

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM MATEMÁTICA FINANCEIRA

**METODOLOGIAS PARA MENSURAR A EXPOSIÇÃO
AO RISCO DE CRÉDITO DE CONTRAPARTE DE
DERIVADOS OVER-THE-COUNTER**

ANA ISABEL AMARO DE SOUSA

Orientadores: Prof. Doutor Onofre Alves Simões

Dra. Rita Marques Costa Santos Silva

Júri:

Presidente: Maria do Rosário Lourenço Grossinho

Orientadores: Onofre Alves Simões

Rita Marques Costa Santos Silva

Vogais: Cláudia Catarina Acúrcio Duarte

Dezembro/2011

Resumo

O Acordo de Basileia III prevê, além do aumento da qualidade e do nível de requisitos de capital, a revisão de métricas com vista a melhorar o nível de exposição ao Risco de Crédito de Contraparte (RCC).

O objetivo deste trabalho é desenvolver metodologias para mensurar a exposição esperada ao RCC de derivados negociados fora de bolsa (*Over-The-Counter* – OTC), que consistem em contratos ligados ao futuro valor, ou situação, dos instrumentos subjacentes aos quais se referem.

Neste contexto, a inovação do novo Acordo refere-se à introdução de um encargo de capital para cobrir o risco de perdas do valor de mercado do RCC esperado para os instrumentos derivados OTC. Estas potenciais perdas são denominadas Ajustamentos de Avaliação de Crédito (*Credit Valuation Adjustment* – CVA) e podem ser calculadas por diferentes métodos, dependendo para tal da aprovação do Banco de Portugal.

Nas ilustrações, recorre-se frequentemente a *Interest Rate Swaps*, por serem o instrumento financeiro mais transacionado.

Palavras-chave: Basileia III, Risco de Crédito de Contraparte, Derivados negociados fora de bolsa, Ajustamentos de Avaliação de Crédito

Abstract

Basel III provides an increase of the quality and level of capital requirements, and also it presents a review of the metrics in order to improve the level of exposure to the Counterparty Credit Risk (CCR).

In this framework I will develop methodologies to measure the expected exposure to the CCR of Over-the-Counter derivatives, which are contracts that are linked to the future value of the underlying instruments or situation to which they refer.

In this context, Basel III innovation reports to the introduction of a capital charge to cover the risk of loss of the CCR Mark-to-Market expected value for OTC derivatives. These potential losses are called Credit Valuation Adjustments (CVA) and may be calculated using different methods, which must be approved by Banco de Portugal.

There is a recurrent use of Interest Rate Swaps when providing examples, given that they are the most traded financial instruments.

Key words: Basel III, Counterparty Credit Risk, Over-the-Counter derivatives, Credit Valuation Adjustment

Índice

Resumo	2
Abstract	3
Agradecimentos	8
1 Introdução	9
2 O Risco de Crédito de Contraparte em Basileia	11
2.1 O Acordo de Basileia I.....	11
2.2 O Acordo de Basileia II.....	11
2.2.1 Pilar I: Os requisitos mínimos de capital.....	12
2.2.2 Pilar II: Processo de revisão da supervisão.....	13
2.2.3 Pilar III: Disciplina de mercado.....	13
2.3 O Acordo de Basileia III.....	13
3 Metodologias de Quantificação e Técnicas de Mitigação do Risco de Crédito de Contraparte	15
3.1 Metodologias de Quantificação do Risco de Crédito de Contraparte.....	15
3.1.1 Método <i>Mark-to-Market</i> + <i>add-ons</i>	16
3.1.2 Método Semi-Analítico.....	16
3.1.3 Simulações de Monte Carlo.....	17
3.2 Técnicas de Mitigação do Risco de Crédito de Contraparte.....	21
3.2.1 <i>Netting</i>	21
3.2.2 <i>Collateral</i>	24
3.2.3 <i>Hedging</i>	25
4 Mensuração e <i>Pricing</i> do Risco de Crédito de Contraparte	27
4.1 Mensuração do Risco de Crédito de Contraparte.....	27
4.1.1 Método de Avaliação ao Preço de Mercado.....	27
4.1.2 Método Padrão.....	30
4.1.3 Método do Modelo Interno.....	31
4.2 <i>Pricing</i> do Risco de Crédito de Contraparte.....	33
4.2.1 CVA.....	34
4.2.2 BCVA.....	34

4.3	Cálculo do CVA segundo o Acordo de Basileia III.....	38
4.3.1	CVA Padrão.....	39
4.3.2	CVA Avançado	40
5	Conclusões	42
	Referências Bibliográficas	44
	Anexos	46
	Anexo 1 Derivação da equação para cálculo do CVA.....	46
	Anexo 2 Derivação da equação para cálculo do BCVA.....	48

Lista de Figuras

3.1 Evolução das metodologias adotadas para a mensuração da exposição ao RCC.....	15
3.2 Estimação da PFE utilizando o método semi-analítico: Exemplo de um contrato <i>forward</i>	17
3.3 Simulações da taxa de juro variável: Exemplo de um <i>Interest Rate Swap</i>	19
3.4 Simulações dos valores MtM: Exemplo de um <i>Interest Rate Swap</i>	20
3.5 Estimação da PFE utilizando simulações de Monte Carlo: Exemplo de um <i>Interest Rate Swap</i>	21
3.6 Exposição com <i>netting</i> sobre dois contratos.....	22
3.7 Exposição com <i>netting</i> : Exemplo de um <i>Interest Rate Swap</i>	23
3.8 Exposição com <i>collateral</i> : Exemplo de um <i>Interest Rate Swap</i>	25
3.9 Dinâmica do contrato CDS.....	26
4.1 Metodologias para determinar a EAD.....	27
4.2 Parâmetros do Método do Modelo Interno e PFE: Exemplo de um portefólio de <i>Interest Rate Swaps</i>	33
4.3 CVA e DVA assumindo que não existe risco <i>wrong-way</i> : Exemplo de um contrato <i>forward</i>	36

Lista de Tabelas

3.1 Parâmetros do Acordo de <i>collateral</i> : Exemplo de um <i>Interest Rate Swap</i>	25
4.1 Fatores <i>add-on</i> para cada ativo subjacente.....	28
4.2 Portefólio de <i>Interest Rate Swaps</i>	29
4.3 Multiplicadores do RCC relativamente ao conjunto de cobertura	30
4.4 Detalhes do prémio do CDS e da taxa de recuperação: Exemplo de um contrato <i>forward</i>	36
4.5 CVA, DVA e BCVA assumindo que não existe risco <i>wrong-way</i>	36
4.6 Detalhes da correlação: Exemplo de um contrato <i>forward</i>	37
4.7 CVA, DVA e BCVA sob as hipóteses de existência e não existência de risco <i>wrong-way</i>	38
4.8 Pesos w_i baseados no rating externo da contraparte	40

Lista de Abreviaturas

BCVA	<i>Bilateral Credit Valuation Adjustment</i> - ajustamento bilateral da avaliação de crédito
CDS	<i>Credit Default Swap</i>
CE	<i>Current Exposure</i> - exposição corrente
CVA	<i>Credit Valuation Adjustment</i> - ajustamento da avaliação de crédito
DVA	<i>Debt Valuation Adjustment</i> - ajustamento da avaliação de débito
EAD	<i>Exposure-at-Default</i> - valor das posições em risco
EE	<i>Expected Exposure</i> - posição em risco esperada
EEE	<i>Effective Expected Exposure</i> - posição em risco esperada efectiva
EEPE	<i>Effective Expected Positive Exposure</i> - posição em risco esperada positiva efectiva
ENE	<i>Expected Negative Exposure</i> - posição em risco esperada negativa
EPE	<i>Expected Positive Exposure</i> - posição em risco esperada positiva
LGD	<i>Loss Given Default</i> - perda dado o incumprimento
MtM	<i>Mark-to-Market</i> - marcação a mercado
OTC	<i>Over-The-Counter</i>
PD	<i>Probability of Default</i> - probabilidade de incumprimento
PFE	<i>Potential Future Exposure</i> - posição em risco máxima
RCC	Risco de Crédito de Contraparte
RWA	<i>Risk Weighted Assets</i> – ativos ponderados de risco

Agradecimentos

Aos meus orientadores, Prof. Doutor Onofre Simões e Dra. Rita Costa, pelo apoio no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Dr. Pedro Loureiro, por todo o apoio e incentivos constantes demonstrados ao longo da elaboração deste projeto. Esteve sempre disposto a ajudar e algumas vezes já “fora de horas”.

À equipa de *Financial Risk Management* da *KPMG Advisory*, pela oportunidade concedida em realizar o meu estágio, o que me permitiu adquirir conhecimentos imprescindíveis à realização do projeto. À Iriana e à Carla que, não sendo da equipa, contribuíram para a minha integração na empresa.

Aos meus pais e irmãos, pela força, paciência e incentivo que me deram ao longo de todo o mestrado.

Ao meu irmão Miguel, por me ter inculcido o gosto pela Matemática nas explicações que eu própria lhe dava.

Um agradecimento muito especial ao meu namorado, amigo e colega de mestrado, Renato, pelo apoio constante, conselhos preciosos, paciência e toda a ajuda que me deu.

Capítulo 1

Introdução

Na sequência da conclusão do Mestrado em Matemática Financeira, durante quatro meses, realizei o meu estágio curricular na *KPMG Advisory*.

A *KPMG Advisory* é uma organização que privilegia a aprendizagem constante através do intercâmbio de conhecimentos mantendo um leque de projetos diversificados e possibilitando a participação em novos desafios a cada momento.

Este estágio permitiu explorar uma área recente e pouco conhecida dentro do departamento. Assim, consistiu primordialmente na realização de um *survey* baseado no tema proposto e na construção de algumas aplicações exemplificadoras. No final foi feita uma apresentação dos aspetos essenciais para toda a equipa de colaboradores com o objetivo de os familiarizar de forma fácil e expedita com a temática investigada.

Os conhecimentos adquiridos ao longo do mestrado foram essenciais à realização do estágio, nomeadamente pela aplicação direta de alguns conteúdos das unidades curriculares “Modelos de Taxa de Juro e Risco de Crédito” e “Investimentos e Mercados Financeiros”. Naturalmente, de uma forma mais implícita, todas as unidades curriculares contribuíram para o desenvolvimento do projeto.

O tema desenvolvido goza actualmente de grande notoriedade como refere a Comissão Europeia na *Proposal for a regulation of the European parliament and of the council on OTC derivatives, central counterparties and trade repositories*. Nesta proposta, constata-se que o aumento exponencial de derivados OTC transacionados mundialmente na última década e a ausência de enquadramento regulamentar para este mercado foram a principal causa da recente crise financeira de 2008.

Os derivados OTC são extremamente úteis e versáteis para a transferência de riscos dado que são negociados diretamente entre as duas partes envolvidas. No entanto, estes têm uma importante componente estocástica pois estão ligados ao futuro valor ou situação dos instrumentos subjacentes a que se referem (como seja a evolução das taxas de juro ou o valor de uma dada moeda).

O RCC decorre do risco de determinada contraparte poder incumprir antes da liquidação final dos respectivos fluxos financeiros (*cash flows*) de uma dada operação. A sua mensuração desempenha um papel fundamental em qualquer instituição financeira.

O Acordo de Basileia III está ligado a esta questão ao introduzir um encargo de capital para cobrir o risco de perdas do valor de mercado do RCC através do Ajustamento de Avaliação de Crédito.

O presente trabalho discute os desafios envolvidos na estimativa da exposição ao RCC de derivados OTC dado que no risco de crédito tradicional a sua mensuração corresponde ao montante em dívida, que é determinável. No RCC a exposição do contrato é de mensuração complexa porque o seu valor é volátil, precisamente pela ligação a um ativo subjacente.

A base de dados utilizada ao longo do trabalho é proveniente de algumas referências bibliográficas e de simulações geradas em Visual Basic. Tal escolha deveu-se ao facto de, neste momento, se atravessar uma conjuntura mundial económica e os valores praticados no mercado poderem não corresponder aos valores em situações normais.

Capítulo 2

O Risco de Crédito de Contraparte em Basileia

2.1 O Acordo de Basileia I

O Acordo de Basileia I surgiu para fortalecer a solidez e estabilidade do sistema bancário internacional através da imposição de requisitos mínimos de capital que seriam uma garantia contra a insolvência em situações adversas, ao exigir que

$$\text{Rácio de Solvabilidade} = \frac{\text{Fundos Próprios}}{\text{RWA}(\text{Risco}_{\text{Crédito}} + \text{Risco}_{\text{Mercado}})} \geq 8\% . \quad (1)$$

A partir da aplicação dos coeficientes de ponderação de riscos por classes de ativos (*Risk Weighted Assets* - RWA) e das características do tomador, os bancos deveriam determinar a sua exposição ao RCC através do Método de Avaliação ao Preço de Mercado. Este aspecto será retomado no ponto 4.1.1.

Para maior detalhe, consultar Basel Committee on Banking Supervision (1996).

2.2 O Acordo de Basileia II

Apesar do progresso trazido pela implementação do Acordo de Basileia I, as autoridades reguladoras/supervisoras mostraram-se preocupadas e insatisfeitas com a efetividade do sistema de ponderações fixas (RWA) cada vez mais conflituoso com o crescente grau de sofisticação dos modelos internos para avaliação de riscos.

Além disso, a adequação de capital estabelecida pelo Acordo não refletia a capacidade de absorção de perdas não esperadas.

O facto de não serem utilizadas técnicas para a mitigação do risco de crédito no cálculo do capital mínimo provocava insatisfação ao Comité de Basileia. Desta forma, a sua revisão foi no sentido da ampliação do uso das formas de avaliação de risco utilizadas pelo mercado: a classificação de risco feita pelas agências de *rating* e os modelos internos de avaliação de risco.

Em 2004, o Comité de Basileia publicou o acordo de Basileia II que veio expandir a abrangência de Basileia I, estruturando-se em três pilares

- Pilar I (Capital mínimo);
- Pilar II (Supervisão);
- Pilar III (Transparência e Disciplina de Mercado).

2.2.1 Pilar I: Os requisitos mínimos de capital

No Pilar I, os requisitos mínimos de fundos próprios centravam-se na melhoria da capacidade de mensuração do risco de crédito, na autonomização dos cálculos em relação ao risco operacional e no cálculo de capital mínimo, obtido da seguinte forma

$$\text{Rácio de Solvabilidade} = \frac{\text{Fundos Próprios}}{\text{RWA}(\text{Risco}_{\text{Crédito}} + \text{Risco}_{\text{Mercado}} + \text{Risco}_{\text{Operacional}})} \geq 8\% . \quad (2)$$

Relativamente ao risco de crédito, o Comité de Basileia propôs dois métodos para o cálculo do capital necessário para a sua cobertura: o Método Padrão e o Método das Notações Internas.

Método Padrão (*Standard Method*)

De Basileia I, manteve-se a lógica da organização de ativos em diferentes categorias com determinadas ponderações de risco, procurando elaborar regras mais sensíveis aos riscos assumidos pelas instituições através da possibilidade de uso de avaliações realizadas pelas agências de *rating*.

Método das Notações Internas (*Internal Rating Based*)

Este método, com duas variantes, Básico (*Foundation*) e Avançado (*Advanced*), consistia na utilização de metodologias internas para o cálculo de requisitos de fundos próprios, da seguinte forma

$$\text{RWA}_{\text{Risco}_{\text{Crédito}}} = f(\text{PD}, \text{LGD}, \text{EAD}) . \quad (3)$$

Os parâmetros seriam as componentes de risco: a probabilidade de incumprimento (*Probability of Default* - PD), a perda dado o incumprimento (*Loss Given Default* - LGD) e o valor da posição em risco (*Exposure-At-Default* - EAD).

Em Portugal, estas componentes deveriam ser estimadas pelos modelos internos ou fornecidas pelo Banco de Portugal de forma a mensurar a perda esperada (*Expected Loss*) e a perda inesperada (*Unexpected Loss*) para o risco de crédito.

A EAD seria o parâmetro mais complexo de estimar para o RCC por estar associado a um ativo subjacente, volátil, de valor exato desconhecido enquanto que no risco de crédito tradicional este parâmetro corresponderia ao montante em dívida, de valor calculável.

2.2.2 Pilar II: Processo de revisão da supervisão

O Pilar II pretendia viabilizar o modelo de adequação de capital proposto no Pilar I. Desta forma, os bancos deveriam desenvolver processos para avaliar se a sua adequação de capital era compatível com os perfis de riscos assumidos e desenhar estratégias para manter esses níveis de capital. Por seu lado, os supervisores, ao analisarem essas avaliações e estratégias deveriam intervir atempadamente a fim de evitar que o capital descesse abaixo do necessário.

2.2.3 Pilar III: Disciplina de mercado

O Pilar III visava complementar/promover a confiança e a credibilidade do sistema através da divulgação de informação em diferentes mercados.

Os principais documentos que consubstanciam o Acordo de Basileia II são: Basel Committee on Banking Supervision (2004; 2006).

2.3 O Acordo de Basileia III

O novo Acordo divulgado em 2010 e a ser implementado a partir do final do ano seguinte, pretendia a melhoria da capacidade do sistema bancário para absorver choques económicos e financeiros, promovendo a transparência das actividades bancárias e procurando evitar repetições da crise financeira de 2008.

Ao nível do RCC, este Acordo pretendia melhorar a sua cobertura através do fortalecimento de requisitos de capital nomeadamente ao introduzir um encargo de capital (*Credit Valuation Adjustment* - CVA) para cobrir o risco de perdas do valor de mercado (*Mark-to-Market* - MtM) decorrente de qualquer incumprimento dos contratos celebrados com uma contraparte.

De forma sucinta, é exigido que

$$RWA_{\text{RiscoCrédito}} = f(\text{PD}, \text{LGD}, \text{EAD}) + \text{CVA} . \quad (4)$$

Em Portugal, foram exigidos novos requisitos de capital aos bancos de 9% até ao final de 2011 e de 10% em 2012, conforme previsto no memorando de entendimento assinado com a *troika* CE-BCE-FMI que pode ser consultado em *Portugal: Memorandum of understanding on specific economic policy conditionality*.

O Acordo Basileia III encontra-se materializado em Committee on Banking Supervision (2010).

Capítulo 3

Metodologias de Quantificação e Técnicas de Mitigação do Risco de Crédito de Contraparte

3.1 Metodologias de Quantificação do Risco de Crédito de Contraparte

Para a quantificação do RCC, ou seja, para ser determinado o valor da EAD é necessária a estimativa dos parâmetros

- Posição em risco esperada (*Expected Exposure* - EE)
- Posição em risco esperada positiva (*Expected Positive Exposure* - EPE)
- Posição em risco máxima (*Potential Future Exposure* - PFE)

A EE e a EPE são os parâmetros a utilizar na aplicação dos métodos de Basileia e terão maior ênfase no Capítulo 4.

A PFE é o parâmetro mais relevante para o RCC e mais utilizado porque consiste na potencial perda futura que poderá existir no momento do incumprimento da contraparte, ou seja, permite avaliar durante os vários momentos do tempo a exposição máxima a que as instituições financeiras estão sujeitas.

De acordo com (Gregory, 2010) e (Engelmann e Rauhmeier, 2006), a estimação da PFE pode ser feita utilizando os seguintes métodos



Figura 3.1: Evolução das metodologias adotadas para a mensuração da exposição ao RCC.

3.1.1 Método *Mark-to-Market* + *add-ons*

Este método permite determinar a PFE através do sistema de ponderações fixadas pelo Comité no acordo de Basileia I, apresentadas na Tabela 4.1.

Exemplo 1: Cálculo da PFE de um contrato *Interest Rate Swap*

Para um *Interest Rate Swap* (IRS) com maturidade a 5 anos

$$\text{PFE} = 0,5\% .$$

Note-se que durante o decorrer do trabalho os valores serão apresentados sempre em percentagens.

Para uma abordagem mais exaustiva a este instrumento financeiro, consultar (Hull, 2009).

3.1.2 Método Semi-Analítico

Este método calcula uma aproximação semi-analítica para os fatores de risco de acordo com a distribuição da exposição e, conseqüentemente, os parâmetros para quantificar o RCC.

Exemplo 2: Cálculo da PFE de um contrato *forward*

Consideremos que um banco entra num contrato *forward* e se compromete a entregar um determinado montante fixo de moeda por um montante fixo de outra moeda em 5 anos.

Admitindo que a evolução do valor MtM segue a dinâmica

$$dV_t = \mu dt + \sigma dW_t , \quad (5)$$

onde μ é a média, σ é o desvio padrão, μ e σ são constantes e $V_0 = v_0$ é constante, então o valor MtM numa data futura s pode ser escrito como

$$V_s = V_t + \mu \int_t^s ds + \sigma \int_t^s dWs = V_t + \mu(s - t) + \sigma W_{s-t} , \quad (6)$$

onde W_{s-t} é um processo de *Wiener* e $W_{s-t} \sim N(0, \sqrt{s-t})$ é equivalente a afirmar que $W_{s-t} = \sqrt{s-t} Z$, onde $Z \sim N(0,1)$.

Então,

$$V_s \sim N(V_t + \mu(s - t), \sigma\sqrt{s - t}) \text{ e} \quad (7)$$

$$V_s = V_t + \mu(s - t) + \sigma\sqrt{s - t}Z. \quad (8)$$

Assumindo que a duração do contrato (5 anos) é dividida em 20 intervalos de tempo de amplitude igual e procedendo ao cálculo semi-analítico da PFE com um nível de confiança de 95%, nos 20 intervalos, de acordo com (Gregory, 2010), tem-se que

$$PFE_{95\%} = V_t + \mu(s - t) + \sigma\sqrt{s - t}\phi^{-1}(95\%), \quad (9)$$

onde ϕ^{-1} representa a função inversa da distribuição acumulada da Normal.

Admitindo que $\mu=1\%$ e $\sigma=10\%$, tem-se o seguinte perfil da PFE.

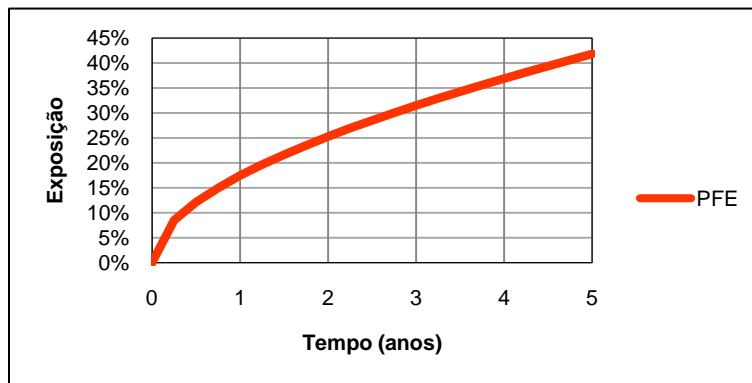


Figura 3.2: Estimação da PFE utilizando o método semi-analítico: Exemplo de um contrato forward.

A PFE é estritamente crescente, como resultado das oscilações dos valores MtM que ocorrem ao longo do tempo, conduzindo à exposição ao RCC.

No momento inicial as duas partes fixam apenas o preço e portanto não existe exposição ao RCC. A exposição é máxima na maturidade, já que é nessa altura que a liquidação ocorrerá.

Para uma consulta mais pormenorizada deste instrumento financeiro, consultar (Hull, 2009).

3.1.3 Simulações de Monte Carlo

Este método assenta no seguinte algoritmo

- 1) Considerar os fatores de risco que influenciarão a exposição da operação (normalmente são os instrumentos subjacentes);
- 2) Escolher um modelo para os fatores de risco;
- 3) Gerar cenários através da simulação destes fatores de risco;
- 4) Calcular o valor MtM de todas as operações com cada contraparte, para cada cenário e para cada momento;
- 5) Determinar a PFE com um dado nível de confiança;
- 6) Agregar os valores da exposição levando em conta o *netting*.
Por *netting* entende-se um mecanismo em que, no caso de a contraparte incumprir, a instituição apenas paga ou recebe o montante líquido de todas as operações (ver ponto 3.2.1 para maior detalhe);
- 7) Contabilizar os efeitos do *collateral*, ou seja, deve ser percorrida cada trajetória da contraparte e determinar em cada momento o quanto a exposição seria colateralizada.
O *collateral* representa a condição exigida da instituição à contraparte, de forma a reduzir a sua exposição ao RCC (ver 3.2.2).

Depois da metodologia aplicada é possível extrair qualquer estatística desejada, como por exemplo, para a gestão de risco, para o pricing ou para propostas de regulamentação.

Exemplo 3: Cálculo da PFE de um *Interest Rate Swap*

Considere-se um *Interest Rate Swap* de taxa fixa para taxa variável com pagamentos trimestrais e maturidade 5 anos.

Aplicando o algoritmo descrito anteriormente,

- 1) O fator de risco é a taxa de juro variável.
- 2) A taxa de juro variável pode ser calibrada através do modelo de Vasicek (Vasicek, 1977) que propõe a dinâmica

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad (10)$$

onde k é a velocidade de reversão à média, θ é a média, σ é o desvio padrão, W_t é um processo de *Wiener* e k , θ e σ são constantes.

- 3) Procedendo à discretização da equação dinâmica usando o método de Euler (Zeytun e Gupta, 2007), obtém-se a equação

$$r_{t_{i+1}} = r_{t_i} + k(\theta - r_{t_i})(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}W_{t_{i+1}}. \quad (11)$$

A simulação de 100 corridas do processo para a taxa de juro variável assumindo que $k=10\%$, $\theta=4\%$, $\sigma=1\%$ e $r_0=5\%$, permite obter

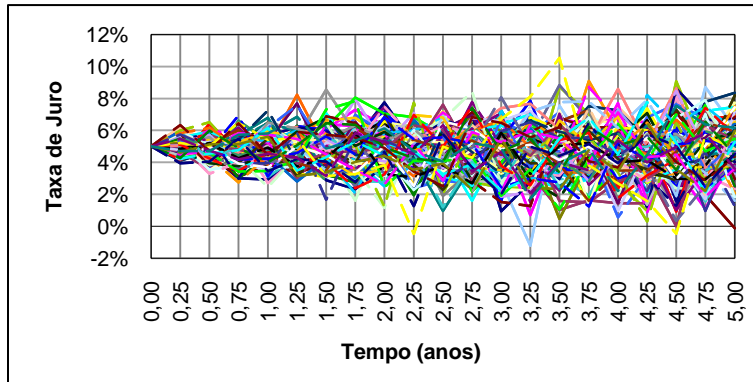


Figura 3.3: Simulações da taxa de juro variável: Exemplo de um *Interest Rate Swap*.

Observa-se na Figura 3.3 que, iniciando em $r_0=5\%$, o modelo tende a reverter para a taxa média de 4% e para um maior número de trajetórias simuladas seria mais perceptível esta observação.

- 4) A valorização do *Interest Rate Swap* de taxa fixa para variável corresponde à diferença entre o valor MtM fixo e o valor MtM variável. As valorizações são determinadas através das fórmulas

$$\begin{aligned} \text{Valor MtM}_{\text{Fixo}} &= C \sum_{i=1}^M \left(VN \frac{t_i}{T_i} df_i \right) \\ \text{Valor MtM}_{\text{Variável}} &= \sum_{i=1}^M \left(f_i VN \frac{t_i}{T_i} df_i \right), \end{aligned} \quad (12)$$

onde C é a taxa fixa (taxa swap), M é o número de pagamentos fixos/variáveis, VN é o montante nominal, t_i é o número de dias no período i , T_i é o número de dias acordados para a conversão, df_i é o fator de desconto e f_i é a taxa forward.

O valor da obrigação de cupão zero em t , com tempo de maturidade T , na medida de risco neutral, é equivalente ao fator de desconto, ou seja,

$$p(t, T) = E_t^Q [e^{-\int_t^T r(s)ds}]. \quad (13)$$

Para o modelo de Vasicek, tem-se

$$p(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r_t}, \quad (14)$$

em que

$$A(t, T) = \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2} \right) (B(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4k} B(t, T)^2$$

$$B(t, T) = \frac{1}{k} (1 - e^{-k(T-t)}).$$

Ao simular os valores MTM em vários pontos do tempo ao longo da vida do IRS com $C=5\%$ e sabendo que os pagamentos são trimestrais, ou seja, $4 \times 5 \text{ anos} = 20$ intervalos, obtém-se

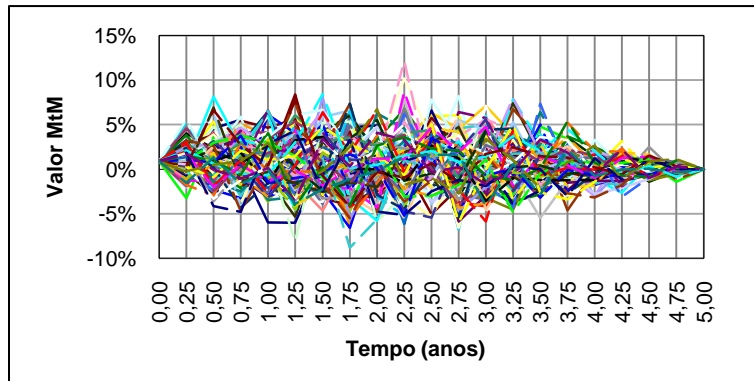


Figura 3.4: Simulações dos valores MtM: Exemplo de um *Interest Rate Swap*.

Observa-se que os valores MtM de um IRS tomaram valores maiores nos períodos de pagamento e tendem para zero quando o tempo se aproxima da maturidade, dado que a maioria dos pagamentos já se realizaram.

- 5) Usando os valores MTM calculados anteriormente é possível calcular o perfil da PFE com um nível de confiança de 95%, nos 20 intervalos, para as 100 trajetórias, da seguinte forma

$$PFE_{95\%,i,t} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{100} V_{i,t} \leq 95\% \right\}, \quad (15)$$

onde $V_{i,t}$ é o valor MtM do IRS, no momento t e para a trajetória $i=1, \dots, 100$.

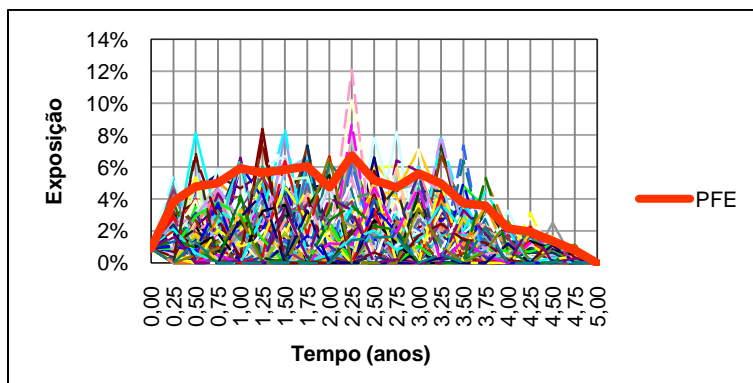


Figura 3.5: Estimação da PFE utilizando simulações de Monte Carlo: Exemplo de um *Interest Rate Swap*.

Note-se que as perdas para a instituição caso a contraparte incumpra correspondem aos valores MtM positivos.

A PFE sobre o IRS de taxa fixa para variável com pagamentos trimestrais, aumenta inicialmente dado o “efeito da difusão”, ou seja, a volatilidade associada ao ativo subjacente. Vai diminuindo com o decorrer do tempo em resultado do “efeito da amortização”, ou seja, a realização da maioria dos pagamentos, o que implica que a exposição seja cada vez mais reduzida.

3.2 Técnicas de Mitigação do Risco de Crédito de Contraparte

Na gestão da exposição ao RCC as instituições financeiras devem ter a capacidade de incorporar os efeitos das técnicas de mitigação ao risco, ou seja, utilizar mecanismos para evitar, reduzir e transferir o RCC, de acordo com as condições do Anexo VI do Aviso N.º 5/2007 do Banco de Portugal.

As técnicas utilizadas para este efeito são

- acordos de compensação (*netting*);
- acordos de colateral (*collateral*);
- cobertura de risco (*hedging*).

3.2.1 *Netting*

Esta técnica é utilizada num grupo de operações realizadas com uma mesma contraparte sujeitas a um acordo bilateral de compensação juridicamente vinculativo. Qualquer operação que não seja objeto de um acordo bilateral de compensação juridicamente

vinculativo deve ser considerada como constituindo um conjunto de compensação independente.

O diagrama seguinte ilustra o efeito do *netting* sobre a exposição a que uma instituição financeira está sujeita.

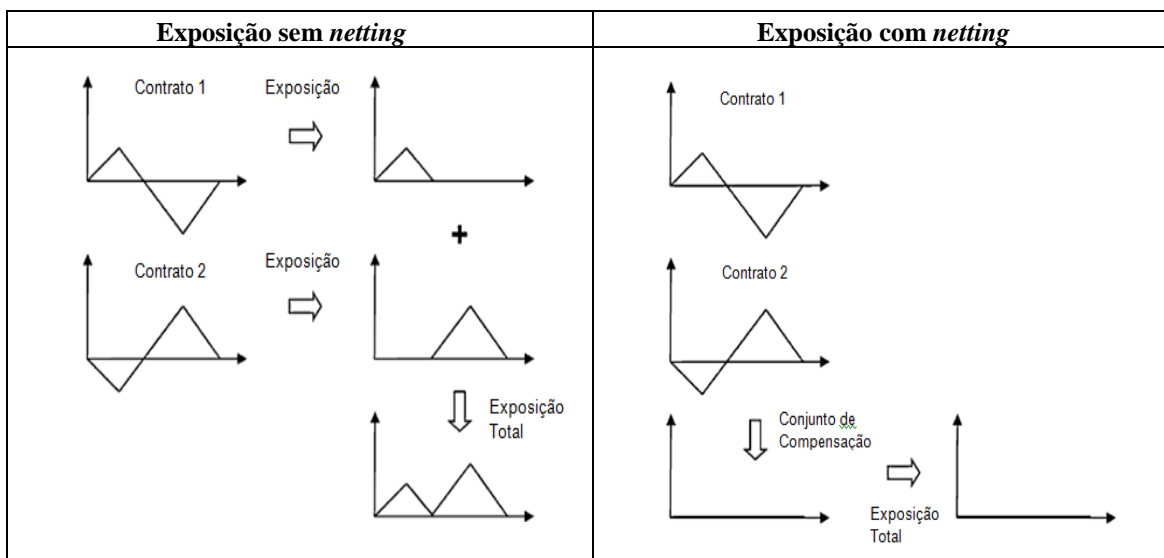


Figura 3.6: Exposição com *netting* sobre dois contratos. (Fonte: (Gregory, 2010))

Pode afirmar-se que, se a instituição tiver celebrado com a contraparte um acordo de *netting*, na eventualidade de incumprimento da contraparte a instituição tem o direito de receber ou a obrigação de pagar apenas o montante líquido resultante da soma dos valores positivos e negativos avaliados a preços de mercado de todas as referidas operações.

Considere-se um exemplo simples para compreender a sua utilização. Suponha-se que a contraparte de um banco incumprir no momento t e que neste momento existem dois contratos de derivados entre as duas partes que ainda não chegaram à maturidade, detalhados na tabela seguinte

	Derivado X	Derivado Y
Valor MtM em t	-25	10

Os valores MtM, no momento t , são -25 e 10, respetivamente.

Para o banco, no caso de haver incumprimento, duas situações podem ocorrer

- Se não existir *netting*, o banco terá de pagar 25 à contraparte e não receberá de imediato o valor do Derivado Y pois terá a esperar tal como os outros credores o valor a recuperar - o que poderá levar a um longo tempo de espera, a par da incerteza de poder não haver

recuperação. Há, portanto, uma saída de 25 para o banco e uma entrada de um valor menor ou igual a 10, que até poderá ser zero.

- No caso em que há *netting*, entre o banco e a contraparte, o banco não pagará 25 à contraparte mas apenas $25-10 = 15$.

Finalmente, para o cenário i gerado N vezes, no momento t

- Se não existir acordo de *netting*, a exposição é dada por

$$E_{i,t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Max} \{V_{i,t}; 0\}. \quad (16)$$

- Se existir acordo de *netting*, a exposição é dada por

$$E_{i,t} = \frac{1}{N} \text{Max} \{ \sum_{i=1}^N V_{i,t}; 0 \}. \quad (17)$$

Exemplo 4: Exposição com *netting* de um *Interest Rate Swap*

Retomando o Exemplo 3 pode observar-se o efeito do *netting* sobre a exposição de um IRS.

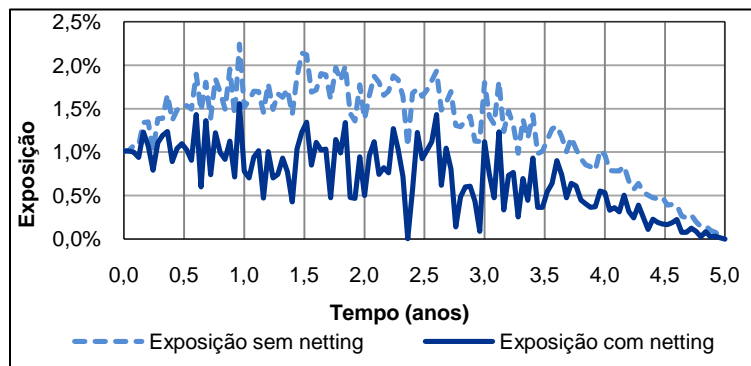


Figura 3.7: Exposição com *netting*: Exemplo de um *Interest Rate Swap*.

Da Figura 3.7, conclui-se que a exposição é de facto reduzida se existir Acordo de *Netting*. Também se observa que o efeito do *netting*, ou seja, maior margem entre a exposição sem *netting* e com *netting*, se acentua nos primeiros dois anos e meio já que a exposição ao risco é crescente neste período.

3.2.3 Collateral

O *collateral* refere-se à condição elegível (conforme definido na Parte 1 do Anexo VI do Aviso N.º 5/2007 do Banco de Portugal) que a contraparte fornecerá à instituição de forma a atenuar a sua exposição ao risco. Ou seja, é um instrumento financeiro de salvaguarda requerido à contraparte, visando “compensar” o risco que lhe está associado.

Os colaterais podem ser financeiros (como por exemplo acções e depósitos em numerário), bens imóveis (como seja imóveis de habitação ou imóveis comerciais) ou físicos (tal como veículos ligeiros ou máquinas industriais). Normalmente o *collateral* exigido é dinheiro (*cash collateral*), baseada no valor MtM.

Um acordo de *collateral* contém os seguintes parâmetros

- **Período Close-Out** - tempo efetivo assumido entre a chamada do *collateral* até ao seu recebimento;
- **Montante Independente (MI)** - quantidade adicional de crédito de apoio que é necessário para além do valor de mercado da operação do portefólio;
- **Montante Limite (ML)** - nível de exposição ao RCC que as duas contrapartes estão dispostas a aceitar antes da chamada do *collateral*;
- **Montante Mínimo de Transferência (MMT)** - valor mínimo permitido para a chamada do *collateral*. De forma a evitar que quantidades pequenas de *collateral* sejam requeridas nas situações diárias de oscilações insignificantes no valor MtM;
- **Arredondamento (A)** - evita quantidades desnecessariamente pequenas.

O montante a exigir à contraparte a colocar como *collateral* é dado por (Gregory, 2010)

$$\text{Collateral} = \left[\frac{(V_t + \text{MI} - \text{ML} - \text{MMT})^+}{V_t + \text{MI} - \text{ML} - \text{MMT}} (V_t + \text{MI} - \text{ML}) \right] - \left[\frac{(V_t + \text{MI} - \text{ML} - \text{MMT})^+}{V_t + \text{MI} - \text{ML} - \text{MMT}} (V_t + \text{MI} - \text{ML}) \right] \text{mod} A. \quad (18)$$

Recorde-se que $(V_t + \text{MI} - \text{ML} - \text{MMT})^+ = \text{Max}\{V_t + \text{MI} - \text{ML} - \text{MMT}, 0\}$ e que

$\left[\frac{(V_t + \text{MI} - \text{ML} - \text{MMT})^+}{V_t + \text{MI} - \text{ML} - \text{MMT}} (V_t + \text{MI} - \text{ML}) \right] \text{mod} A$ é o resto da divisão de

$\frac{(V_t + \text{MI} - \text{ML} - \text{MMT})^+}{V_t + \text{MI} - \text{ML} - \text{MMT}} (V_t + \text{MI} - \text{ML})$ por A .

Exemplo 5: Exposição com *collateral* de um *Interest Rate Swap*

Considerando o Exemplo 3 pode observar-se o efeito do *collateral* sobre a exposição de um IRS, assumindo os seguintes parâmetros:

Parâmetro	Valor
Montante Independente	0,10%
Montante Limite	1,00%
Montante Mínimo de Transferência	0,25%
Arredondamento	0,05%
Período <i>Close-Out</i>	10 dias

Tabela 3.1: Parâmetros do Acordo de *collateral*: Exemplo de um *Interest Rate Swap*.

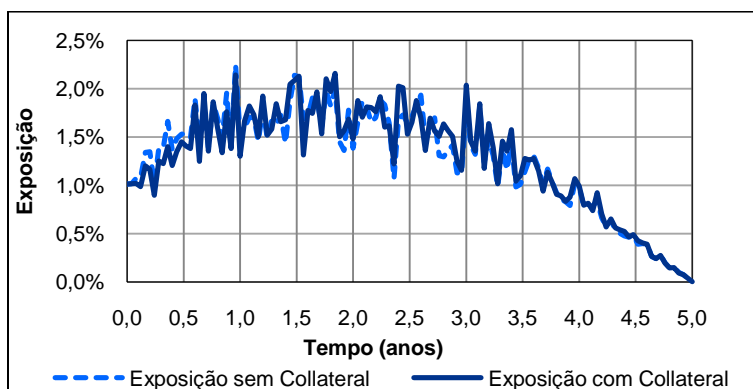


Figura 3.8: Exposição com *collateral*: Exemplo de um *Interest Rate Swap*.

Da Figura 3.8, conclui-se que é necessário requerer *collateral* à contraparte nos primeiros dois anos e meio dado que a exposição do IRS é crescente nesse intervalo. A partir desse momento, a exposição decresce não sendo necessária a chamada desta mitigante de risco.

3.3.3 Hedging

As instituições financeiras podem transferir o risco do incumprimento de uma contraparte para outra entidade numa operação com derivados OTC através da aquisição de proteção contra o incumprimento total ou parcial da operação. O instrumento financeiro normalmente utilizado para fazer essa cobertura é o *Credit Default Swap*, que consiste num contrato de seguro entre um comprador de proteção e um vendedor de proteção que cobre determinados riscos em caso de incumprimento, mediante o pagamento/recebimento de um prémio (normalmente trimestral). Quanto mais elevado é o risco de incumprimento maior é a cotação dos CDS para essa instituição.

No seguinte diagrama, apresenta-se o funcionamento desta técnica de mitigação ao risco

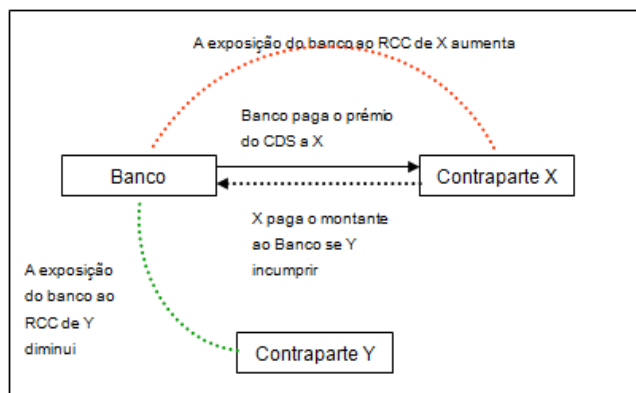


Figura 3.9: Dinâmica do contrato CDS

O banco compra proteção de crédito à contraparte X na forma de CDS da contraparte Y, e compromete-se a pagar um prémio fixo a X, em troca de receber o seu compromisso para cobrir perdas em caso de incumprimento de Y.

A exposição de crédito contra Y deverá ser compensada pela quantidade de proteção de crédito comprada a X.

Também é importante ter em conta que o banco tem uma dependência com a contraparte X para honrar a sua obrigação nos termos do CDS. O banco, portanto, tem exposição ao RCC para X como resultado do CDS.

Capítulo 4

Mensuração e *Pricing* do Risco de Crédito de Contraparte

4.1 Mensuração do Risco de Crédito de Contraparte

Após a estimação dos parâmetros do RCC, é necessário aplicá-los no cálculo do valor da posição em risco (EAD) consoante os métodos propostos em Basileia – o Método de Avaliação ao Preço de Mercado, o Método Padrão e o Método do Modelo Interno, conforme definido na Parte 3 do Anexo V do Aviso N.º. 5/2007 do Banco de Portugal.



Figura 4.1: Metodologias para determinar a EAD.

4.1.1 Método de Avaliação ao Preço de Mercado

Este método, proposto em Basileia I, quantifica a EAD como a soma da exposição atual (*Current Exposure* - CE) com o valor da posição em risco máxima (*Potential Future Exposure*), ou seja,

$$EAD = CE + PFE, \quad (19)$$

em que

$$CE = \sum_i \text{Max}\{V_{MtM_i}; 0\}, \quad (20)$$

$$PFE = \text{Valor Nominal} \times \text{add-on}. \quad (21)$$

Os *add-ons* a aplicar em cada activo subjacente são dados na tabela seguinte

Vencimento residual	Contratos sobre taxas de juro	Contratos sobre taxas de câmbio e ouro	Contratos sobre títulos de capital	Contratos sobre metais preciosos	Contratos sobre mercadorias
Inferior ou igual a 1 ano	0,0%	1,0%	6,0%	7,0%	10,0%
Entre 1 e 5 anos, inclusive	0,5%	5,0%	8,0%	7,0%	12,0%
Superior a 5 anos	1,5%	7,5%	10,0%	8,0%	15,0%

Tabela 4.1: Fatores *add-on* para cada ativo subjacente. (Fonte: (BCBS, 1988))

Quando se verifica a existência de *netting*, os valores de mercado dos contratos de derivados integrados podem ser compensados entre si e a CE é dada por

$$CE = \text{Max} \left\{ \sum_i V_{MtM_i}; 0 \right\}. \quad (22)$$

Ainda neste cenário, de acordo com Basel Committee on Banking Supervision (1998), tem-se que a PFE é dada por

$$PFE = 40\% \sum_i PFE_i + 60\% \sum_i PFE_i \times \frac{\text{Max} \{ \sum_i V_{MtM_i}; 0 \}}{\sum_i \text{Max} \{ V_{MtM_i}; 0 \}}. \quad (23)$$

Ao valor da posição em risco é deduzido o valor recebido do *collateral* em contratos estabelecidos com as contrapartes, ou seja,

$$EAD = (CE + PFE) - \text{Collateral}. \quad (24)$$

Exemplo 6: Cálculo da EAD para um portfólio de *Interest Rate Swaps* utilizando o Método de Avaliação ao Preço de Mercado

Posição	Tempo até à maturidade (anos)	Valor MtM
1	5,00	0,90%
2	4,75	0,92%
3	4,50	-0,30%
4	4,25	1,76%
5	4,00	0,91%
6	3,75	0,34%
7	3,50	0,01%
8	3,25	0,13%
9	3,00	-1,38%
10	2,75	-1,69%
11	2,50	-1,41%
12	2,25	-0,20%
13	2,00	-0,44%
14	1,75	-0,32%
15	1,50	0,54%
16	1,25	0,36%
17	1,00	-0,64%
18	0,75	-1,21%
19	0,50	-0,79%
20	0,25	-0,85%

Tabela 4.2: Portfólio de *Interest Rate Swaps*.

Recorrendo a (19) e à Tabela 4.2

$$EAD = CE + PFE = 5,87\% + 8,00\% = 13,87\% . \quad (25)$$

Se todas as operações estiverem incluídas num Acordo de *Netting* deduz-se, por (22) e (23)

$$EAD = 0,00\% + 3,20\% = 3,20\% . \quad (26)$$

O valor da EAD diminui em (26) dada a compensação do valor das operações com sinal negativo.

4.1.2 O Método Padrão

Neste método, abordado em Basileia II, a EAD deve ser calculada separadamente para cada conjunto de compensação, líquido das cauções, e com base na seguinte fórmula

$$EAD = \beta \times \text{Max} \left\{ \text{CMV} - \text{CMC}, \sum_j \left[\sum_i \text{RPT}_{ij} - \sum_l \text{RPC}_{lj} \right] \text{RCCM}_j \right\}, \quad (27)$$

onde

β é o parâmetro definido pelo Banco de Portugal, igual a 1,4;

CMV (*Current Market Value*) é o valor corrente de mercado da carteira de operações incluídas num conjunto de compensação com a contraparte;

CMC (*Current Market Collateral*) é o valor corrente de mercado da caução atribuída a um conjunto de compensação;

RPT_{ij} (*Risk Position Transaction*) é a posição de risco da operação i relativamente ao conjunto de cobertura j ;

RPC_{lj} (*Risk Position Collateral*) é a posição de risco da caução l relativamente ao conjunto de cobertura j ;

RCCM_j (*Risk Credit Counterparty Multiplier*) é o multiplicador do RCC referido na Tabela 4.3 relativamente ao conjunto de cobertura j .

Categorias de conjuntos de cobertura	RCCM
Taxas de juro	0,2%
Taxa de juro relativas a posições em risco associadas a um título de dívida de referência subjacente a um swap de risco de incumprimento e ao qual se aplica um requisito de fundos próprios igual ou inferior a 1,6%	0,3%
Taxa de juro relativas a posições em risco associadas a um título de dívida ou a um título de dívida de referência e aos quais se aplica um requisito de fundos próprios superior a 1,6%	0,6%
Taxas de câmbio	2,5%
Electricidade	4,0%
Ouro	5,0%
Ações	7,0%
Metais preciosos	8,5%
Outras mercadorias	10,0%
Instrumentos subjacentes aos derivados OTC, não incluídas nas categorias acima	10,0%

Tabela 4.3: Multiplicadores do RCC relativamente ao conjunto de cobertura. (Fonte: (BCBS, 1988))

4.1.3 Método do Modelo Interno

Este método, sujeito a aprovação do Banco de Portugal, requer o conhecimento dos seguintes parâmetros para o cálculo da EAD

- A *Expected Exposure* (EE), consiste na média da distribuição das posições em risco em qualquer data futura específica, antes da data de vencimento da operação com maturidade mais longa, de entre as operações incluídas no conjunto de compensação. Normalmente, o seu cálculo é obtido por simulação dos valores MtM dos fatores de risco, ou seja, para cada réplica i ($i = 1, \dots, N$) no momento t , tem-se

$$EE_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Max}\{V_{i,t}; 0\}. \quad (28)$$

- A *Effective Expected Exposure* (EEE), consiste na posição em risco esperada máxima numa data específica, ou em qualquer data anterior, ou seja,

$$\begin{cases} EEE_t = \text{Max}\{EEE_{t-1}, EE_t\} \\ EEE_0 = EEE_0 \end{cases}. \quad (29)$$

- A *Expected Positive Exposure* (EPE), representa a média ponderada, ao longo de um período de tempo, das posições em risco esperadas. As ponderações são dadas pelos períodos de tempos associados e o Comité exige que o horizonte temporal seja um ano, ou seja,

$$EPE = \sum_{i=1}^{\min\{1\text{ano}, \text{Maturidade}\}} EE_i(t_i - t_{i-1}). \quad (30)$$

- A *Effective Expected Positive Exposure* (EEPE), representa a média ponderada das posições em risco esperadas efetivas, relativamente ao primeiro ano ou, caso todos os contratos integrados no conjunto de compensação se vençam antes de decorrido um ano, relativamente ao período de vigência do contrato com o prazo de vencimento mais longo incluído no conjunto de compensação, ou seja,

$$EEPE = \sum_{i=1}^{\min\{1\text{ano}, \text{Maturidade}\}} EEE_i(t_i - t_{i-1}). \quad (31)$$

O valor da posição em risco corresponde ao produto de um factor α pela EEPE,

$$EAD = \alpha \times EEPE. \quad (32)$$

O Banco de Portugal recomenda que se tome α de valor 1,4 mas pode autorizar as instituições a utilizarem as suas próprias estimativas, desde que esse valor seja superior a 1,2.

Note-se que a EAD é calculada através da EEPE em vez da EPE. Este facto está relacionado com a incapacidade da EPE para capturar o risco de refinanciamento (*roll-over risk*). Este risco define-se como o montante pelo qual a EPE se encontra subestimada quando se prevê que as operações futuras com uma contraparte venham a ser realizadas de forma contínua.

Exemplo 7: Cálculo da EAD para um portefólio de *Interest Rate Swaps* utilizando o Método do Modelo Interno

Retome-se o Exemplo 6 e calcule-se a EE, de acordo com (28), através de simulações de Monte Carlo tendo por base o Exemplo 3. De seguida, determine-se (29) e (31), o que resulta na aplicação a (32).

$$EAD = \alpha \times EEPE = 1,4 \times 1,92\% = 2,68\% . \quad (33)$$

Calculou-se a EAD para o mesmo portefólio através do Método de Avaliação ao Preço de Mercado e do Método do Modelo Interno, em (26) e (33), o que permite concluir que a EAD segundo o Método do Modelo Interno tem menor valor e portanto irá exigir um menor requisito de capital.

Este facto resulta de no Método do Modelo Interno se utilizarem parâmetros que são estimados internamente e não as ponderações *standard* usadas no Método de Avaliação ao Preço de Mercado. A utilização de parâmetros internos traduz-se numa maior sensibilidade ao risco e numa potencial poupança de capital.

A figura seguinte permite observar o impacto da avaliação de cada parâmetro na exposição ao RCC.

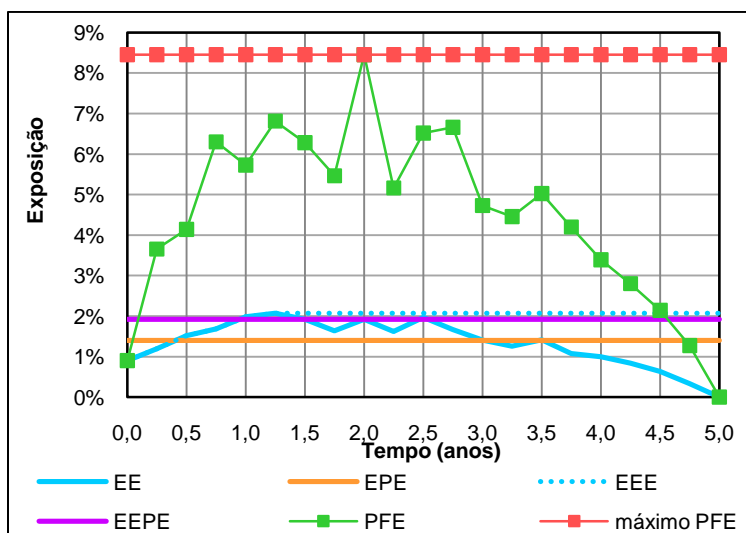


Figura 4.2: Parâmetros do Método do Modelo Interno e PFE: Exemplo de um portfólio de *Interest Rate Swaps*.

O Comitê de Basileia exige que as instituições financeiras não determinem apenas a EAD de acordo com um dos três métodos abordados anteriormente mas que também calculem e acompanhem a PFE ao longo da maturidade da carteira.

Como é constatado na Figura 4.2, a PFE é o parâmetro com maior importância para o RCC pois permite estimar a cada momento qual a máxima perda em que a instituição poderá incorrer devido a incumprimento da contraparte.

4.2 *Pricing* do Risco de Crédito de Contraparte

Para as instituições financeiras não é apenas relevante a quantificação do RCC a que estão expostas. Devem também ter em conta o valor da perda em que poderão incorrer, que influenciará a valorização de preços para os produtos derivados que oferecem aos seus clientes.

O *pricing* do RCC é feito através do CVA, que se define como o ajustamento à avaliação da cotação da carteira de operações realizadas com uma contraparte. Essa cotação reflete o valor de mercado do RCC decorrente de qualquer incumprimento dos contratos celebrados com a contraparte em questão.

Como é referido em (Gregory, 2009), o ajustamento pode refletir o valor de mercado do risco de crédito que a contraparte representa para a instituição - ajustamento unilateral da avaliação de crédito ou simplesmente ajustamento da avaliação de crédito - ou o valor de mercado do risco de crédito que a contraparte representa para a instituição e que a instituição representa para a contraparte - ajustamento bilateral da avaliação de crédito (*Bilateral Credit Valuation Adjustment – BCVA*).

4.2.1 CVA

O CVA considera apenas o incumprimento da contraparte, correspondendo ao encargo para o risco de contraparte que é incorporado numa transação de forma a fortalecer a qualidade do crédito da contraparte.

A derivação do CVA, assumindo que não existe risco de correlação desfavorável (*wrong-way risk*) é feita no Anexo 1 e é dada por

$$CVA(t, T) \cong (1 - \delta_C) \sum_{i=1}^m EPE(t_i, T)[Q_C(t, t_{i-1}) - Q_C(t, t_i)], \quad (34)$$

onde δ_C é a taxa de recuperação da contraparte, $EPE(u, T)$ é a posição em risco esperada positiva e $Q_C(t, u)$ é a probabilidade de incumprimento da contraparte, na medida risco neutral.

Como referenciado no Anexo V do Aviso N.º.5/2007 do Banco de Portugal, entende-se por risco *wrong-way* o risco que ocorre quando a posição sobre uma contraparte se encontra positivamente correlacionada com a PD dessa contraparte.

O cálculo do CVA requer a mensuração da cobertura (*hedging*) da probabilidade de uma contraparte incumprir, cobertura essa que se pode conseguir por meio de um CDS.

Portanto, a probabilidade de uma contraparte incumprir pode ser calculada através do *spread* do CDS, ou seja, do prémio que o comprador de proteção paga no contrato CDS para cobrir a componente de incumprimento da contraparte.

4.2.3 BCVA

Na avaliação do RCC, deverá ser levado em conta o facto de que a maioria dos instrumentos derivados têm pagamentos fixos ou variáveis que são feitos em ambos os sentidos e, desta forma, o CVA bilateral é mais apropriado que o CVA unilateral. O CVA bilateral, como é explicado de seguida, corresponde à diferença do ajustamento da avaliação de crédito com o ajustamento da avaliação de débito.

No entanto, este parâmetro não deverá ser considerado pelas instituições dado que um possível excesso de simplificação do tratamento do ajustamento da avaliação de débito poderá levar a que as instituições possam incumprir antes das suas contrapartes. Estes casos podem ocorrer quando os incumprimentos das instituições não são relevantes e esses incumprimentos representam um ganho para as próprias instituições, uma vez que pagam às contrapartes apenas uma fração do valor do contrato (taxa de recuperação).

A derivação da equação do BCVA, assumindo que não existe risco *wrong-way*, consta no Anexo 2.

$$BCVA(t, T) \cong (1 - \delta_C) \sum_{i=1}^m EPE(t_i, T)[Q_C(t, t_{i-1}) - Q_C(t, t_i)] - (1 - \delta_I) \sum_{i=1}^m ENE(t_i, T)[Q_I(t, t_{i-1}) - Q_I(t, t_i)], \quad (35)$$

onde δ_C é a taxa de recuperação da contraparte, $EPE(u, T)$ é a posição em risco esperada positiva, $Q_C(t, u)$ é a probabilidade de incumprimento da contraparte, na medida risco neutral, δ_I é a taxa de recuperação da instituição, $ENE(u, T)$ é a posição em risco esperada negativa e $Q_I(t, u)$ é a probabilidade de incumprimento da instituição, na medida de risco neutral.

Note-se que

$$BCVA(t, T) \cong (1 - \delta_C) \sum_{i=1}^m EPE(t_i, T)[Q_C(t, t_{i-1}) - Q_C(t, t_i)] - (1 - \delta_I) \sum_{i=1}^m ENE(t_i, T)[Q_I(t, t_{i-1}) - Q_I(t, t_i)] = CVA(t, T) - DVA(t, T), \quad (36)$$

onde $DVA(t, T)$ é o Ajuste da Avaliação de Débito (*Debt Valuation Adjustment - DVA*), que é o conceito exatamente oposto ao do $CVA(t, T)$, ou seja, corresponde ao caso em que a instituição entra em incumprimento.

Exemplo 8: Cálculo do CVA e do BCVA assumindo que não existe risco *wrong-way* para um contrato *forward*

O cálculo do CVA e do BCVA é feito considerando o Exemplo 2 e partindo das mesmas hipóteses (Gregory, 2010) deduz a expressão para a EPE e para a ENE.

A exposição é dada por

$$E = \text{Max}\{V(s, T), 0\} = \text{Max}\{\mu(s - t) + \sigma\sqrt{s - t}Z\}. \quad (37)$$

A EPE, que consiste na média dos valores MtM positivos em qualquer data futura, é escrita como

$$EPE = \mu(s - t)\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{s - t}\right) + \sigma\sqrt{s - t}\varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{s - t}\right), \quad (38)$$

onde ϕ representa a função distribuição acumulada da distribuição Normal e φ representa a sua função densidade de probabilidade.

A ENE, que por construção corresponde ao simétrico da EPE, consiste na média dos valores MtM negativos em qualquer data futura, ou seja,

$$ENE = -\mu(s - t)\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{s - t}\right) - \sigma\sqrt{s - t}\varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{s - t}\right). \quad (39)$$

Também, de acordo com (Gregory, 2010), a probabilidade de incumprimento é determinada através de

$$Q\{\tau > s\} = e^{-\lambda s}, \lambda = \frac{X^{CDS}}{1-\delta}, \quad (40)$$

onde λ é a intensidade do incumprimento e X^{CDS} é o prémio fixo do contrato CDS.

Pode introduzir-se já alguma notação adicional: X^{CDS}_C é o prémio do CDS que cobre a componente do incumprimento da contraparte e X^{CDS}_I é o prémio do CDS que cobre a componente do incumprimento da instituição. Na tabela abaixo indicam-se os valores dos parâmetros para os dois casos distintos que serão abordados. O caso A considera que $X^{CDS}_C > X^{CDS}_I$ e o caso B que $X^{CDS}_C < X^{CDS}_I$.

	Caso A	Caso B
μ	1%	1%
σ	10%	10%
X^{CDS}_C	500bps ¹	250bps
X^{CDS}_I	250bps	500bps
δ_C	40%	40%
δ_I	40%	40%

Tabela 4.4: Detalhes do prémio do CDS e da taxa de recuperação: Exemplo de um contrato *forward*

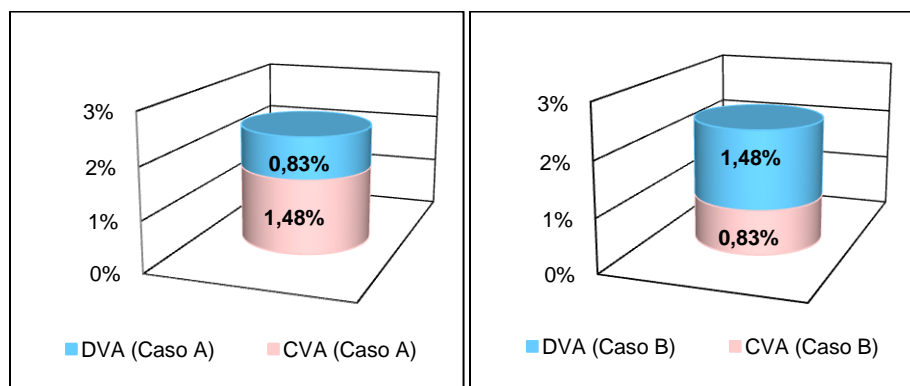


Figura 4.3: CVA e DVA assumindo que não existe risco *wrong-way*: Exemplo de um contrato *forward*.

	Caso A	Caso B
CVA	1,48%	0,83%
DVA	0,83%	1,48%
BCVA	0,64%	-0,64%

Tabela 4.5: CVA, DVA e BCVA assumindo que não existe risco *wrong-way*.

¹ 100 *basis point* = 1%

No caso A, $X_C^{CDS} > X_I^{CDS}$ o que implica que a contraparte está mais propensa a incumprir e, portanto, o CVA é maior do que o DVA. A instituição pode exigir que a contraparte adicione 0,64% para existir contrato, ou seja, requer mais montante à contraparte para se salvaguardar no caso de perda.

No caso B, $X_I^{CDS} > X_C^{CDS}$ e então a instituição tem maior probabilidade de incumprir e nesta situação o DVA é maior do que a CVA. Neste caso existe uma grande possibilidade da instituição ficar a dever no contrato.

Exemplo 9: Cálculo do CVA e do BCVA assumindo que existe risco *wrong-way* para um contrato *forward*

Nesta ilustração, o cálculo do CVA e do BCVA será feito considerando o exemplo anterior e partindo da hipótese da existência de risco *wrong-way*.

Também (Gregory, 2010) deduz a expressão para a EPE e para a ENE.

$$EPE = \mu(s - t) + \rho_C \sqrt{s - t} \sigma Q(t, s) \phi\left(\frac{\mu \sqrt{s - t}}{\sigma}\right) + \sigma \sqrt{s - t} \sqrt{1 - \rho_C^2} \phi\left(\frac{\mu(s - t) + \rho_C Q(t, s)}{\sqrt{1 - \rho_C^2}}\right), \quad (41)$$

onde ρ_C é a correlação existente entre a exposição e a PD da contraparte.

$$ENE = -\mu(s - t) + \rho_I \sqrt{s - t} \sigma Q(t, s) \phi\left(\frac{\mu \sqrt{s - t}}{\sigma}\right) - \sigma \sqrt{s - t} \sqrt{1 - \rho_I^2} \phi\left(\frac{\mu(s - t) + \rho_I Q(t, s)}{\sqrt{1 - \rho_I^2}}\right), \quad (42)$$

onde ρ_I é a correlação existente entre a exposição e a PD da instituição.

$$Q\{\tau > T\} = \phi^{-1}(e^{-\lambda s}). \quad (43)$$

Além dos dados da Tabela 4.4, considere-se agora a introdução dos seguintes parâmetros adicionais

	Caso A	Caso B
ρ_C	80%	20%
ρ_I	20%	80%

Tabela 4.6: Detalhes da correlação: Exemplo de um contrato *forward*.

	Assumindo que não existe risco <i>wrong-way</i>		Assumindo que existe risco <i>wrong-way</i>	
	Caso A	Caso B	Caso A	Caso B
CVA	1,48%	0,83%	2,20%	1,50%
DVA	0,83%	1,48%	1,07%	1,53%
BCVA	0,64%	-0,64%	1,12%	-0,03%

Tabela 4.7: CVA, DVA e BCVA sob as hipóteses de existência e não existência de risco *wrong-way*.

Como seria de esperar, observa-se que os encargos de capital são maiores sob a hipótese de existência de risco *wrong-way*. A correlação desfavorável entre a exposição e a qualidade do crédito da contraparte é equivalente a afirmar que a exposição aumenta quando existe maior probabilidade de incumprimento, o que exige maior encargo de capital para cobrir o risco de perdas.

4.3 Cálculo do CVA segundo o Acordo de Basileia III

Como já se referiu, a preocupação com as transações de contratos de derivados OTC resulta do facto de estas operações terem contribuído para a recente crise financeira. A inexistência de regulamentação adequada foi um fator relevante para o Comité de Basileia publicar o Acordo de Basileia III.

Atualmente, o RCC é a chave do risco financeiro e as modificações de Basileia III em relação a Basileia II (para estarem aplicadas a partir de 2013) consistem sobretudo na exigência de que as instituições financeiras determinem cargas de capital para as suas exposições em períodos de *stress*. É requerido que introduzam um encargo de capital para cobrir o risco de perdas do valor de mercado (*Mark-to-Market*) do risco de crédito decorrente de qualquer incumprimento dos contratos celebrados com uma contraparte – CVA.

O objetivo deste novo Acordo é a melhoria da cobertura do risco através do fortalecimento de requisitos de capital para suportar as exposições e também incentivar as instituições a transferirem os contratos de derivados OTC para contrapartes centrais (CCP). Nessas condições, como referenciado no Basel Committee on Banking Supervision (2010), não é necessária a introdução do CVA.

O Comité de Basileia propõe duas metodologias para determinar o CVA: o CVA Avançado (*Advanced CVA*) para as instituições financeiras que utilizam o Método do Modelo Interno no cálculo da EAD; e o CVA Padrão (*Standardised CVA*) para as que utilizam nesse cálculo o Método de Avaliação ao Preço de Mercado ou o Método Padrão.

4.3.1 CVA Padrão

O Comité propõe que o CVA seja determinado da seguinte forma

$$\text{CVA} = 2,33\sqrt{h} \times \sqrt{\left(\sum_i 0,5 w_i (M_i \text{EAD}_i^{\text{total}} - M_i^{\text{hedge}} B_i) - \sum_{\text{ind}} w_{\text{ind}} M_{\text{ind}} B_{\text{ind}} \right)^2 + \sum_i 0,75 w_i^2 (M_i \text{EAD}_i^{\text{total}} - M_i^{\text{hedge}} B_i)^2}, \quad (44)$$

onde

h é igual a 1 e corresponde ao risco no horizonte de um ano;

$\text{EAD}_i^{\text{total}}$ é o valor da posição em risco da contraparte i , que deverá ser descontado com o fator $\frac{1-e^{-0,05 \times M_i}}{0,05 \times M_i}$;

B_i é o montante nocional da compra de CDS para a cobertura do risco do CVA, referente à contraparte i , e que deve ser descontado com o fator $\frac{1-e^{-0,05 \times M_i^{\text{hedge}}}}{0,05 \times M_i^{\text{hedge}}}$;

B_{ind} é o montante nocional, indexado a um ou mais CDS comprados para a cobertura do risco do CVA, referente à contraparte i , e que deve ser descontado com o fator $\frac{1-e^{-0,05 \times M_{\text{ind}}}}{0,05 \times M_{\text{ind}}}$;

M_i é a maturidade das operações com a contraparte i ;

M_i^{hedge} é a maturidade dos instrumentos de cobertura com montante B_i ;

M_{ind} é a maturidade indexada à cobertura;

w_i é o peso aplicável à contraparte i ;

w_{ind} é o peso aplicável às coberturas indexadas.

Na Tabela 4.8, apresentam-se os pesos a aplicar às contrapartes, consoante a sua avaliação.

Rating	w_i
AAA	0,7%
AA	0,7%
A	0,8%
BBB	1,0%
BB	2,0%
B	3,0%
CCC	10,0% ²

Tabela 4.8: Pesos w_i baseados no rating externo da contraparte.

4.3.2 CVA Avançado

Para as instituições financeiras que utilizem o Método do Modelo Interno, o Comité propõe que o CVA seja calculado da mesma forma que o *pricing* do RCC.

No *pricing* do RCC (34),

$$CVA(t, T) \cong (1 - \delta_C) \sum_{i=1}^m EPE(t_i, T) [Q_C(t, t_{i-1}) - Q_C(t, t_i)]$$

No Acordo de Basileia III,

$$CVA = LGD_{MKT} \sum_{i=1}^T \left(\text{Max} \left\{ 0, e^{-\frac{s_{i-1} t_{i-1}}{LGD_{MKT}}} - e^{-\frac{s_i t_i}{LGD_{MKT}}} \right\} \frac{EE_{i-1} D_{i-1} + EE_i D_i}{2} \right). \quad (45)$$

onde

t_i é o tempo da i-ésima reavaliação num determinado período (*time bucket*) a partir de t₀=0;

t_T é a maior maturidade do contrato com a contraparte;

s_i é o *spread* de crédito da contraparte no momento t_i;

LGD_{MKT} é a perda dado o incumprimento da contraparte e deve ser baseada no *spread* de um instrumento de mercado da contraparte;

EE_i é a exposição esperada para a contraparte no tempo de reavaliação t_i;

D_i é o fator de desconto sem risco, do incumprimento no momento t_i, onde D₀= 1.

² O Comité de Supervisão Bancária reviu este valor em Junho de 2011 substituindo o peso antigo de 18,0% para 10,0%.

Exemplo 10: Cálculo do CVA para um portefólio de *Interest Rate Swaps*

Retomando os exemplos 6 e 7, onde foi calculada a EAD para o mesmo portefólio de acordo com o Método de Avaliação ao Preço de Mercado e o Método do Modelo Interno, ilustra-se agora o cálculo do CVA.

O CVA Padrão para uma contraparte com *rating* BBB e *spread* 500 bps é calculado através de (44) e é igual a 4,00%. O CVA Avançado determinado através de (45) e assumindo que a LGD é de 45% corresponde a 0,47%.

Concluiu-se anteriormente que, para o mesmo portefólio, o valor da EAD determinada pelo Método de Avaliação ao Preço de Mercado se apresenta consideravelmente superior ao calculado pelo Método do Modelo Interno.

Ao manter o mesmo exemplo, já seria de esperar que o CVA Padrão fosse superior ao CVA Avançado.

De notar que o Comité de Basileia requer que as instituições financeiras utilizem no mínimo a geração de 10.000 iterações e no presente trabalho, apenas com fim académico, foram utilizadas 100. Este número reduzido de iterações está refletido nas diferenças significativas entre as duas metodologias e com um maior número de iterações este desfasamento iria ser claramente reduzido.

Estas constatações devem-se ao facto de as metodologias internas serem ajustadas ao perfil de risco do cliente, mensurando melhor o risco e consequentemente a exposição futura (EAD). As abordagens de mercado (Avaliação ao Preço de Mercado e Padrão) são mais conservadoras pois são definidas pelo regulador ou por avaliações de mercado. Têm efetivamente de ser mais conservadoras de forma a que sejam adequadas a diversas instituições com diferentes perfis de risco.

Capítulo 5

Conclusões

De forma a reforçar a solidez do sistema financeiro, a publicação do Acordo de Basileia III efetivou um maior esforço em minimizar o RCC através da aplicação de maiores encargos de capital. A implementação deste Acordo surgiu para fortalecer a qualidade do crédito da contraparte, exigindo que as instituições financeiras se protegessem contra perdas inesperadas.

Este trabalho começa por estimar o parâmetro mais relevante para o RCC, a PFE, através de três metodologias – o *Mark-to-Market + add-ons*, o Método Semi-Analítico e as Simulações de Monte Carlo. A análise de cada um permite afirmar que o *Mark-to-Market + add-ons* é a metodologia mais simples mas que se baseia em fatores estáticos que não incorporam a estrutura de determinado produto. O Método Semi-Analítico permite obter uma melhor estimação porém os seus cálculos dependem da simplificação das hipóteses feitas relativamente aos fatores de risco envolvidos, tal como não contempla os efeitos de *netting* e *collateral*. As simulações de Monte Carlo são a abordagem mais complexa, mas a mais precisa, para a estimação dos parâmetros do RCC. De notar que o Comité de Basileia requer que as instituições financeiras utilizem no mínimo a geração de 10.000 iterações e no presente trabalho apenas foram utilizadas 100, dado que apenas se trata de um trabalho académico.

Após esta quantificação do RCC, foi observada a redução da exposição ao RCC ao considerar as várias técnicas de mitigação ao risco utilizadas para reduzir o potencial impacto do incumprimento da contraparte – *netting*, *collateral* e *hedging*.

Os Acordos de Basileia I e Basileia II propuseram três métodos para calcular a EAD sobre qualquer derivado OTC – o Método de Avaliação ao Preço de Mercado, o Método Padrão e o Método do Modelo Interno. A escolha de cada método deverá ser ajustada ao apetite e à tolerância ao risco da instituição financeira.

Utilizando quase sempre o mesmo portefólio de derivados, de forma a permitir a comparação direta dos resultados obtidos, concluiu-se que por utilizar parâmetros estimados internamente, o Método do Modelo Interno apresentou face aos outros um valor para a EAD claramente inferior.

Dado que a EAD é um parâmetro a utilizar no cálculo dos requisitos de capital, como visto em (4), quanto menor for o seu valor menor será a exigência de capital às instituições financeiras para cobrirem perdas inesperadas.

A aplicação dos conhecimentos adquiridos a situações reais trará certamente um fortalecimento na qualidade do crédito, sobretudo quando se revelar necessário o aumento dos *buffers* de capital, para que as instituições financeiras suportem melhor as exposições ao RCC – introdução do CVA.

Todas as instituições financeiras com derivativos OTC terão que introduzir o CVA no cálculo de requisitos de capital o que poderá originar, por vezes, uma redução deste tipo de instrumentos nos seus portefólios. Como alternativa, o Comité pretenderá de forma indireta exigir a transferência destes contratos de derivativos OTC para contrapartes centrais (*Central Counterparty Clearing House - CCP*).

Como refere a Comissão Europeia na *Proposal for a regulation of the European parliament and of the council on OTC derivatives, central counterparties and trade repositories*, as autoridades de supervisão terão acesso a estes repositórios centrais a fim de existir maior transparência e maior segurança neste mercado.

A finalizar, pode acrescentar-se que o desenvolvimento deste projeto permitiu a obtenção de conhecimentos valiosos sobre os Acordos de Basileia, a sua regulamentação e a sua finalidade.

Referências Bibliográficas

Banco de Portugal. (2007). *Aviso N.º 5/2007*. BdP. Lisboa.

Basel Committee on Banking Supervision. (1996). *Overview of the amendment to the capital accord to incorporate market risks*. BCBS. Basel.

Basel Committee on Banking Supervision. (1998). *Basel Committee: International convergence of capital measurement and capital standards*. BCBS. Basel.

Basel Committee on Banking Supervision (2004). *Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: a Revised Framework*. BCBS. Basel.

Basel Committee on Banking Supervision. (2006). *Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework - Comprehensive Version*. BCBS. Basel.

Basel Committee on Banking Supervision. (2010). *Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems*. BCBS. Basel.

Basel Committee on Banking Supervision. (2011). *Capital treatment for bilateral counterparty credit risk finalised by the Basel Committee*. BCBS. Basel.

Comissão Europeia. (2010). *Proposal for a regulation of the European parliament and of the council on OTC derivatives, central counterparties and trade repositories*. CE. Bruxelas.

Comissão Europeia. (2011). *Portugal: Memorandum of understanding on specific economic policy conditionality*. CE. Bruxelas.

Engelmann, B. e Rauhmeier R. (2006). *The Basel II Risk Parameters: Estimation, Validation, and Stress Testing*. Springer.

Gregory, J. (2009). Being two-faced over counterparty credit risk. *Risk magazine*.**22**: 86-90.

Gregory, J. (2010), *Counterparty Credit Risk: The new challenge for global financial market*. Wiley Finance.

Hull, J. (2009). *Options, Futures and Other Derivatives*. Seventh Edition, Prentice Hall. Upper Saddle River, N.J.

Vasicek, O. (1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*. **5**: 177-188.

Zeytun, S. e Gupta, A. (2007). A Comparative Study of the Vasicek and the CIR Model of the Short Rate. *Berichte des Fraunhofer ITWM*. **124**, 1-16.

Anexos

Anexo 1 Derivação da equação para cálculo do CVA

Seja τ_C o momento do incumprimento da contraparte, $V(t, T)$ o valor da posição sem risco e considerem-se as seguintes situações

- Se a contraparte não incumpra antes de T , a posição em risco é equivalente à posição sem risco e o correspondente *payoff* é dado por

$$I\{\tau_C > T\}V(t, T), \quad (46)$$

onde $I\{\tau_C > T\}$ é a função indicatriz do incumprimento (assume o valor 1 se o incumprimento não tiver ocorrido e 0 no caso contrário).

- Se a contraparte incumpra antes de T , o *payoff* consiste em dois termos, o valor da posição que deveria ter sido paga antes do incumprimento e o *payoff* no incumprimento, ou seja,
 - Se os *cash-flows* foram pagos antes do incumprimento então

$$I\{\tau_C \leq T\}V(t, \tau_C). \quad (47)$$

- O *payoff* no momento do incumprimento corresponde a uma das duas situações

Se $V(t, \tau_C) > 0$, então a instituição receberá a taxa de recuperação (δ_C) do valor sem risco das posições dos derivados.

Se $V(t, \tau_C) \leq 0$, então a liquidação do montante ainda tem que ser resolvida, podendo até não haver liquidação.

Após a consideração destas últimas duas hipóteses, o *payoff* é dado por

$$I(\tau_C \leq T)(\delta_C V(t, \tau_C)^+ + V(\tau_C, T)^-), \quad (48)$$

onde $V(t, \tau_C)^+ = \text{Max}\{V(t, \tau_C), 0\}$ e $V(\tau_C, T)^- = \text{min}\{V(\tau_C, T), 0\}$.

Tendo em conta (46), (47) e (48), o valor da posição em risco é dado por

$$\tilde{V}(t, T) = E^Q \left[\begin{array}{c} I\{\tau_C > T\}V(t, T) + \\ I\{\tau_C \leq T\}V(t, \tau_C) + \\ I\{\tau_C \leq T\}(\delta_C V(t, \tau_C)^+ + V(\tau_C, T)^-) \end{array} \right] = \quad (49)$$

$$E^Q \left[\begin{array}{c} I\{\tau_C > T\}V(t, T) + \\ I\{\tau_C \leq T\}V(t, \tau_C) + \\ I\{\tau_C \leq T\}(\delta_C V(t, \tau_C)^+ + V(\tau_C, T) - V(\tau_C, T)^+) \end{array} \right] = \quad (50)$$

$$E^Q \left[\begin{array}{c} I\{\tau_C > T\}V(t, T) + \\ I\{\tau_C \leq T\}V(t, \tau_C) + \\ I\{\tau_C \leq T\}((\delta_C - 1)V(t, \tau_C)^+ + V(\tau_C, T)) \end{array} \right] = \quad (51)$$

$$E^Q \left[\begin{array}{c} I\{\tau_C > T\}V(t, T) + \\ I\{\tau_C \leq T\}V(t, \tau_C) + I\{\tau_C \leq T\}V(\tau_C, T) + \\ I\{\tau_C \leq T\}(\delta_C - 1)V(t, \tau_C)^+ \end{array} \right] = \quad (52)$$

$$E^Q \left[\begin{array}{c} I\{\tau_C > T\}V(t, T) + \\ I\{\tau_C \leq T\}V(t, T) + \\ I\{\tau_C \leq T\}(\delta_C - 1)V(t, \tau_C)^+ \end{array} \right] = \quad (53)$$

$$E^Q \left[\begin{array}{c} V(t, T) + \\ I\{\tau_C \leq T\}((\delta_C - 1)V(t, \tau_C)^+) \end{array} \right] = \quad (54)$$

$$V(t, T) + E^Q[I\{\tau_C \leq T\}(\delta_C - 1)V(t, \tau_C)^+] = \quad (55)$$

$$V(t, T) - E^Q[I\{\tau_C \leq T\}(1 - \delta_C)V(t, \tau_C)^+] = \quad (56)$$

$$V(t, T) - CVA(t, T) \quad (57)$$

Utilizaram-se os seguintes cálculos auxiliares

– De (50) para (51),

$$V(\tau_C, T) = V(\tau_C, T)^- + V(\tau_C, T)^+ \leftrightarrow V(\tau_C, T)^- = V(\tau_C, T) - V(\tau_C, T)^+. \quad (58)$$

– De (53) para (54),

$$V(t, \tau_C) + V(\tau_C, T) \equiv V(t, T). \quad (59)$$

– De (54) para a equação (55),

$$I\{\tau_C > T\}V(t, T) + I\{\tau_C \leq T\}V(t, T) \equiv V(t, T). \quad (60)$$

Assumindo que não existe risco *wrong-way*

A equação do CVA partindo desta hipótese é dada por

$$CVA(t, T) = E^Q[I\{\tau_C \leq T\}(1 - \delta_C)V(t, \tau_C)^+] = (1 - \delta_C)E^Q[I\{\tau_C \leq T\}V(t, \tau_C)^+]. \quad (61)$$

Em (Gregory, 2010), o CVA é deduzido analogamente à valorização de um CDS,

$$CVA(t, T) = -(1 - \delta_C) \int_t^T EPE(u, T) dQ_C(t, u), \quad (62)$$

onde $EPE(u, T)$ é a posição em risco esperada positiva e $Q_C(t, u)$ é a probabilidade de incumprimento da contraparte, na medida risco neutral.

Integrando a equação acima, em m períodos tais que $[t_0 = t, \dots, t_m = T]$, tem-se que

$$CVA(t, T) \cong (1 - \delta_C) \sum_{i=1}^m EPE(t_i, T)[Q_C(t, t_{i-1}) - Q_C(t, t_i)]. \quad (63)$$

Anexo 2 Derivação da equação para cálculo do BCVA

Seja τ_I o momento do incumprimento da instituição, δ_I a sua taxa de recuperação, $\tau = \min\{\tau_C, \tau_I\}$ o momento em que o primeiro incumpre (a contraparte ou a instituição) e $V(t, T)$ o valor da posição sem risco.

Considerem-se as seguintes situações

– Se a contraparte e a instituição não incumprem antes de T , a posição em risco é equivalente à posição sem risco e o correspondente *payoff* é dado por

$$I\{\tau > T\}V(t, T). \quad (64)$$

– Se a instituição ou a contraparte incumprem antes de T

- Se todos os *cash-flows* foram pagos antes da primeira data do incumprimento,

$$I\{\tau \leq T\}V(t, \tau). \quad (65)$$

- Se a contraparte incumpre primeiro,

$$I\{\tau \leq T\}I(\tau = \tau_C)(\delta_C V(\tau, T)^+ + V(\tau, T)^-). \quad (66)$$

- Se a instituição incumpre primeiro,

$$I\{\tau \leq T\}I(\tau = \tau_I)(\delta_I V(\tau, T)^- + V(\tau, T)^+). \quad (67)$$

Tendo em conta (64), (65), (66) e (67), o valor da posição em risco é dado por

$$\tilde{V}(t, T) = E^Q \left[\begin{array}{c} I\{\tau > T\}V(t, T) + \\ I\{\tau \leq T\}V(t, \tau) + \\ I\{\tau \leq T\}I\{\tau = \tau_C\}(\delta_C V(\tau, T)^+ + V(\tau, T)^-) + \\ I\{\tau \leq T\}I\{\tau = \tau_I\}(\delta_I V(\tau, T)^- + V(\tau, T)^+) \end{array} \right] = \quad (68)$$

$$E^Q \left[\begin{array}{c} I\{\tau > T\}V(t, T) + \\ I\{\tau \leq T\}V(t, \tau) + \\ I\{\tau \leq T\}I\{\tau = \tau_C\}((\delta_C - 1)V(\tau, T)^+ + V(\tau, T)) + \\ I\{\tau \leq T\}I\{\tau = \tau_I\}((\delta_I - 1)V(\tau, T)^- + V(\tau, T)) \end{array} \right] = \quad (69)$$

$$E^Q \left[\begin{array}{c} I\{\tau > T\}V(t, T) + \\ I\{\tau \leq T\}[V(t, \tau) + I\{\tau = \tau_C\}V(\tau, T) + I\{\tau = \tau_I\}V(\tau, T)] + \\ I\{\tau \leq T\}I\{\tau = \tau_C\}(\delta_C - 1)V(\tau, T)^+ + \\ I\{\tau \leq T\}I\{\tau = \tau_I\}(\delta_I - 1)V(\tau, T)^- \end{array} \right] = \quad (70)$$

$$E^Q \left[\begin{array}{c} I\{\tau > T\}V(t, T) + I\{\tau \leq T\}V(t, T) + \\ I\{\tau \leq T\}I\{\tau = \tau_C\}(\delta_C - 1)V(\tau, T)^+ + \\ I\{\tau \leq T\}I\{\tau = \tau_I\}(\delta_I - 1)V(\tau, T)^- \end{array} \right] = \quad (71)$$

$$E^Q \left[\begin{array}{c} V(t, T) \\ I\{\tau \leq T\}I\{\tau = \tau_C\}(\delta_C - 1)V(\tau, T)^+ + \\ I\{\tau \leq T\}I\{\tau = \tau_I\}(\delta_I - 1)V(\tau, T)^- \end{array} \right] = \quad (72)$$

$$V(t, T) - E^Q \left[\begin{array}{c} I\{\tau \leq T\}I\{\tau = \tau_C\}(1 - \delta_C)V(\tau, T)^+ + \\ I\{\tau \leq T\}I\{\tau = \tau_I\}(1 - \delta_I)V(\tau, T)^- \end{array} \right] = \quad (73)$$

$$V(t, T) - BCVA(t, T) \quad (74)$$

Assumindo que não existe risco *wrong-way*

A equação do BCVA partindo deste pressuposto é dada por

$$\begin{aligned} \text{BCVA}(t, T) = E^Q \left[\frac{I\{\tau \leq T\}I\{\tau = \tau_C\}(1 - \delta_C)V(\tau, T)^+ + I\{\tau \leq T\}I\{\tau = \tau_I\}(1 - \delta_I)V(\tau, T)^-}{(1 - \delta_C)E^Q [I\{\tau \leq T\}I\{\tau = \tau_C\}V(\tau, T)^+ + I\{\tau \leq T\}I\{\tau = \tau_I\}V(\tau, T)^-]} \right] = \end{aligned} \quad (75)$$

Em (Gregory, 2010), o BCVA é deduzido analogamente ao CVA,

$$\text{BCVA}(t, T) = -(1 - \delta_C) \int_t^T \text{EPE}(u, T) dQ_C(t, u) + (1 - \delta_I) \int_t^T \text{ENE}(u, T) dQ_I(t, u), \quad (76)$$

onde $\text{ENE}(u, T)$ é a posição em risco esperada negativa e $Q_I(t, u)$ é a probabilidade de incumprimento da instituição, na medida de risco neutral.

Integrando a equação acima, em m períodos tais que $[t_0 = t, \dots, t_m = T]$, tem-se que

$$\begin{aligned} \text{BCVA}(t, T) \cong (1 - \delta_C) \sum_{i=1}^m \text{EPE}(t_i, T) [Q_C(t, t_{i-1}) - Q_C(t, t_i)] - \\ (1 - \delta_I) \sum_{i=1}^m \text{ENE}(t_i, T) [Q_I(t, t_{i-1}) - Q(t, t_i)]. \end{aligned} \quad (77)$$