-45-20-3a-3	-7,69%	-0,63%	-4,57%	506,67
média	-5,34%	5,40%	1,61%	709,98
150-45-30-1-1	-29,32%	-9,54%	-13,68%	1203,34
150-45-30-1-2	-17,02%	6,70%	-2,95%	1218,72
150-45-30-1-3	-32,35%	-4,61%	-11,37%	1156,6
150-45-30-1a-1	-11,54%	-0,55%	-5,79%	314,07
150-45-30-1a-2	2,95%	18,83%	11,94%	238,98
150-45-30-1a-3	-19,04%	-10,98%	-14,30%	382,35
150-45-30-2-1	-11,61%	-2,14%	-5,82%	1222,37
150-45-30-2-2	-7,89%	1,04%	-1,36%	1177,34
150-45-30-2-3	-15,54%	-6,66%	-9,67%	1313,34
150-45-30-2a-1	-6,83%	-0,70%	-4,19%	306,22
150-45-30-2a-2	-1,59%	14,30%	7,41%	243,53
150-45-30-2a-3	-14,19%	-7,44%	-10,42%	443,89
150-45-30-3-1	-16,53%	-2,30%	-5,79%	1156,4
150-45-30-3-2	-14,04%	5,69%	2,10%	2144,27
150-45-30-3-3	-17,46%	-4,78%	-7,99%	1243,82
150-45-30-3a-1	-8,15%	-0,29%	-3,09%	310,77
150-45-30-3a-2	10,13%	21,41%	17,09%	259,48
150-45-30-3a-3	-13,22%	-9,35%	-10,93%	459,93
média	-12,40%	0,48%	-3,82%	821,97
150-75-10-1-1	-25,88%	-25,88%	-25,88%	904,84
150-75-10-1-2	-35,45%	-35,45%	-35,45%	830,05
150-75-10-1-3	-27,13%	-27,13%	-27,13%	1150,89
150-75-10-1a-1	-25,01%	-25,01%	-25,01%	443,64
150-75-10-1a-2	-28,77%	-28,77%	-28,77%	337,24
150-75-10-1a-3	-10,26%	6,01%	0,68%	755,63
150-75-10-2-1	-33,84%	-33,71%	-33,72%	923,26
150-75-10-2-2	-30,58%	-30,58%	-30,58%	836,69

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gap̄</i>	<i>t̄</i>
150-75-10-2-3	-22,46%	-16,80%	-17,82%	1114,28
150-75-10-2a-1	24,86%	27,74%	27,14%	446,52
150-75-10-2a-2	15,51%	21,63%	19,50%	337,44
150-75-10-2a-3	-5,00%	3,87%	0,06%	747,21
150-75-10-3-1	-40,48%	-40,48%	-40,48%	917,45
150-75-10-3-2	-31,94%	-27,97%	-28,37%	864,05
150-75-10-3-3	-22,24%	-16,29%	-17,02%	1102,31
150-75-10-3a-1	-0,98%	7,32%	5,30%	434,1
150-75-10-3a-2	-4,06%	-1,78%	-2,04%	339,05
150-75-10-3a-3	-6,77%	0,70%	-2,54%	758,43
média	-17,25%	-13,48%	-14,56%	735,73
150-75-20-1-1	-28,05%	-28,05%	-28,05%	939,59
150-75-20-1-2	-34,64%	-34,64%	-34,64%	930,65
150-75-20-1-3	-25,18%	-24,54%	-24,60%	1021,67
150-75-20-1a-1	-12,40%	-4,26%	-5,57%	310,54
150-75-20-1a-2	-15,53%	-4,91%	-5,97%	261,05
150-75-20-1a-3	-11,40%	1,29%	-6,20%	469,97
150-75-20-2-1	-22,71%	-22,31%	-22,35%	1118,14
150-75-20-2-2	-25,35%	-25,32%	-25,32%	901,82
150-75-20-2-3	-19,80%	-18,24%	-18,49%	1055,13
150-75-20-2a-1	-11,09%	-7,83%	-8,63%	379,5
150-75-20-2a-2	7,85%	8,41%	8,35%	261,84
150-75-20-2a-3	-13,16%	-11,17%	-11,49%	450,93
150-75-20-3-1	-36,07%	-35,73%	-35,76%	1012,28
150-75-20-3-2	-21,30%	-21,30%	-21,30%	1114,53
150-75-20-3-3	-21,27%	-19,28%	-19,52%	1034,09
150-75-20-3a-1	-9,00%	-9,00%	-9,00%	310,65
150-75-20-3a-2	8,20%	8,41%	8,39%	294,33
150-75-20-3a-3	-5,73%	4,97%	0,34%	473,09
média	-16,48%	-13,53%	-14,43%	685,54
150-75-30-1-1	-21,78%	-18,31%	-19,29%	1084,92
150-75-30-1-2	-30,31%	-27,35%	-27,73%	1049,64
150-75-30-1-3	-23,57%	-16,70%	-18,38%	1134,12
150-75-30-1a-1	-15,07%	-14,48%	-14,55%	294,38
150-75-30-1a-2	-10,91%	-9,05%	-9,42%	295,32
150-75-30-1a-3	-2,04%	8,34%	2,19%	387,31
150-75-30-2-1	-21,93%	-17,91%	-19,01%	1049,4
150-75-30-2-2	-24,44%	-18,01%	-19,29%	1063,84
150-75-30-2-3	-21,79%	-17,31%	-18,16%	1158,01
150-75-30-2a-1	-8,88%	3,78%	1,46%	286,54
150-75-30-2a-2	-11,59%	1,51%	-0,16%	261,26
150-75-30-2a-3	-6,98%	-0,60%	-4,14%	454,95
150-75-30-3-1	-31,87%	-31,87%	-31,87%	1173,01
150-75-30-3-2	-21,79%	-20,98%	-21,06%	1138,23
150-75-30-3-3	-18,41%	-18,41%	-18,41%	1072,67
150-75-30-3a-1	-17,08%	-15,84%	-15,97%	297,72

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gap̄</i>	<i>t̄</i>
150-75-30-3a-2	-4,56%	4,38%	3,11%	265,04
150-75-30-3a-3	-7,35%	1,85%	-3,79%	377,2
média	-16,69%	-11,50%	-13,03%	713,53
média total	-11,96%	-4,62%	-6,98%	742,29

Por fim, a Tabela 25 apresenta os resultados para instâncias com 150 nodos, para a Perturbação Aleatória, organizada da mesma forma que todas as outras tabelas.

Tabela 25 - Resultados para instâncias com 150 nodos (Perturbação Frequência na Rota).

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gap̄</i>	<i>t̄</i>
150-45-10-1-1	-12,27%	-4,45%	-6,10%	810,42
150-45-10-1-2	-17,33%	-12,25%	-13,26%	716,86
150-45-10-1-3	-16,32%	-8,71%	-10,69%	1054,22
150-45-10-1a-1	-10,89%	-1,63%	-3,72%	406,95
150-45-10-1a-2	-11,38%	-11,38%	-11,38%	225,93
150-45-10-1a-3	-9,29%	-0,10%	-2,78%	759,88
150-45-10-2-1	-16,37%	-5,05%	-8,80%	879,44
150-45-10-2-2	-3,52%	8,57%	5,88%	709,56
150-45-10-2-3	-13,92%	-3,08%	-5,76%	1072,13
150-45-10-2a-1	10,21%	24,76%	18,91%	432,79
150-45-10-2a-2	21,23%	33,23%	28,14%	199,68
150-45-10-2a-3	1,07%	14,10%	9,00%	706,87
150-45-10-3-1	-9,22%	12,75%	3,84%	842,53
150-45-10-3-2	-7,57%	7,79%	1,83%	720,95
150-45-10-3-3	-14,59%	-2,65%	-6,80%	1097,70
150-45-10-3a-1	-5,52%	20,00%	14,83%	386,40
150-45-10-3a-2	-2,41%	8,28%	6,13%	220,25
150-45-10-3a-3	-2,64%	13,04%	7,37%	767,46
média	-6,71%	5,18%	1,48%	667,22
150-45-20-1-1	-6,84%	8,68%	2,52%	918,39
150-45-20-1-2	-10,76%	3,37%	0,13%	785,78
150-45-20-1-3	-13,46%	-5,31%	-8,59%	1090,31
150-45-20-1a-1	-13,06%	-9,83%	-10,86%	270,20
150-45-20-1a-2	1,02%	20,58%	15,35%	172,39
150-45-20-1a-3	-15,65%	-3,23%	-8,68%	410,31
150-45-20-2-1	-11,94%	0,96%	-6,02%	918,26
150-45-20-2-2	-13,40%	6,65%	3,86%	795,13
150-45-20-2-3	-13,04%	-2,56%	-6,28%	1013,41
150-45-20-2a-1	-4,18%	4,48%	2,11%	277,12
150-45-20-2a-2	11,78%	19,51%	17,01%	173,82
150-45-20-2a-3	-5,53%	-1,69%	-3,55%	412,88
150-45-20-3-1	-5,66%	6,09%	2,19%	1018,25
150-45-20-3-2	-6,37%	20,67%	13,70%	814,73

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>gap̄</i>	<i>t̄</i>
<i>150-45-20-3-3</i>	-15,32%	-1,05%	-4,97%	1133,13
<i>150-45-20-3a-1</i>	3,06%	7,98%	5,16%	279,44
<i>150-45-20-3a-2</i>	23,65%	32,90%	28,18%	178,99
<i>150-45-20-3a-3</i>	-12,71%	-2,53%	-6,06%	419,62
<i>média</i>	-6,02%	5,87%	1,96%	615,68
<i>150-45-30-1-1</i>	-29,32%	-2,69%	-9,86%	1018,79
<i>150-45-30-1-2</i>	-17,02%	6,70%	0,94%	962,43
<i>150-45-30-1-3</i>	-32,35%	-2,92%	-10,82%	1181,67
<i>150-45-30-1a-1</i>	-4,87%	0,02%	-2,44%	281,61
<i>150-45-30-1a-2</i>	8,16%	16,98%	13,34%	191,31
<i>150-45-30-1a-3</i>	-19,04%	-9,94%	-13,04%	417,98
<i>150-45-30-2-1</i>	-9,21%	-0,65%	-3,59%	1012,06
<i>150-45-30-2-2</i>	-8,62%	1,04%	-1,29%	1004,47
<i>150-45-30-2-3</i>	-15,54%	-5,37%	-9,08%	1096,63
<i>150-45-30-2a-1</i>	-6,01%	0,68%	-1,67%	268,93
<i>150-45-30-2a-2</i>	-1,59%	12,92%	8,58%	223,97
<i>150-45-30-2a-3</i>	-13,13%	-5,85%	-9,26%	366,86
<i>150-45-30-3-1</i>	-13,96%	1,54%	-1,56%	1175,11
<i>150-45-30-3-2</i>	-14,04%	5,69%	3,33%	972,28
<i>150-45-30-3-3</i>	-17,37%	-3,19%	-6,43%	1121,95
<i>150-45-30-3a-1</i>	-3,55%	-0,24%	-1,64%	268,31
<i>150-45-30-3a-2</i>	12,74%	20,93%	17,48%	240,2
<i>150-45-30-3a-3</i>	-11,62%	-8,76%	-10,49%	362,9
<i>média</i>	-10,91%	1,49%	-2,08%	675,97
<i>150-75-10-1-1</i>	-25,88%	-25,88%	-25,88%	814,26
<i>150-75-10-1-2</i>	-35,52%	-35,45%	-35,46%	697,22
<i>150-75-10-1-3</i>	-27,50%	-27,13%	-27,16%	1043,44
<i>150-75-10-1a-1</i>	-25,63%	-25,01%	-25,07%	383,65
<i>150-75-10-1a-2</i>	-29,11%	-28,77%	-28,80%	290,88
<i>150-75-10-1a-3</i>	-12,02%	6,01%	-2,16%	1413,88
<i>150-75-10-2-1</i>	-35,86%	-33,71%	-33,92%	787,53
<i>150-75-10-2-2</i>	-30,58%	-30,58%	-30,58%	744,91
<i>150-75-10-2-3</i>	-19,54%	-16,80%	-17,48%	1034,59
<i>150-75-10-2a-1</i>	25,27%	27,74%	27,38%	390,45
<i>150-75-10-2a-2</i>	12,04%	21,63%	18,36%	289,83
<i>150-75-10-2a-3</i>	-6,61%	3,87%	-1,52%	720,67
<i>150-75-10-3-1</i>	-40,48%	-40,48%	-40,48%	793,29
<i>150-75-10-3-2</i>	-27,97%	-27,97%	-27,97%	714,4
<i>150-75-10-3-3</i>	-23,98%	-16,29%	-17,60%	1013,3
<i>150-75-10-3a-1</i>	-0,58%	7,32%	3,60%	389,2
<i>150-75-10-3a-2</i>	-6,05%	-1,78%	-2,36%	290,98
<i>150-75-10-3a-3</i>	-13,54%	0,70%	-2,73%	714,55
<i>média</i>	-17,97%	-13,48%	-14,99%	695,94
<i>150-75-20-1-1</i>	-28,07%	-28,05%	-28,06%	822,87
<i>150-75-20-1-2</i>	-34,64%	-34,64%	-34,64%	787,26
<i>150-75-20-1-3</i>	-25,12%	-24,54%	-24,64%	944,4

<i>Instância</i>	<i>gap_m</i>	<i>gap_M</i>	<i>g_{ap}</i>	<i>t̄</i>
150-75-20-1a-1	-12,40%	-4,26%	-6,83%	270,2
150-75-20-1a-2	-11,24%	-4,91%	-5,80%	275,65
150-75-20-1a-3	-12,86%	1,29%	-6,61%	465,87
150-75-20-2-1	-24,17%	-22,31%	-22,49%	848,33
150-75-20-2-2	-28,24%	-25,32%	-25,61%	893,89
150-75-20-2-3	-18,58%	-18,24%	-18,27%	1007,89
150-75-20-2a-1	-8,83%	-7,83%	-8,07%	330,52
150-75-20-2a-2	4,81%	8,41%	7,53%	221,85
150-75-20-2a-3	-11,40%	-11,17%	-11,19%	490,25
150-75-20-3-1	-35,73%	-35,73%	-35,73%	860
150-75-20-3-2	-21,30%	-21,30%	-21,30%	837,14
150-75-20-3-3	-20,41%	-19,28%	-19,43%	966,46
150-75-20-3a-1	-12,18%	-9,00%	-9,65%	329,13
150-75-20-3a-2	2,54%	8,41%	6,77%	227,46
150-75-20-3a-3	-9,81%	6,77%	-2,26%	433,69
média	-17,09%	-13,43%	-14,79%	611,83
150-75-30-1-1	-21,26%	-18,31%	-19,10%	1025,94
150-75-30-1-2	-30,31%	-27,35%	-27,73%	909,7
150-75-30-1-3	-23,57%	-16,70%	-18,50%	1005,68
150-75-30-1a-1	-14,96%	-14,48%	-14,53%	298,9
150-75-30-1a-2	-12,85%	-9,05%	-9,47%	249,39
150-75-30-1a-3	-5,95%	8,94%	3,10%	355,73
150-75-30-2-1	-21,93%	-17,91%	-19,21%	1065,58
150-75-30-2-2	-24,44%	-18,01%	-19,40%	1020,32
150-75-30-2-3	-20,25%	-17,31%	-17,94%	1021,76
150-75-30-2a-1	-8,88%	3,78%	0,38%	266,2
150-75-30-2a-2	-11,59%	1,51%	0,01%	221,87
150-75-30-2a-3	-8,18%	-0,96%	-4,61%	367,43
150-75-30-3-1	-31,87%	-31,87%	-31,87%	1007,97
150-75-30-3-2	-22,54%	-20,98%	-21,14%	1019,49
150-75-30-3-3	-18,41%	-18,41%	-18,41%	1010,03
150-75-30-3a-1	-17,08%	-15,84%	-15,97%	268,95
150-75-30-3a-2	-4,56%	4,38%	3,39%	223,66
150-75-30-3a-3	-14,86%	-1,85%	-7,91%	356,73
média	-17,42%	-11,69%	-13,27%	649,74
média total	-12,69%	-4,34%	-6,95%	652,73