



**LISBOA
SCHOOL OF
ECONOMICS &
MANAGEMENT**

MESTRADO

MATEMÁTICA FINANCEIRA

TRABALHO FINAL DE MESTRADO

DISSERTAÇÃO

AVALIAÇÃO DE OPÇÕES COM PROCESSOS DE LÉVY E
TRANSFORMAÇÕES TEMPORAIS

NUNO FILIPE COSTA MARTINS

ABRIL - 2014



**LISBOA
SCHOOL OF
ECONOMICS &
MANAGEMENT**

**MESTRADO EM
MATEMÁTICA FINANCEIRA**

**TRABALHO FINAL DE MESTRADO
DISSERTAÇÃO**

**AVALIAÇÃO DE OPÇÕES COM PROCESSOS DE LÉVY E
TRANSFORMAÇÕES TEMPORAIS**

NUNO FILIPE COSTA MARTINS

ORIENTAÇÃO:

PROFESSOR DOUTOR JOÃO MIGUEL ESPIGUINHA GUERRA

ABRIL - 2014

“É melhor estar preparado para uma oportunidade e não tê-la, do que ter uma
oportunidade e não estar preparado.”

Whitney M. Young

Agradecimentos

Quero agradecer, em 1º lugar, ao Professor João Guerra pela orientação, apoio e disponibilidade que me deu ao longo da realização deste trabalho. Quero, também, elogiar o seu papel como professor das disciplinas de Cálculo Estocástico e Processos de Lévy, no mestrado em Matemática Financeira, dada a importância que assumiu não só na escolha do tema como também na escolha natural do orientador para o meu trabalho.

Finalmente, quero agradecer à minha família, à minha mulher Ariana e ao meu filho Diogo pelos sacrifícios que fizeram comigo e pelo apoio que me deram ao longo de dois anos bastante intensos e trabalhosos onde a conciliação da vida profissional, académica e pessoal muitas vezes não era possível.

Muito obrigado a todos!

Resumo

O objetivo do presente trabalho é responder à questão de investigação: como avaliar opções exóticas através de processos de Lévy com transformações temporais? Para o efeito, analisa-se o modelo de referência CGMY-Gamma-OU (processo de Lévy com transformação temporal) e compara-se a *performance* deste modelo, ao nível da calibração a dados reais de mercado e avaliação de opções exóticas, com os modelos (sem transformação temporal) de Black-Scholes e CGMY.

A opção exótica em análise consiste numa opção pouco explorada na literatura financeira, e com importantes implicações teóricas ao nível das estratégias de cobertura de risco (*hedging*), designada de opção sobre os momentos de ordem k de um ativo financeiro subjacente.

Demonstra-se que, dependendo da aproximação dos modelos aos dados de mercado e do momento de ordem k , o modelo CGMY-Gamma-OU constitui uma boa alternativa na avaliação da opção exótica referida.

Palavras-Chave: Processos de Lévy, transformações temporais, modelos de mercado, opção sobre momentos, CGMY.

Abstract

The objective of this study is to answer the research question: how to evaluate exotic options through time-changed Lévy processes? For this purpose, we consider the reference model CGMY-Gamma-OU (time-changed Lévy process) and a comparison is made between the performance of this model, in terms of calibration to real market data and evaluation of exotic options, with the models (without time-change) of Black-Scholes and CGMY.

The exotic option under consideration is an option rarely explored in the financial literature, and with important theoretical implications in terms of hedging strategies, designated by the so-called “moment option” of order k of the underlying financial asset.

It is shown that, depending on the approximation of the models to market data and on the moment of order k , the CGMY-Gamma-OU model is a good alternative in the evaluation of the exotic option mentioned.

Key-Words: Lévy processes, time-changed, market models, moment options, CGMY.

Índice Geral

1. Introdução.....	1
2. Revisão Bibliográfica	4
2.1. Processos de Lévy	4
2.2. Derivados Financeiros, Arbitragem e Mercados Incompletos	9
2.3. Transformações de Martingala	14
2.4. Modelos Financeiros	18
3. Metodologia e Dados	25
3.1. Calibração dos modelos.....	26
3.2. Descrição da opção exótica	29
3.3. Avaliação da opção exótica	30
4. Análise de Dados	31
4.1. Calibração dos modelos.....	31
4.2. Avaliação da opção exótica	32
5. Conclusões, Contributos, Limitações e Investigação Futura	35
Anexo A: Exemplos de Processos de Lévy.....	37
Anexo B: Dados de Mercado	40
Anexo C: Simulação dos Modelos	41
Anexo D: Exemplos de Trajetórias de Preços.....	45
Anexo E: RMSE do modelo de Black-Scholes	47
Referências Bibliográficas.....	48

Índice de Figuras

Figura 1 - Simulação do Modelo de Black-Scholes	45
Figura 2 - Simulação do Modelo CGMY.....	45
Figura 3 - Simulação do Modelo CGMY-Gamma-OU	46

Índice de Tabelas

Tabela I - Estimação dos parâmetros dos modelos.....	31
Tabela II - Preço das opções sobre o momento de ordem 2	34
Tabela III - Preço das opções sobre o momento de ordem 3	34
Tabela IV - Preço das opções sobre o momento de ordem 4.....	35
Tabela V - Preço (€) de 90 opções de compra europeias sobre o índice AEX.....	40

1. Introdução

O modelo de Black-Scholes, proposto em Merton (1973) e Black-Scholes (1973), constitui um passo importante, na literatura financeira, para a modelação do logaritmo dos retornos associados a um ativo financeiro. Assume trajetórias contínuas, distribuição Normal (simétrica e mesocúrtica) e volatilidade constante para a modelação.

Contudo, vários estudos empíricos apresentados na literatura financeira (ver, por exemplo, Nicolau 2012) têm revelado um conjunto de factos que contrariam a modelação do logaritmo dos retornos por uma distribuição Normal. Os dados empíricos revelam que o logaritmo dos retornos (1) segue uma distribuição assimétrica (negativa) e leptocúrtica, (2) apresenta descontinuidades (saltos) de carácter aleatório e (3) a volatilidade não é constante (a volatilidade varia de forma estocástica ao longo do tempo e não pode ser representada por um valor constante como no modelo de Black-Scholes).

Estes factos implicam a necessidade de utilizar modelos mais sofisticados que modelem, de forma mais realista, a dinâmica do preço, ou retorno, de um ativo financeiro. No presente trabalho, analisam-se dois modelos alternativos: CGMY e CGMY-Gamma-OU. Ambos os modelos têm por base processos de Lévy e pretendem ser consistentes com os pontos (1) e (2), do parágrafo anterior. O modelo CGMY-Gamma-OU responde ao ponto (3) com a introdução de uma componente de volatilidade estocástica, no modelo CGMY, através de uma transformação da escala temporal. A motivação para a utilização destes dois modelos, no presente trabalho, face a outros modelos existentes na

literatura financeira, prende-se com o facto de se ajustarem melhor aos dados reais de mercado, tal como é mostrado por Schoutens (2003).

A avaliação do preço "justo" de um derivado financeiro depende da correta modelação da dinâmica do preço do ativo financeiro subjacente. Neste trabalho, o derivado financeiro escolhido consiste numa opção exótica, designada por opção sobre os momentos de ordem k de um ativo financeiro subjacente. Trata-se de um tipo de opção ainda pouco explorado na literatura financeira e com importantes implicações teóricas ao nível das estratégias de cobertura de risco (*hedging*).

O presente trabalho pretende responder à questão de investigação: como avaliar opções exóticas através de processos de Lévy com transformações temporais? Para o efeito, considera-se o modelo de referência CGMY-Gamma-OU e compara-se a *performance* deste modelo, ao nível dos processos de calibração a dados reais de mercado e avaliação da opção exótica referida, com os modelos de Black-Scholes e CGMY.

Em Schoutens (2003), aplicaram-se os três modelos na avaliação de um leque alargado de opções exóticas, excetuando opções sobre momentos de ordem k . Por outro lado, em Schoutens, Simons & Tistaert (2005) avaliaram-se opções sobre os momentos de ordem k , mas utilizando outro tipo de modelos. O presente trabalho é original na medida em que concilia o resultado dos dois artigos anteriores e aplica os modelos com melhor performance, do primeiro artigo, à opção exótica sobre os momentos de ordem k , do segundo artigo.

O presente trabalho encontra-se estruturado da seguinte forma:

- No capítulo 2 (Revisão bibliográfica) apresentam-se as bases matemáticas associadas a processos de Lévy (secção 2.1), as bases financeiras necessárias para se compreender o que são derivados financeiros e a temática relacionada com arbitragem e mercados incompletos (secção 2.2), explica-se o que são transformações de martingala (secção 2.3) e detalham-se os três modelos financeiros e todas as fórmulas necessárias para se avaliar o preço de um derivado financeiro (secção 2.4).
- No capítulo 3 (Metodologia e dados) detalha-se o processo de calibração dos vários modelos e o universo de dados utilizados (secção 3.1), analisa-se a opção exótica escolhida (secção 3.2) e como avaliá-la através da simulação de Monte Carlo (secção 3.3).
- No capítulo 4 (Análise de dados), analisam-se os dados decorrentes do processo de calibração (secção 4.1) e de avaliação do preço das opções sobre os momentos de ordem 2, 3 e 4 (secção 4.2).
- No capítulo 5, apresentam-se as conclusões, contributos e limitações do presente trabalho e apontam-se algumas propostas de investigação futura.

2. Revisão Bibliográfica

2.1. Processos de Lévy

Nesta secção, (1) define-se o que são processos de Lévy, (2) enunciam-se dois teoremas centrais (decomposição de Lévy-Itô e fórmula de Lévy-Kintchine) e (3) termina-se apresentando o conceito de subordinador. Applebaum (2009) é a referência principal para os temas analisados nesta secção.

Um processo de Lévy define-se sobre um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) em que Ω é o espaço amostral de resultados, \mathcal{F} é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω e P é uma medida de probabilidade.

Definição 2.1 *Um processo estocástico $X(t)$ definido num espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) com valores em \mathbb{R} , tal que $X(0) = 0$, é um processo de Lévy se possuir as seguintes características:*

- *Incrementos independentes: para qualquer sequência crescente de instantes de tempo $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n$, as variáveis aleatórias $X(t_0)$, $X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ são independentes.*
- *Incrementos estacionários: a lei de probabilidade de $X(t+h) - X(t)$ não depende de t .*
- *Continuidade estocástica: $\forall \varepsilon > 0, \lim_{h \rightarrow 0} P(|X(t+h) - X(t)| \geq \varepsilon) = 0$.*

A última propriedade não significa que $X(t)$ é contínuo ao longo da sua trajetória. Significa que a probabilidade de ocorrer uma descontinuidade (salto) num instante previamente fixado, t , é zero. Um exemplo importante de processo de Lévy é o movimento Browniano.

Exemplo 2.1 (Movimento Browniano) Um movimento Browniano $W(t)$, com valores em R , é um processo de Lévy em que o incremento $W(t) - W(s)$ é regido pela lei de distribuição Normal e possui as seguintes características:

- $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$, $t > s$.
- A função característica é dada pela expressão

$$\varphi_{W(t)}(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}tu^2\right) \quad (2.1)$$

- As trajectórias do processo são contínuas.

No anexo A, apresentam-se alguns exemplos de processos de Lévy que motivam o estabelecimento dos dois resultados centrais desta secção (decomposição de Lévy-Itô e fórmula de Lévy-Kintchine).

Para contar o número de saltos, com amplitude pertencente ao intervalo $A \subset R \setminus \{0\}$, num intervalo de tempo $[0, t]$, de um processo de Lévy $X(t)$, introduz-se a medida de contagem $J_X(t, A)$ definida por

$$J_X(t, A) = \#\{0 \leq s \leq t; \Delta X(s) \in A\} = \sum_{0 \leq s \leq t} 1_A(\Delta X(s)) \quad (2.2)$$

A função $1_A(x)$ assume o valor 1 se $x \in A$ e 0 caso contrário. A medida de contagem é essencial para definir uma medida de Lévy e o integral de Poisson.

Definição 2.2 *Seja $X(t)$ um processo de Lévy com valores em R . A medida de Lévy ϑ , com valores em R , é definida por*

$$\vartheta(A) = E[\#\{t \in [0, 1]: \Delta X(t) \neq 0, \Delta X(t) \in A\}], A \subset R \setminus \{0\} \quad (2.3)$$

ou seja, $\vartheta(A)$ é o número esperado de saltos com amplitude pertencente a A , por unidade de tempo.

Definição 2.3 *O integral de Poisson de uma função mensurável $f: R \rightarrow R$, num intervalo $A \subset R \setminus \{0\}$, é definido por*

$$\int_{[0,t] \times A} f(x) J_X(ds, dx) = \sum_{0 \leq u \leq t} f(\Delta X(u)) 1_A(\Delta X(u)) \quad (2.4)$$

Se $f(x) = x$, obtém-se $\int_{[0,t] \times R} x J_X(ds, dx) = \sum_{s \in [0,t]} \Delta X(s)$. Neste caso, o integral de Poisson representa o somatório de descontinuidades (saltos) do processo $X(t)$ no intervalo $[0, t]$.

Apresentam-se os dois resultados fundamentais desta secção: a fórmula de Lévy-Kintchine e a decomposição de Lévy-Itô.

Teorema 2.1 (fórmula de Lévy-Kintchine) *Seja $X(t)$ um processo de Lévy com tripleto (σ^2, ϑ, b) . Então, a sua função característica é dada pela expressão:*

$$\begin{aligned} \varphi_{X(t)}(u) &= \exp(t\eta_X(u)) \\ &= \exp \left\{ t \left[\underbrace{ibu - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_R (e^{iux} - 1 - iux \cdot 1_{|x| \leq 1}) \vartheta(dx)}_{\eta_X(u) = \text{expoente característico}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde ϑ é uma medida de Lévy, definida em $R \setminus \{0\}$, tal que $\int_{R \setminus \{0\}} \min(1, y^2) \vartheta(dy) < \infty$.

Para uma demonstração deste teorema, ver Applebaum (2009).

Teorema 2.2 (Decomposição de Lévy-Itô) *Seja $X(t)$ um processo de Lévy com valores em R e ϑ a medida de Lévy correspondente. Então existe uma constante $b \in R$ (drift), um movimento Browniano $\sigma W(t)$ e uma medida de contagem J_X definida em $R^+ \times R \setminus \{0\}$ tal que*

$$X(t) = bt + \sigma W(t) + \int_{s \in [0,t], |x| \geq 1} x J_X(ds, dx) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{s \in [0,t], \varepsilon \leq |x| \leq 1} x \tilde{J}_X(ds, dx) \quad (2.6)$$

em que $\tilde{J}_X(ds, dx) = J_X(ds, dx) - \vartheta(dx)ds$.

O tripleto (σ^2, ϑ, b) denomina-se *tripleto de Lévy do processo $X(t)$* .

Para uma demonstração deste teorema, ver Applebaum (2009).

O teorema 2.1 estabelece uma expressão própria para a função característica de um processo de Lévy. O teorema 2.2 diz que um processo de Lévy pode ser formado pela soma de um processo contínuo (movimento Browniano com *drift*), expresso pelos parâmetros b e σ , e por um processo descontínuo, contendo a estrutura de saltos, descrito pela medida de Lévy ϑ .

Existem algumas propriedades importantes a destacar relativamente à trajetória de um processo de Lévy que são demonstradas em Applebaum (2009):

- Se $\vartheta(R) = \infty$ então pode ocorrer um número infinito de saltos (saltos com comprimento < 1). Neste caso, diz-se que o processo de Lévy tem atividade infinita.
- Se $\vartheta(R) < \infty$ então todas (quase certamente) as trajetórias têm um número finito de saltos. Neste caso, diz-se que o processo de Lévy tem atividade finita.
- Se o processo de Lévy não contiver um movimento Browniano ($\sigma = 0$ no tripleto característico) e $\int_{|x| \leq 1} |x| \vartheta(dx) < \infty$, então todas as trajetórias têm variação finita (quase certamente).
- Se o processo de Lévy contiver um movimento Browniano ($\sigma \neq 0$ no tripleto característico) ou $\int_{|x| \leq 1} |x| \vartheta(dx) = \infty$ então todas as trajetórias têm variação infinita (quase certamente).

Termina-se esta secção apresentando a definição de subordinador. Trata-se de um processo de Lévy positivo e não decrescente que serve, por exemplo, para modelar a evolução aleatória do tempo. Neste caso, não existe movimento Browniano e é necessário impor restrições adicionais sobre a medida de Lévy, descritas no teorema seguinte.

Teorema 2.3 (Subordinador) *Se T é um subordinador, então a sua função característica é dada pela expressão*

$$\varphi_{T(t)}(u) = \exp \left\{ t \left[ibu + \int_0^{\infty} (e^{iuy} - 1) \vartheta(dy) \right] \right\} \quad (2.7)$$

em que $b \geq 0$ e a medida de Lévy satisfaz as seguintes condições adicionais

$$\vartheta(-\infty, 0) = 0 \text{ e } \int_0^{\infty} \min(1, y) \vartheta(dy) < \infty$$

Para uma demonstração deste teorema, ver Applebaum (2009).

Se se substituir a variável temporal t por um subordinador $T(t)$, num processo de Lévy $X(t)$, obtém-se outro processo de Lévy $Z(t) = X(T(t))$ com função característica

$$\varphi_{Z(t)}(u) = \exp(t\eta_Z(u)), \quad \eta_Z(u) = \eta_T(iu) \circ (-\eta_X(u)) \quad (2.8)$$

em que η_Z , η_T e η_X são os expoentes característicos dos processos Z , T e X respetivamente. Este resultado é demonstrado em Applebaum (2009).

2.2. Derivados Financeiros, Arbitragem e Mercados Incompletos

Nesta secção, introduzem-se vários conceitos relacionados com a avaliação de derivados financeiros e enunciam-se os teoremas fundamentais da matemática financeira que estabelecem as condições para a existência de um mercado livre de arbitragem e para a existência de um mercado completo. Os conceitos apresentados nesta secção são discutidos detalhadamente em Björk (2009).

Um derivado financeiro é um produto financeiro cujo preço depende da dinâmica de outro ativo financeiro - o ativo subjacente (e.g. acção, índice bolsista, obrigação). Como exemplos de derivados financeiros existem opções europeias, opções americanas, futuros, opções sobre obrigações, *swaps* sobre a taxa de juro, entre muitos outros. A definição seguinte formaliza este conceito.

Definição 2.4 O "payoff" de um derivado financeiro, ou valor do derivado na data de maturidade (data de exercício) T , é uma variável aleatória X , mensurável relativamente a \mathbb{F}_T^S , da forma $X = \emptyset(S)$, em que S é um processo estocástico que representa a dinâmica do preço do ativo financeiro subjacente (em termos matemáticos, \mathbb{F}_T^S é uma σ -álgebra e representa o fluxo de informação gerado pelo processo S , até ao instante T).

Um derivado financeiro representa, portanto, um contrato entre duas entidades regido pela função \emptyset . O requisito de X ser mensurável relativamente a \mathbb{F}_T^S , significa que apenas na data de maturidade T , se conhecerá o valor a

pagar entre as entidades envolvidas. Um exemplo importante de derivado financeiro, e que será utilizado no processo de calibração (capítulo 3 - Metodologia e Dados) dos modelos a analisar neste trabalho, é a opção de compra europeia.

Definição 2.5 *Uma opção de compra europeia, com preço de exercício K e data de maturidade T , sobre um ativo subjacente S , é um contrato com as seguintes cláusulas:*

- *O detentor da opção tem o direito (mas não a obrigação) de comprar, na data de maturidade T , o ativo subjacente S , ao preço K , ao subscritor da opção.*
- *O direito de compra sobre o ativo subjacente, ao preço K , só pode ser exercido na data de maturidade T .*

A função ϕ que rege este contrato depende do valor do ativo subjacente na data de maturidade T e tem a seguinte expressão:

$$\phi(S(T)) = \max[S(T) - K, 0] \quad (2.9)$$

A restante secção será dedicada à determinação do preço "justo" deste contrato ou, de uma forma geral, do preço $\Pi(t, X)$ de um derivado financeiro X , no instante t .

Começa-se por definir um modelo para representar o mercado, composto por $N + 1$ ativos financeiros cujo preço é fornecido pelos processos estocásticos

$$S_0(t), S_1(t), \dots, S_N(t)$$

em que $S_0(t)$ representa o ativo financeiro sem risco.

Definição 2.6 *Uma estratégia de carteira $h(t)$ consiste em assumir uma posição sobre cada um dos ativos do mercado e é expressa pelo processos*

$$h_0(t), h_1(t), \dots, h_N(t)$$

onde $h_i(t)$ representa a quantidade do ativo i , no instante t , existente na carteira.

Definição 2.7 *O valor da carteira $V(t, h)$, no instante t , utilizando a estratégia de carteira $h(t)$, é dado por*

$$V(t, h) = \sum_{i=0}^N h_i(t) S_i(t) \quad (2.10)$$

Consideram-se apenas carteiras autofinanciadas, onde não existe entrada, ou saída, de capital de e para o exterior e as alterações no valor da carteira devem-se a alterações no preço dos ativos financeiros que compõem a mesma, ao longo do tempo, e da estratégia de carteira seguida.

Definição 2.8 *Uma carteira é autofinanciada se verificar a seguinte condição*

$$V(t, h) = V(0, h) + \sum_{i=0}^N \int_0^t h_i(s) dS_i(s) \quad (2.11)$$

Outra condição que se vai impor sobre o mercado é a ausência de arbitragem, isto é, não é possível ganhar dinheiro sem se assumir qualquer tipo de risco.

Definição 2.9 *Uma possibilidade de arbitragem consiste numa estratégia de carteira $h(t)$ (autofinanciada) em que se verificam as seguintes condições:*

- $V(0, h) = 0$, isto é, o investimento inicial é zero.

- $P(V(t, h) > 0) > 0$ e $P(V(t, h) \geq 0) = 1$, isto é, existe sempre a probabilidade de ocorrer um ganho (nunca existe prejuízo em relação ao investimento inicial realizado).

Um mercado é livre de arbitragem se não existirem possibilidades de arbitragem.

Antes de se apresentarem os teoremas fundamentais desta secção, é necessário definir o conceito de medida de martingala.

Definição 2.10 Uma medida de probabilidade Q , em \mathbb{F}_T , é uma medida de martingala para o mercado $S_0(t), S_1(t), \dots, S_N(t)$, no intervalo $[0, T]$, se possuir as seguintes propriedades:

- Q é equivalente a P em \mathbb{F}_T .
- Todos os processos de preço descontados $\tilde{S}_0(t), \tilde{S}_1(t), \dots, \tilde{S}_N(t)$ são martingalas, segundo Q , no intervalo $[0, T]$, em que $\tilde{S}_i(t) = \frac{S_i(t)}{S_0(t)}$.

O próximo teorema representa um dos resultados fundamentais da teoria da arbitragem e é essencial para se estabelecer uma fórmula para a avaliação de derivados financeiros.

Teorema 2.4 (1º Teorema Fundamental da Matemática Financeira) O modelo de mercado $S_0(t), S_1(t), \dots, S_N(t)$ é livre de arbitragem se e só se existir uma medida de martingala Q (não necessariamente única)¹.

Para uma demonstração deste teorema, ver Delbaen & Schachermayer (1994).

Se se incluir o derivado financeiro no mercado definido anteriormente, obtém-se o mercado alargado $S_0(t), S_1(t), \dots, S_N(t), \Pi(t, X)$. Impondo a

¹ Para o teorema ser formulado rigorosamente e com generalidade, o conceito de possibilidade de arbitragem deveria ser modificado para o conceito de “no free lunch with vanishing risk”. Isto é discutido em Delbaen & Schachermayer (1994).

condição de ausência de arbitragem, a aplicação do 1º Teorema Fundamental implica que existe uma medida de martingala Q em que $\Pi(t, X)/S_0(t)$ é uma martingala e obtém-se a fórmula geral para a avaliação de derivados financeiros.

Teorema 2.5 (Fórmula para a avaliação de derivados financeiros) O preço $\Pi(t, X)$, no instante t , de um derivado financeiro X , num mercado livre de arbitragem, é dado pela expressão

$$\Pi(t, X) = S_0(t) E^Q \left[\frac{X}{S_0(T)} | \mathcal{F}_t \right] \quad (2.12)$$

em que Q (não necessariamente única) é uma medida de martingala.

Para uma demonstração deste teorema, ver Björk (2009).

Se se assumir que o ativo sem risco $S_0(t)$ é um depósito bancário com taxa de juro $r(t)$, traduzido pela expressão $S_0(t) = S_0(0) \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right)$, a fórmula anterior assume a forma

$$\Pi(t, X) = E^Q \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} X | \mathcal{F}_t \right] \quad (2.13)$$

A expressão anterior pode ainda ser simplificada se se assumir que a taxa de juro $r(t)$ é constante no intervalo $[0, T]$

$$\Pi(t, X) = e^{-(T-t)r} E^Q [X | \mathcal{F}_t] \quad (2.14)$$

Se for possível replicar o preço de qualquer derivado financeiro $\Pi(t, X)$, num mercado livre de arbitragem, através de uma estratégia de carteira $h(t)$, diz-se que o mercado é completo. A existência de um mercado completo significa que um derivado financeiro é supérfluo na medida em que este pode ser substituído por uma estratégia de carteira $h(t)$. Isto significa que, um mercado é completo se o preço do derivado financeiro $\Pi(t, X)$ é igual (quase

certamente) ao valor da carteira $V(t, h)$, isto é, se $\Pi(t, X)$ admitir uma representação da forma

$$P\left(\Pi(t, X) = V(0, h) + \sum_{i=0}^N \int_0^t h_i(s) dS_i(s)\right) = 1 \quad (2.15)$$

Existe, contudo, uma relação entre a existência de um mercado completo e o conceito de medida de martingala, formulada no teorema seguinte.

Teorema 2.6 (2º Teorema Fundamental da Matemática Financeira)

Assume-se que o mercado é livre de arbitragem. O mercado é completo se e só se a medida de martingala Q , é única.

Para uma demonstração deste teorema, ver Björk (2009).

A ausência de arbitragem significa que a fórmula para a avaliação de derivados financeiros (2.12) é válida. No entanto, se o mercado for incompleto, podem existir várias medidas de martingala que podem conduzir a diferentes processos de preço para $\Pi(t, X)$, na fórmula anterior. Com a exceção do modelo de Black-Scholes, os modelos que serão analisados na secção 2.4, e âmbito do presente trabalho, conduzem a mercados incompletos de acordo com Schoutens (2003) e Cont & Tankov (2004). Torna-se, portanto, necessário saber como obter medidas de martingala e determinar qual é utilizada pelo mercado, no mundo real, na avaliação de derivados financeiros.

2.3. Transformações de Martingala

Nesta secção, simplifica-se o modelo de mercado introduzido na secção anterior e analisam-se dois métodos para a obtenção de medidas de

martingala: a transformação de Esscher e a introdução de um parâmetro para corrigir a média de um processo de Lévy.

Os derivados financeiros analisados no presente trabalho - opções europeias e opções exóticas - dependem da evolução do preço de um único ativo subjacente. Desta forma, o modelo de mercado descrito na secção anterior, pode ser reduzido para dois ativos: o ativo sem risco $S_0(t)$ e o ativo (subjacente) com risco $S(t)$. Para modelar o ativo sem risco, considera-se uma taxa de juro constante e $S_0(0) = 1$ e utiliza-se a função determinística

$$S_0(t) = e^{rt} \quad (2.16)$$

Para modelar o ativo com risco, utiliza-se o processo

$$S(t) = S(0)e^{X(t)} \quad (2.17)$$

em que $X(t)$ é um processo de Lévy. O logaritmo do retorno do ativo $S(t)$, num intervalo de tempo com duração s , segue a distribuição do incremento do processo de Lévy $X(t)$, no intervalo correspondente

$$\ln \left[\frac{S(t+s)}{S(t)} \right] = X(t+s) - X(t) \quad (2.18)$$

Na secção anterior, conclui-se que para avaliar um derivado financeiro, num mercado livre de arbitragem, é necessário determinar uma medida de martingala a partir da medida de probabilidade objetiva P . Um método popular proposto em Gerber & Shiu (1994), consiste em efetuar uma transformação da função densidade de probabilidade (f.d.p.) do processo $X(t)$. Para o efeito, considere-se a função característica de $X(1)$ dada por $\varphi_{X(1)}(u) = E[\exp(iuX(1))]$ e seja $f_{X(t)}(x)$ a f.d.p. do processo $X(t)$, na medida P , e $f_{X(t)}^Q$ a f.d.p. correspondente, na medida Q , dada por

$$f_{X(t)}^Q = \frac{e^{\theta x} f_{X(t)}(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta x} f_{X(t)}(x) dx} = \frac{e^{\theta x} f_{X(t)}(x)}{E[e^{\theta X(t)}]} \quad (2.19)$$

Esta transformação designa-se por transformação de Esscher e o objetivo é determinar o parâmetro θ para que $S(t)$ seja uma martingala, de acordo com a expressão

$$S(0) = e^{-rt} E^Q[S(t)] = e^{-rt} E^Q[S(0)e^{X(t)}] \Leftrightarrow \\ e^{rt} = E^Q[e^{X(t)}]$$

A solução desta equação não depende de t (ver Gerber & Shiu 1994) e considerando $t = 1$, obtém-se

$$e^r = E^Q[e^{X(1)}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x f_{X(1)}^Q(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \frac{e^{\theta x} f_{X(1)}(x)}{E[e^{\theta X(1)}]} dx = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x(1+\theta)} f_{X(1)}(x)}{\varphi_{X(1)}(-i\theta)} dx = \frac{E[e^{x(1+\theta)}]}{\varphi_{X(1)}(-i\theta)} = \frac{\varphi_{X(1)}(-i(\theta + 1))}{\varphi_{X(1)}(-i\theta)} \Leftrightarrow \\ \frac{\varphi_{X(1)}(-i(\theta + 1))}{\varphi_{X(1)}(-i\theta)} = e^r \quad (2.20)$$

A solução desta equação fornece o parâmetro θ que transforma o processo $S(t)$ em martingala.

Contudo, apesar da simplicidade do método, o mercado poderá não utilizar, na prática, a medida de martingala obtida pela transformação de Esscher na avaliação dos derivados financeiros. Um método alternativo, utilizado em Schoutens (2003), consiste em corrigir a média do processo $X(t)$, com dinâmica na medida P , adicionando um parâmetro mt , formando um novo processo $\bar{X}(t)$, com dinâmica em Q ,

$$\bar{X}(t) = X(t) + mt \quad (2.21)$$

Esta alteração apenas tem influência no parâmetro b do tripleto de Lévy de $X(t)$. O tripleto $(\bar{\sigma}^2, \bar{\vartheta}, \bar{b})$ do novo processo $\bar{X}(t)$ é dado por

$$\bar{b} = b + m, \bar{\sigma}^2 = \sigma^2, \bar{\vartheta}(dx) = \vartheta(dx)$$

e a função característica tem a seguinte expressão

$$\varphi_{\bar{X}(t)}(u) = \varphi_{X(t)}(u) e^{i u m t} \quad (2.22)$$

O objetivo é determinar o parâmetro m para que $\bar{S}(t) = S(0)e^{X(t)+mt}$ seja uma martingala² (na dinâmica Q) e a ideia associada a este método é análoga à aplicação do teorema de Girsanov ao modelo de Black-Scholes (movimento Browniano com *drift*) alterando o coeficiente de *drift* (Oksendal 1998). Seguindo um raciocínio análogo ao que foi utilizado na transformação de Esscher, a condição de martingala para o processo $S(t)$ resulta na seguinte expressão

$$S(0) = e^{-rt} E^Q[\bar{S}(t)] = e^{-rt} E^Q[S(0)e^{X(t)+mt}] \Leftrightarrow e^{rt} = E^Q[e^{X(t)}] e^{mt}$$

Aplicando a função característica do processo de Lévy $X(t)$, $\varphi_{X(t)}(u) = E^Q[e^{iuX(t)}] = \exp(t\eta_X(u))$, na expressão anterior, obtém-se

$$e^{rt} = \varphi_{X(t)}(-i) e^{mt} = e^{t\eta_X(-i)} e^{mt}$$

Aplicando o logaritmo a ambos os membros da expressão anterior, obtém-se

$$m = r - \eta_X(-i) \quad (2.23)$$

Esta igualdade fornece o parâmetro m que garante que $\bar{S}(t)$ é uma martingala (η_X é o expoente característico de $X(t)$).

² Na dinâmica P : $\varphi_{\log \frac{S(t)}{S(0)}}(u) = \varphi_{X(t)}(u)$ e na dinâmica Q : $\varphi_{\log \frac{\bar{S}(t)}{S(0)}}(u) = \varphi_{\bar{X}(t)}(u)$.

2.4. Modelos Financeiros

Nesta secção, enumeram-se alguns modelos financeiros (baseados em processos de Lévy), utilizados na literatura financeira, para $X(t)$ e detalham-se os modelos que constituem o âmbito do presente trabalho: Black-Scholes, CGMY e CGMY-Gamma-OU.

O modelo de Black-Scholes, proposto em Merton (1973) e Black-Scholes (1973), constitui um passo importante, na literatura financeira, para a explicação da dinâmica do preço de um ativo financeiro. Neste modelo, $X(t)$ é modelado por um movimento browniano com *drift* (ver exemplo A.1). Trata-se de um modelo de difusão sem a introdução de uma componente descontínua (saltos). Este modelo é caracterizado por:

- $X(t) - X(0) \sim N\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right)$, em que σ representa a volatilidade e μ a taxa média de retorno do ativo $S(t)$. A figura 1 (anexo D) ilustra uma trajectória possível para a evolução do preço de acordo com este modelo.

- A função característica (dinâmica em P) é dada pela expressão

$$\varphi_{X(t)}(u) = e^{t\eta_X(u)} = \exp\left(it\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)u - \frac{1}{2}t\sigma^2 u^2\right) \quad (2.24)$$

- Cálculo do parâmetro m para mudança de medida (ver expressão 2.23)

$$m = r - \eta(-i) = r - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 = r - \mu$$

- A função característica (dinâmica em Q) é dada pela expressão

$$\begin{aligned}
\varphi_{\bar{X}(t)}(u) &= e^{t\eta_{\bar{X}}(u)} = \varphi_{X(t)}(u) e^{i\mu t} \\
&= \exp\left(it\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)u - \frac{1}{2}t\sigma^2u^2 + i\mu t(r - \mu)\right) \\
&= \exp\left(it\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)u - \frac{1}{2}t\sigma^2u^2\right)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

- O triplete $(\bar{\sigma}^2, \bar{\vartheta}, \bar{b})$ do novo processo $\bar{X}(t)$ é dado por

$$\bar{b} = r - \frac{1}{2}\sigma^2, \bar{\sigma}^2 = \sigma^2, \bar{\vartheta}(dx) = 0$$

Vários estudos empíricos apresentados na literatura financeira (ver Nicolau 2012) têm revelado um conjunto de factos sobre séries temporais financeiras - factos estilizados em finanças - que não são modelados pelo modelo de Black-Scholes, nomeadamente:

- A distribuição Normal é simétrica (*coeficiente de assimetria* = 0) e os dados empíricos revelam que o logaritmo dos retornos segue uma distribuição assimétrica negativa (*coeficiente de assimetria* < 0), isto é, as variações negativas do logaritmo dos retornos são mais acentuadas que as variações positivas. O coeficiente de assimetria é calculado através da expressão

$$\text{coeficiente de assimetria} = \frac{E[(X - E(X))^3]}{[Var(X)]^{3/2}}$$

- Os dados empíricos revelam que o logaritmo dos retornos segue uma distribuição leptocúrtica (*coeficiente de curtose* > 3) que não pode ser representado por uma distribuição Normal (*coeficiente de curtose* = 3). Do ponto de vista financeiro, isto significa que os ativos financeiros apresentam variações extremas (afastadas da média) no preço que não podem ser

explicadas por uma distribuição Normal. O coeficiente de curtose é calculado através da expressão

$$\text{coeficiente de curtose} = \frac{E[(X - E(X))^4]}{[Var(X)]^2}$$

- A volatilidade varia de forma estocástica ao longo do tempo e não pode ser representada por um valor constante como no modelo de Black-Scholes. Os dados empíricos mostram a existência de uma sucessão de períodos de alta volatilidade (fortes variações no preço) e períodos de baixa volatilidade (fracas variações no preço) - efeito de *volatility clustering*.

Os dois primeiros pontos significam que o logaritmo dos retornos - $X(t) - X(s)$ - não segue uma distribuição Normal e é necessário utilizar outras distribuições que se ajustem melhor à dinâmica real do mercado. Na literatura financeira são apresentados inúmeros modelos para a distribuição dos incrementos $X(t) - X(s)$: Madan & Seneta (1990) propõem o modelo *Variance Gamma*, Eberlein & Keller (1995) propõem o modelo Hiperbólico, Barndorff-Nielsen (1995) propõem o modelo *Normal Inverse Gaussian*, Carr, Geman, Madan & Yor (2002) propõem o modelo CGMY e Schoutens (2001) sugere o modelo de Meixner.

Schoutens (2003) efetua uma comparação dos vários modelos enumerados anteriormente e o modelo CGMY é o que se ajusta melhor aos dados de mercado utilizados no processo de calibração. Por ser o modelo que assume melhor *performance*, justifica-se a sua utilização na avaliação da opção exótica no capítulo seguinte. O modelo CGMY é caracterizado por:

- $X(t) - X(0) \sim CGMY(tC, G, M, Y)$. A figura 2 (anexo D) ilustra a evolução de uma trajectória possível para o preço do ativo de acordo com este modelo.

- O coeficiente de assimetria é dado pela expressão (Γ é a função Gama)

$$\text{coeficiente de assimetria} = \frac{C(M^{Y-3} - G^{Y-3})\Gamma(3 - Y)}{(C(M^{Y-2} + G^{Y-2})\Gamma(2 - Y))^{3/2}} \quad (2.26)$$

- O coeficiente de curtose é dado pela expressão

$$\text{coeficiente de curtose} = 3 + \frac{C(M^{Y-4} + G^{Y-4})\Gamma(4 - Y)}{(C(M^{Y-2} + G^{Y-2})\Gamma(2 - Y))^2} \quad (2.27)$$

- A função característica (dinâmica em P) é dada pela expressão

$$\begin{aligned} \varphi_{X(t)}(u) &= e^{t\eta_X(u)} \\ &= \exp(tC\Gamma(-Y)((M - iu)^Y - M^Y + (G + iu)^Y - G^Y)) \end{aligned} \quad (2.28)$$

- Cálculo do parâmetro m para mudança de medida

$$m = r - \eta(-i) = r - C\Gamma(-Y)((M - 1)^Y - M^Y + (G + 1)^Y - G^Y)$$

- A função característica (dinâmica em Q) é dada pela expressão

$$\begin{aligned} \varphi_{\bar{X}(t)}(u) &= e^{t\eta_{\bar{X}}(u)} = \varphi_{X(t)}(u) e^{i u m t} \\ &= \exp(tC\Gamma(-Y)((M - iu)^Y - M^Y + (G + iu)^Y - G^Y)) \\ &\quad \times \exp(i u t (r - C\Gamma(-Y)((M - 1)^Y - M^Y + (G + 1)^Y - G^Y))) \end{aligned} \quad (2.29)$$

- O triplete $(\bar{\sigma}^2, \bar{\vartheta}, \bar{b})$ do novo processo $\bar{X}(t)$ é dado por

$$\begin{aligned} \bar{b} &= C \left(\int_0^1 e^{-Mx} x^{-Y} dx - \int_{-1}^0 e^{Gx} |x|^{-Y} dx \right) + r - C\Gamma(-Y)((M - 1)^Y - M^Y + \\ &\quad (G + 1)^Y - G^Y) \\ \bar{\sigma}^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\bar{\vartheta}(dx) = \begin{cases} C \exp(Gx) (-x)^{-1-Y} dx, & x < 0 \\ C \exp(-Mx) x^{-1-Y} dx, & x > 0 \end{cases}$$

Os parâmetros do modelo estão restringidos a $C, G, M > 0$ e $Y < 2$ e trata-se de um processo de saltos puro, sem componente de difusão ($\bar{\sigma}^2 = 0$). O comportamento das trajetórias é definido pelo parâmetro Y . Se $Y < 0$, as

trajetórias têm um número finito de saltos (atividade finita), caso contrário as trajetórias têm um número infinito de saltos (atividade infinita). Adicionalmente, se $1 \leq Y < 2$, o processo tem variação infinita. Os parâmetros G e M determinam o ritmo de decaimento exponencial na densidade de Lévy $\bar{\nu}$, com impacto no grau de assimetria da distribuição de $X(t)$. Em termos financeiros, estes dois parâmetros controlam a frequência relativa de subidas e descidas de preços e as variações fortes e fracas na dinâmica dos preços. O parâmetro C controla o nível geral de atividade do processo $X(t)$.

Carr et al. (2002) explicam a motivação em utilizar processos de saltos puros sem a introdução de uma componente de difusão. Os autores referem que, na literatura financeira, a componente de difusão é utilizada para modelar os saltos com pequena amplitude que ocorrem com maior frequência e a componente de saltos é utilizada para modelar os saltos com maior amplitude que ocorrem com menor frequência. Contudo, de acordo com os mesmos autores, um processo de saltos puro com variação infinita consegue modelar os saltos frequentes, com menor amplitude, e os saltos ocasionais, com maior amplitude, e não é necessário introduzir uma componente de difusão.

Para modelar o terceiro facto estilizado - variação estocástica da volatilidade - são propostas duas alternativas na literatura financeira: (1) substituir o valor constante da volatilidade σ , no modelo de Black-Scholes, por um modelo estocástico (ver, por exemplo, Hull & White 1998) ou (2) aumentar ou diminuir o nível de incerteza (volatilidade) através do aumento ou diminuição da velocidade a que o tempo flui. A intuição financeira associada à segunda alternativa (transformação temporal), desenvolvida em Carr, Madan, Geman &

Yor (2003), é que em regiões de alta volatilidade, o tempo flui mais depressa e os saltos no preço ocorrem a um ritmo mais elevado.

Schoutens (2003) propõe duas classes de processos para modelar a evolução da taxa temporal: (1) processo CIR (Cox-Ingersoll-Ross) com reversão para a média e (2) processos OU (Ornstein-Uhlenbeck) geridos por um subordinador.

Schoutens (2003) testa vários processos para modelar a evolução da taxa temporal e o processo Gamma-OU é o que se ajusta melhor aos dados de mercado utilizados no processo de calibração e, por isso, justifica-se a sua utilização na avaliação da opção exótica do capítulo seguinte.

Um processo OU $y(t)$ caracteriza-se por obedecer à equação diferencial estocástica

$$dy(t) = -\lambda y(t)dt + dZ(\lambda t), \quad y(0) > 0 \quad (2.30)$$

em que $Z(t)$ é um subordinador (processo de Lévy com *drift* não negativo, sem componente de difusão e com incrementos positivos). Do ponto de vista financeiro, a equação anterior diz que a taxa temporal aumenta (aumento da volatilidade) com os saltos expressos no termo $dZ(\lambda t)$ e diminui (diminuição da volatilidade) de forma gradual com o termo $\lambda y(t)dt$. Como $y(0) > 0$, o processo $y(t)$ é sempre positivo. Para incorporar a distribuição $\text{Gamma}(a,b)$ num processo OU, é necessário definir o que é um processo auto decomponível e utilizar o resultado do próximo teorema.

Definição 2.11 *Uma variável aleatória X é auto decomponível se e só se, para cada $0 < c < 1$, existir uma variável aleatória Y_a , independente de X , tal que $X \stackrel{\text{def}}{=} aX + Y_a \iff \varphi_X(u) = \varphi_X(au)\varphi_{Y_a}(u)$.*

Teorema 2.7 (Estacionaridade de um processo OU) *Seja $\varphi_{X(t)}$ a função característica de uma variável aleatória X . Se X é auto decomponível, então existe um processo estocástico estacionário $X(t)$ e um processo de Lévy $Z(t)$, tal que $X(t) \stackrel{\text{def}}{=} X$ e $X(t)$ satisfaz a equação (2.30). De forma recíproca, se $X(t)$ é um processo estocástico estacionário e $Z(t)$ é um processo de Lévy tal que $X(t) \stackrel{\text{def}}{=} X$ e $X(t)$ e $Z(t)$ satisfazem a equação (2.30), para todo o $\lambda > 0$, então X é auto decomponível.*

Para uma demonstração deste teorema, ver Barndorff-Nielsen (1995).

A distribuição $\text{Gamma}(a,b)$ é auto decomponível (ver Grigelionis 2003) e, através da aplicação do teorema anterior, existe um processo OU $y(t)$ que obedece à equação (2.30) e com distribuição estacionária $\text{Gamma}(a,b)$.

A modelação do tempo pode ser realizada pelo processo não decrescente $Y(t)$ descrito pela expressão

$$Y(t) = \int_0^t y(s) ds \quad (2.31)$$

que possui trajetórias contínuas. Schoutens (2003) apresenta uma fórmula explícita para a função característica de $Y(t)$, associada ao processo Gamma-OU:

$$\varphi_{Y(t)}(u) = \exp\left(iuy(0)\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t}) + \frac{\lambda a}{iu - \lambda b} \left(b \log\left(\frac{b}{b - iu\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t})}\right) - iut\right)\right) \quad (2.32)$$

Define-se $y(0) = 1$ (inicialização da taxa temporal), sem perda de generalidade (ver Schoutens 2003).

O modelo GGMY-Gamma-OU consiste em modelar $X(t)$ utilizando o modelo CGMY e a evolução temporal através do processo Gamma-OU. A expressão (2.17) para a representação do preço do ativo financeiro com risco $S(t)$ (dinâmica em P) fica, neste caso,

$$S(t) = S(0)e^{X(Y(t))} \quad (2.33)$$

Schoutens (2003) apresenta o preço do ativo financeiro com risco $\bar{S}(t)$ (dinâmica em Q), introduzindo o fator de correção $\frac{e^{rt}}{E[e^{X(Y(t))}]}$ para a mudança de medida, através da seguinte expressão

$$\bar{S}(t) = S(0) \frac{e^{rt}}{E[e^{X(Y(t))}]} e^{X(Y(t))} \quad (2.34)$$

e calcula a função característica para o logaritmo do retorno traduzida por

$$\varphi_{\log \frac{\bar{S}(t)}{S(0)}}(u) = \exp(iurt) \frac{\varphi_{Y(t)}(-i\eta_X(u))}{[\varphi_{Y(t)}(-i\eta_X(-i))]^{iu}} \quad (2.35)$$

em que η_X é o expoente característico de $X(t)$ já determinado na equação (2.28) para o modelo CGMY. A figura 3 (anexo D) ilustra uma trajetória possível para a evolução de $y(t)$, $Y(t)$ e do preço do ativo de acordo com este modelo.

3. Metodologia e Dados

Neste capítulo, detalha-se o processo de calibração dos modelos analisados no capítulo anterior (Black-Scholes, CGMY e CGMY-Gamma-OU), descreve-se a opção exótica escolhida e procede-se à avaliação da mesma.

Para calibrar os modelos, utilizam-se os dados de mercado, descritos no Anexo B, referentes a opções de compra europeias sobre o índice AEX

(*Amsterdam Exchange Index*), e determinam-se os parâmetros dos vários modelos, de forma a minimizar a raiz quadrada do erro quadrático médio (*root mean square error* ou RMSE), entre o preço de mercado e o preço dado pelo modelo, através da seguinte expressão:

$$RMSE = \sqrt{\sum_{N^{\circ} \text{ Opções}} \frac{(\text{Preço Mercado} - \text{Preço Modelo})^2}{N^{\circ} \text{ Opções}}} \quad (3.1)$$

Na secção 3.1, descreve-se o método utilizado em Carr & Madan (1998) para determinar o preço do modelo para opções de compra europeias, que figura na expressão anterior, através da função característica $\varphi_{\log \bar{S}(T)}(u)$.

Na secção 3.2, descreve-se a opção exótica estudada no âmbito do presente trabalho e na secção 3.3 explica-se como avaliá-la utilizando o método de simulação de Monte Carlo.

Os vários algoritmos de calibração e de simulação de Monte Carlo foram implementados utilizando o programa de cálculo científico Matlab e um computador com processador CORE i3 com 2 GB de memória RAM.

3.1. Calibração dos modelos

Considere-se $k = \log K$ e $\bar{s}(T) = \log \bar{S}(T)$. O valor de uma opção de compra europeia $C_T(k)$, no instante atual ($t = 0$), obtém-se substituindo a expressão (2.9) em (2.14) resultando em

$$C_T(k) = e^{-rT} E^Q[\text{máx}\{\bar{S}(T) - K, 0\} | \mathcal{F}_0] = e^{-rT} \int_k^{+\infty} (e^s - e^k) f^Q(s) ds \quad (3.2)$$

em que $f^Q(s)$ é a f.d.p. da variável aleatória $\bar{s}(T)$, na medida Q . Utiliza-se a notação $\bar{S}(T)$, por substituição de $S(T)$, para salientar que é a dinâmica do ativo financeiro na medida Q .

Como $\lim_{k \rightarrow -\infty} C_T(k) = S(0)$, significa que $C_T(k)$ não possui quadrado integrável e não é possível calcular a sua transformada de Fourier. Para o efeito, considera-se $e^{\alpha k} C_T(k)$ com $\alpha = 0,75$ (Schoutens 2003 utiliza este valor na calibração dos modelos). A transformada de Fourier é dada por

$$TF\{e^{\alpha k} C_T(k)\} = \Psi_T(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} e^{\alpha k} C_T(k) dk \quad (3.3)$$

Conhecida a função $\Psi_T(v)$, é possível determinar $C_T(k)$ através da transformada inversa de Fourier

$$TF^{-1}\{\Psi_T(v)\} = e^{\alpha k} C_T(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivk} \Psi_T(v) dv \quad (3.4)$$

Desta forma, obtém-se o valor da opção de compra europeia

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivk} \Psi_T(v) dv = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ivk} \Psi_T(v) dv \quad (3.5)$$

A segunda igualdade advém do facto de $C_T(k)$ ser uma função real e, portanto, $e^{-ivk} \Psi_T(v)$ é uma função par.

Para obter $\Psi_T(v)$ em função de $\varphi_{\log \bar{S}(T)}(u)$ basta notar que

$$\Psi_T(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} e^{\alpha k} C_T(k) dk = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} \int_k^{+\infty} e^{-rT} (e^s - e^k) f^Q(s) ds dk$$

Após alguns cálculos, determina-se

$$\Psi_T(v) = \frac{e^{-rT} \varphi_{\log \bar{S}(T)}(v - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - v^2 + i(2\alpha + 1)v} \quad (3.6)$$

Substituindo (3.6) em (3.5), obtém-se a solução para o valor da opção de compra europeia através da função característica $\varphi_{\log \bar{S}(T)}(u)$ que já foi calculada na secção 2.4 (Modelos Financeiros) para os vários modelos em

análise no presente trabalho - equações (2.25), (2.29) e (2.35) - com a seguinte alteração

$$\varphi_{\log \bar{s}(T)}(u) = e^{iu \log S(0)} \varphi_{\log \frac{\bar{s}(T)}{S(0)}}(u) = e^{iu \log S(0)} \varphi_{\bar{X}(T)}(u) \quad (3.7)$$

Para resolver a equação (3.5), utiliza-se a seguinte aproximação numérica

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ivk} \Psi_T(v) dv \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-iv_j k} \Psi_T(v_j) w_j \quad (3.8)$$

em que o intervalo de integração $[0, +\infty]$ foi discretizado no intervalo $[0, \eta(N - 1)]$ através de uma grelha com N pontos com distância η , em que $v_{j+1} - v_j = \eta$, $v_j = \eta(j - 1)$ e w_j depende da regra de integração a adotar (e.g. regra dos trapézios, regra de Simpson). Considera-se que k assume valores (discretos) numa grelha, também, com N pontos com distância λ

$$k(u) = -b + \lambda(u - 1), \quad u = 1, \dots, N \quad (3.9)$$

Como $k(N) = b$, então determina-se o valor de b

$$b = \frac{\lambda}{2}(N - 1) \quad (3.10)$$

Substituindo em (3.8), obtém-se

$$C_T(k(u)) \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\lambda\eta(j-1)(u-1)} e^{ibv_j} \Psi_T(v_j) w_j \quad (3.11)$$

O algoritmo FFT (*Fast Fourier Transform*) serve para calcular, de forma rápida e eficiente, uma soma do tipo

$$\sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1)} x(j), \quad u = 1, \dots, N \quad (3.12)$$

Comparando as equações (3.11) e (3.12), para aplicar o algoritmo FFT, é necessário que

$$\frac{2\pi}{N} = \lambda\eta \quad (3.13)$$

A expressão anterior dá a relação entre a distância dos pontos em ambas as grelhas de discretização - v e k .

Para melhorar o resultado da integração numérica, utiliza-se a regra de Simpson para os coeficientes w_j e a expressão final fica

$$C_T(k(u)) \approx \frac{e^{-\alpha k(u)}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1)} e^{ibv_j} \Psi_T(v_j) \frac{\eta}{3} [3 + (-1)^j - \delta(j-1)] \quad (3.14)$$

em que $\delta(j) = 1$ se $j = 0$ e 0 caso contrário.

Para terminar esta secção, é importante referir que se o ativo financeiro pagar dividendos a uma *yield* anual q , então todas as expressões, deduzidas anteriormente, com exceção da fórmula para a avaliação de derivativos financeiros (expressão 2.14), devem ser atualizadas substituindo r por $r - q$ (ver Schoutens 2003).

3.2. Descrição da opção exótica

Schoutens, Simons & Tistaert (2005) é a referência para os temas analisados nesta secção. A opção exótica analisada no presente trabalho, consiste numa classe particular de derivativos financeiros sobre os momentos do ativo subjacente e designa-se por opção sobre o momento de ordem k . O contrato associado a este tipo de derivativos é uma função das potências do logaritmo dos retornos (diários) do ativo subjacente e destina-se a cobrir diferentes tipos de risco (e.g. potência 2 para cobrir alterações na volatilidade do ativo, potência 3 para cobrir alterações na assimetria da distribuição do ativo, potência 4 para cobertura de risco contra eventos extremos).

Para além da cobertura de risco, Corcuera, Nualart & Schoutens (2005) sugerem que a introdução de ativos financeiros de todas as ordens, cuja dinâmica consiste na potência de ordem k sobre os ativos originais, conduz a um mercado completo.

Considere-se um conjunto discreto de instantes $\{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T\}$, correspondente aos dias de mercado em que o ativo pode ser transacionado e $S(t_i)$ o preço do ativo no instante (dia) t_i . Uma opção sobre o momento de ordem k , depende do somatório dos retornos diários e possui o seguinte contrato na data de maturidade T

$$\phi(S(t_0), \dots, S(t_n)) = VN \times \max \left[\sum_{i=1}^n \left(\log \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})} \right)^k - K, 0 \right] \quad (3.15)$$

em que VN representa o valor nominal.

Para avaliar este contrato, utiliza-se a expressão (2.14), como função da data de maturidade T , do preço de exercício K e do momento k , resultando:

$$\Pi(t, k, T, K) = VN \times e^{-(T-t)r} E^Q \left[\max \left[\sum_{i=1}^n \left(\log \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})} \right)^k - K, 0 \right] \right] \quad (3.16)$$

3.3. Avaliação da opção exótica

O método de Monte Carlo permite obter uma estimativa do preço da opção exótica através da realização de um número elevado de simulações. A precisão do método depende do número de simulações realizadas. O método consiste na simulação de m trajetórias do preço do ativo subjacente e em determinar, para cada trajetória, o valor do contrato, associado à opção exótica, na data de

maturidade T , obtendo-se uma estimativa $X_i, i = 1, 2, \dots, m$. A estimativa para o valor esperado associado ao contrato \hat{X} é dado pela expressão

$$\hat{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \quad (3.17)$$

e o erro da estimativa δ é dado por

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{(m-1)^2} \sum_{i=1}^m (\hat{X} - X_i)^2} \quad (3.18)$$

O preço da opção exótica (equação 3.16) é aproximado pela estimativa fornecida pelo método de Monte Carlo

$$\hat{\Pi}(X) = e^{-(T-t)r} E^Q[\hat{X} | \mathcal{F}_t] \quad (3.19)$$

O anexo C contém a descrição dos algoritmos para simular as trajetórias do preço do ativo subjacente para os modelos de Black-Scholes, CGMY e CGMY-Gamma-OU.

4. Análise de Dados

4.1. Calibração dos modelos

A tabela I sumariza o resultado do processo de calibração dos três modelos.

Tabela I - Estimação dos parâmetros dos modelos

Modelo	RMSE	Parâmetros do Modelo							
		σ	C	G	M	Y	λ	a	b
Black-Scholes	1,257	0,1367	---	---	---	---	---	---	---
CGMY	1,137	---	4,6956	23,5712	63,3488	0,2422	---	---	---
CGMY-Gamma-OU	1,092	---	12,6330	33,2517	82,1778	0,0866	0,2894	4,6391	4,9424

Em consonância com a teoria exposta na secção 2.4 (modelos financeiros), o modelo CGMY-Gamma-OU apresenta uma maior aproximação aos dados de mercado, traduzida por um RMSE menor, seguido dos modelos CGMY e Black-Scholes, por esta ordem (ver Anexo E para uma explicação sobre o RMSE reduzido no modelo de Black-Scholes). Em termos financeiros, os dados da tabela I indicam que a compra de uma carteira de opções de compra europeias (com os preços de exercício e datas de maturidade do Anexo B) sobre o índice AEX, aos preços calculados pelos vários modelos, traduz uma diferença de 1,257€ (Black-Scholes), 1,137€ (CGMY) e 1,092€ (CGMY-Gamma-OU), em média (no sentido de raiz quadrada da média quadrática), face aos preços reais de mercado.

No entanto, não existe uma diferença significativa, no valor do RMSE, que permita concluir que o modelo CGMY-Gamma-OU se destaca, face aos restantes modelos, na explicação da dinâmica do preço das opções sobre o índice AEX. É importante salientar que o processo de calibração depende, obviamente, dos dados de mercado e os modelos podem assumir diferenças significativas, noutros contextos. Por exemplo, em Schoutens (2003) calibraram-se os três modelos, para opções financeiras sobre o índice S&P500, e as diferenças nos valores de RMSE foram mais pronunciadas: Black-Scholes (6,734), CGMY (2,756), CGMY-Gamma-OU (0,365).

4.2. Avaliação da opção exótica

Para o processo de simulação, utilizam-se os parâmetros calculados na secção anterior, para os vários modelos. As tabelas II, III e IV sumarizam os

resultados do processo de simulação de Monte Carlo para a avaliação das opções sobre os momentos de ordem 2, 3 e 4, em relação ao índice AEX (ativo financeiro subjacente), respetivamente.

Analisando os resultados da tabela II, constata-se que o modelo CGMY-Gamma-OU apresenta os preços das opções mais reduzidos, para os vários preços de exercício, comparativamente com os restantes modelos. Significa que a utilização dos outros dois modelos, na prática, na avaliação das opções sobre o momento de ordem 2, irá sobrestimar (inflacionar) o preço de mercado das mesmas. Analisando os preços do modelo Black-Scholes com os preços do modelo CGMY-Gamma-OU, observam-se diferenças entre 8% e 30%.

As diferenças são mais significativas, quando se analisam os dados da tabela III, para as opções sobre o momento de ordem 3. Neste caso, as diferenças de preço entre o modelo Black-Scholes e o modelo CGMY-Gamma-OU ultrapassam os 200%. Significa que a escolha do modelo é determinante na avaliação correta deste tipo de opções. Este facto está relacionado com o valor do coeficiente de assimetria (-0,4225), calculado através da expressão (2.26), estar afastado de 0 (distribuição Normal).

A tabela IV apresenta o preço das opções sobre o momento de ordem 4 e as diferenças entre o modelo de Black-Scholes e o modelo CGMY-Gamma-OU são pouco pronunciadas (cerca de 3%), uma vez que o coeficiente de curtose (3,3863), calculado através da expressão (2.27), é próximo de 3 (distribuição Normal). Neste caso, os preços determinados pelo modelo CGMY-Gamma-OU são superiores e a utilização do modelo de Black-Scholes, na prática, na

avaliação de opções sobre o momento de ordem 4 irá subestimar (deflacionar) o preço de mercado das mesmas.

Tabela II - Preço das opções sobre o momento de ordem 2
(Valor Nominal = 10000)

Preço de Exercício (K)	Modelo		
	Black-Scholes	CGMY	CGMY-Gamma-OU
-0,01	291,7690	282,2826	269,0673
-0,008	271,6737	262,0714	249,5101
-0,006	251,4016	241,3416	228,8697
-0,004	230,9141	221,4202	208,3975
-0,002	210,4570	201,6722	187,9221
0	190,3175	180,6314	168,1095
0,002	170,1655	160,1368	146,8327
0,004	149,4724	139,3723	127,7326
0,006	128,9386	119,4930	106,9711
0,008	108,6526	98,8173	87,2085
0,01	88,4042	78,8463	66,0289

Tabela III - Preço das opções sobre o momento de ordem 3
(Valor Nominal = 10000)

Preço de Exercício (K)	Modelo		
	Black-Scholes	CGMY	CGMY-Gamma-OU
-0,0001	0,9631	0,1875	0,2472
-0,00008	0,7613	0,1011	0,1309
-0,00006	0,5660	0,0442	0,0601
-0,00004	0,3861	0,0167	0,0208
-0,00002	0,2395	0,0049	0,0068
0	0,1285	0,0007	0,0010
0,00002	0,0606	0,0002	0,0002
0,00004	0,0243	0,0000	0,0000
0,00006	0,0087	0,0000	0,0000
0,00008	0,0028	0,0000	0,0000
0,0001	0,0007	0,0000	0,0000

**Tabela IV - Preço das opções sobre o momento de ordem 4
(Valor Nominal = 10000)**

Preço de Exercício (K)	Modelo		
	Black-Scholes	CGMY	CGMY-Gamma-OU
-0,000001	0,0527	0,0597	0,0540
-0,0000008	0,0507	0,0576	0,0518
-0,0000006	0,0489	0,0552	0,0507
-0,0000004	0,0468	0,0533	0,0480
-0,0000002	0,0447	0,0516	0,0455
0	0,0426	0,0493	0,0440
0,0000002	0,0406	0,0474	0,0414
0,0000004	0,0386	0,0452	0,0395
0,0000006	0,0364	0,0436	0,0376
0,0000008	0,0347	0,0410	0,0357
0,000001	0,0324	0,0390	0,0335

5. Conclusões, Contributos, Limitações e Investigação Futura

Os modelos CGMY e CGMY-Gamma-OU são modelos que envolvem maior complexidade ao nível dos algoritmos de calibração e simulação (Monte Carlo). Adicionalmente, são modelos que requerem bastante poder computacional e demoram bastante tempo a produzir resultados (avaliação de opções exóticas), ao nível da simulação de Monte Carlo, comparativamente ao modelo de Black-Scholes. No presente trabalho, para um universo de 5000 simulações, por modelo, o modelo de Black-Scholes produz resultados em 10 minutos e, os restantes modelos, em 60 horas.

Quando o processo de calibração devolve resultados aproximados, entre os vários modelos, na aplicação a dados reais de mercado, não se justifica utilizar os modelos CGMY e CGMY-Gamma-OU para as opções sobre os momentos

de ordem 2 e 4. O modelo de Black-Scholes devolve resultados aproximados em apenas 0,2% do tempo. No entanto, em relação à avaliação de opções sobre os momentos de ordem 3, as diferenças entre os vários modelos são muito significativas e deve optar-se pelo modelo CGMY-Gamma-OU.

O principal contributo do presente trabalho é a ilustração da aplicação dos princípios teóricos e numéricos relacionados com os modelos CGMY e CGMY-Gamma-OU, na avaliação de opções sobre os momentos de ordem k .

O presente trabalho apresenta uma limitação. Para diminuir o erro das estimativas produzidas pelo método de Monte Carlo, é necessário realizar um número mais elevado de simulações. Por exemplo, para reduzir o erro para metade, é necessário multiplicar por quatro o número de simulações. A título de referência, Schoutens, Simons & Tistaert (2005) realizaram 1000000 de simulações.

Refere-se, também, como propostas de investigação futura, (1) considerar outro universo de ativos financeiros e comparar, numericamente, os resultados obtidos na calibração e avaliação de opções sobre os momentos e (2) analisar a avaliação de opções sobre momentos de ordem superior a 4 e concluir sobre as diferenças entre os diferentes modelos, (3) utilização de métodos numéricos alternativos, mais eficientes, para avaliar estas opções exóticas, tal como os métodos numéricos para resolução da equação integro-diferencial (análoga à equação de Black-Scholes) que tem como solução o preço da opção (estes métodos numéricos são análogos a métodos de EDP's - esquemas de diferenças finitas ou elementos finitos).

Anexo A: Exemplos de Processos de Lévy

Os exemplos seguintes são discutidos de forma detalhada em Applebaum (2009) e Cont & Tankov (2004).

Exemplo A.1 (Movimento Browniano com *drift*) Um movimento Browniano com *drift* $C(t)$, com valores em R , possui as seguintes características:

- $C(t) = bt + \sigma W(t)$ em que $b \in R$ e $W(t)$ é um movimento Browniano.
- $C(t) \sim N(bt, \sigma^2 t)$.
- A função característica é dada pela expressão

$$\varphi_{C(t)}(u) = \exp\left(ibtu - \frac{1}{2}t\sigma^2u^2\right) \quad (\text{A.1})$$

Exemplo A.2 (Processo de Poisson e processo de Poisson compensado) Um processo de Poisson $N(t)$, com valores em R e intensidade $\lambda > 0$, possui as seguintes características:

- $N(t) \sim Poi(\lambda t)$, isto é, $P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$.
- $E[N(t)] = \lambda t$, $Var[N(t)] = \lambda t$.
- A função característica é dada pela expressão

$$\varphi_{N(t)}(u) = \exp[\lambda t(e^{iu} - 1)] \quad (\text{A.2})$$

O processo de Poisson conta o número de instantes aleatórios (T_n) que ocorrem no intervalo $[0, t]$ em que $T_n - T_{n-1}$ é uma variável aleatória com distribuição Exponencial.

A versão centrada de $N(t)$ é dada por $\tilde{N}(t) = N(t) - \lambda t$ e designa-se por processo de Poisson Compensado com as seguintes características:

- $E[\tilde{N}(t)] = 0, Var[\tilde{N}(t)] = \lambda t.$
- A função característica é dada pela expressão

$$\varphi_{\tilde{N}(t)}(u) = \exp[\lambda t(e^{iu} - 1 - iu)] \quad (\text{A.3})$$

O termo λt designa-se por compensador e consiste na quantidade que é necessário subtrair a $N(t)$ de modo a formar uma martingala:

$$E[\tilde{N}(t) | \mathcal{F}_s] = \tilde{N}(s)$$

Exemplo A.3 (Processo de Poisson composto) Um processo de Poisson composto $Y(t)$, com intensidade λ e distribuição para o comprimento dos saltos f , é definido por $Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z(t_i)$ em que os comprimentos dos saltos $Z(t)$ são variáveis i.i.d. (independentes e identicamente distribuídas) com distribuição f e $N(t)$ é um processo de Poisson com intensidade λ e independente de $Z(t)$.

Num processo de Poisson composto, os instantes em que ocorrem os saltos (t_i) são definidos pelo processo de Poisson $N(t)$ e o comprimento dos saltos é definido pelo processo $Z(t_i)$. A função característica é dada pela expressão

$$\varphi_{Y(t)}(u) = \exp \left[\lambda t \int_{\mathcal{R}} (e^{iuy} - 1) f(dy) \right] \quad (\text{A.4})$$

Exemplo A.4 (Processo difusão-saltos) Adicionando o movimento Browniano com *drift* $C(t)$ (exemplo A.1) com o processo de Poisson composto $Y(t)$ (exemplo A.3), obtém-se o processo $X(t) = C(t) + Y(t) = bt + \sigma W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} Z(t_i)$. Trata-se de um processo de Lévy com a seguinte expressão para a função característica:

$$\varphi_{X(t)}(u) = \exp \left\{ t \left[ibu - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 + \lambda \int_{\mathbb{R}} (e^{iuy} - 1) f(dy) \right] \right\} \quad (\text{A.5})$$

Anexo B: Dados de Mercado

Na tabela seguinte, encontra-se o preço de 90 opções de compra europeias sobre o índice AEX (significa *Amsterdam Exchange Index*, é o principal índice da bolsa de valores de Amsterdão e é composto pelas 25 principais empresas cotadas nesta praça) retirado do Website da NYSE Euronext, no dia 27 de Dezembro de 2013, às 18:05. Nesta data, o índice tinha um preço *spot* de 400,99 €. A *dividend yield* (anualizado) estimada, de acordo com dados da *Bloomberg*, era de 2,29% e a taxa de juro associada a *swaps* sobre o euro, para uma maturidade a 2 anos, era de 0,55%.

Tabela V - Preço (€) de 90 opções de compra europeias sobre o índice AEX

Preço de Exercício (€)	Maturidade					
	Fev/14	Mar/14	Jun/14	Set/14	Dez/14	Jun/15
240	160,17	160,32	154,93	154,02	153,75	0
280	120,2	120,42	115,3	114,86	114,99	0
300	100,25	100,53	95,69	0	96,09	94,92
320	80,32	80,68	76,34	76,78	77,85	0
330	70,39	0	0	0	0	0
340	60,47	61,02	57,52	58,78	0	0
350	50,62	0	48,49	0	52,41	54,38
355	45,74	0	0	0	0	0
360	40,9	41,84	39,83	42,1	44,68	0
365	36,09	0	0	0	0	0
370	31,38	32,68	0	0	0	0
375	26,75	0	0	0	0	0
380	22,38	24,1	24,29	27,55	30,88	0
385	18,17	20,13	0	0	0	0
390	14,29	16,43	0	0	0	0
395	10,75	13,05	0	0	0	0
400	7,78	10,05	12,25	15,87	19,37	23,83
405	5,29	0	0	0	0	0
410	3,43	5,39	0	0	0	0
415	2,12	0	0	0	0	0
420	1,24	2,49	4,77	0	10,93	0
425	0,7	0	0	0	0	0
430	0,41	1,01	0	0	0	0
435	0,23	0	0	0	0	0
440	0,13	0,38	1,46	0	5,42	0
450	0,05	0	0	0	3,75	7,24
460	0,02	0,07	0	0	0	0
480	0,01	0,03	0,13	0	1,06	0
500	0,01	0,01	0,08	0	0,45	1,65
520	0,01	0,01	0,04	0	0,19	0

Anexo C: Simulação dos Modelos

Movimento Browniano

Para simular um movimento Browniano $W(t)$, discretiza-se o tempo em intervalos com amplitude Δt que se assume muito pequena. Em seguida, simula-se o valor do movimento Browniano, nos instantes $\{n\Delta t, n = 0, 1, \dots\}$ através do algoritmo

$$W(0) = 0, \quad W(n\Delta t) = W((n-1)\Delta t) + \sqrt{\Delta t}v_n, n \geq 1 \quad (\text{C.1})$$

em que $\{v_n, n = 0, 1, \dots\}$ é uma série de números aleatórios com distribuição Normal normalizada.

Processo de Poisson

Para simular um processo de Poisson $N(t)$, com intensidade λ , utiliza-se o facto que o tempo entre dois saltos consecutivos segue uma distribuição Exponencial $\text{Exp}(\lambda)$ com média λ^{-1} . Um número aleatório e_n que segue uma distribuição $\text{Exp}(\lambda)$ pode ser obtido através de um número aleatório u_n , com distribuição Uniforme(0,1), utilizando da expressão

$$e_n = -\log(u_n)/\lambda \quad (\text{C.2})$$

A simulação do processo de Poisson, nos instantes $\{n\Delta t, n = 0, 1, \dots\}$, é realizada através do algoritmo

$$N(0) = 0, \quad N(n\Delta t) = \sup(k: s_k \leq n\Delta t), n \geq 1 \quad (\text{C.3})$$

em que

$$s(0) = 0, \quad s_n = s_{n-1} + e_n, n = 1, 2, \dots \quad (\text{C.4})$$

Processo Gamma-OU

Para simular um processo OU $y(t)$ que obedece à equação (2.30) e com distribuição estacionária $\text{Gamma}(a,b)$, nos instantes $\{n\Delta t, n = 0, 1, \dots\}$, é necessário, em primeiro lugar, simular um processo de Poisson $N(t)$, nos mesmos instantes, com intensidade $a\lambda$. Em seguida, utiliza-se o algoritmo

$$y(n\Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)y((n-1)\Delta t) + \sum_{n=N((n-1)\Delta t)+1}^{N(n\Delta t)} x_n \quad (\text{C.5})$$

em que cada valor x_n segue uma distribuição $\text{Exp}(b)$ que pode ser obtido através de um número aleatório u_n , com distribuição $\text{Uniforme}(0,1)$, utilizando a expressão

$$x_n = -\log(u_n)/b \quad (\text{C.6})$$

Processo de Lévy

Para simular um processo de Lévy $X(t)$ com triplo (σ^2, ϑ, b) , utiliza-se a sua aproximação a um processo de Poisson composto. Para os saltos com pequena amplitude, existem duas alternativas: (1) substituir os saltos pelo valor esperado respetivo ou (2) substituir os saltos por um movimento Browniano. No presente trabalho, utiliza-se a primeira alternativa.

O processo de simulação começa com a discretização da medida de Lévy $\vartheta(dx)$. Escolhe-se um valor pequeno para $0 < \varepsilon < 1$ e efetua-se uma partição em $R \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$ da seguinte forma:

$$a_0 < a_1 < \dots < a_k = -\varepsilon, \quad \varepsilon = a_{k+1} < a_{k+2} < \dots < a_{d+1}$$

Os intervalos $[a_i, a_{i+1}]$ definem-se com a mesma amplitude, por opção, para simplificar a operacionalização do algoritmo de simulação. Os saltos com

amplitude superior a ε são aproximados por uma soma de processos de Poisson independentes. Define-se um processo de Poisson $N^i(t)$, para cada intervalo $[a_{i-1}, a_i[$, com intensidade λ_i dada pela medida de Lévy nesse intervalo $\lambda_i = \vartheta([a_{i-1}, a_i[)$. Adicionalmente, define-se a amplitude do salto c_i , para cada intervalo $[a_{i-1}, a_i[$, de tal forma que a variância do processo de Poisson corresponda à variância do processo de Lévy, no intervalo respetivo $c_i^2 \lambda_i = \int_{a_{i-1}}^{a_i} x^2 \vartheta(dx)$.

Em resumo, o processo de Lévy $X(t)$ é aproximado por um processo $X^d(t)$ que compreende um coeficiente de drift, um movimento Browniano e d processos de Poisson independentes $N^i(t)$, com intensidade λ_i , dado pela expressão

$$X^d(t) = bt + \sigma W(t) + \sum_{i=1}^d c_i (N^i(t) - \lambda_i t \mathbf{1}_{|c_i| < 1}) \quad (\text{C.7})$$

A trajetória do preço do ativo financeiro é obtida através da equação

$$S(t) = S(0)e^{X^d(t)} \quad (\text{C.8})$$

Processo de Lévy com Transformação Temporal

Para simular um processo de Lévy com transformação temporal, é necessário realizar o seguinte conjunto de etapas:

- Simular um processo OU $y(t) = \{y(t), 0 \leq t \leq T\}$ com distribuição estacionária $\text{Gamma}(a, b)$, através da equação (C.5);
- Calcular o processo $Y(t) = \{Y(t) = \int_0^t y(s) ds, 0 \leq t \leq T\}$ associado à modelação do tempo (equação 2.31);

- Simular o processo de Lévy $X(t) = \{X(t), 0 \leq t \leq Y(T)\}$ através da equação (C.7);
- Determinar o processo de Lévy, com a transformação temporal, $X(Y(t)) = \{X(Y(t)), 0 \leq t \leq T\}$;

Finalmente, a trajetória do preço do ativo financeiro é obtida através da equação

$$S(t) = S(0)e^{X(Y(t))} \quad (\text{C.9})$$

Anexo D: Exemplos de Trajetórias de Preços

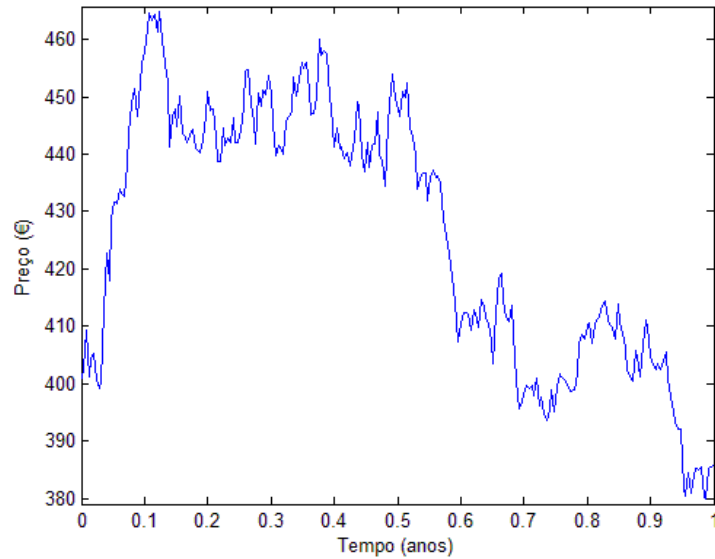


Figura 1 - Simulação do Modelo de Black-Scholes $S(t)$ ($S(0) = 401$; $\sigma = 0,14$; $r = 0,55\%$; $q = 2,29\%$)

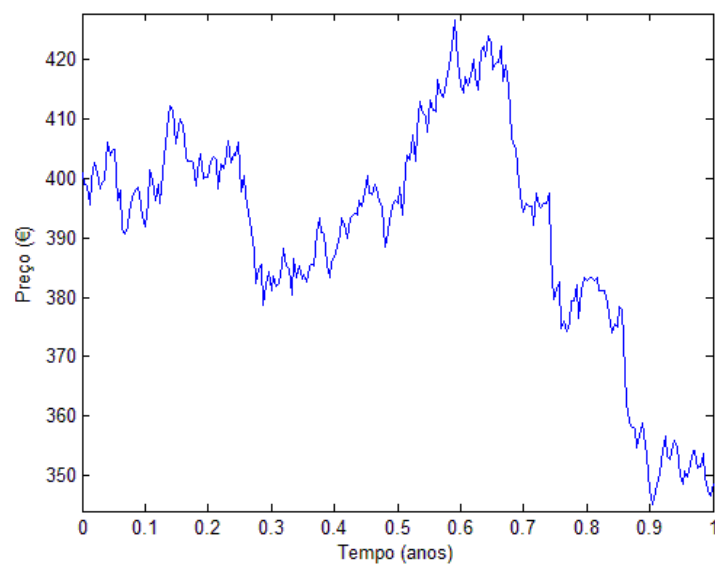


Figura 2 - Simulação do Modelo CGMY $S(t)$ ($S(0) = 401$; $C = 4,7$; $G = 23,6$; $M = 63,7$; $Y = 0,2$; $r = 0,55\%$; $q = 2,29\%$)

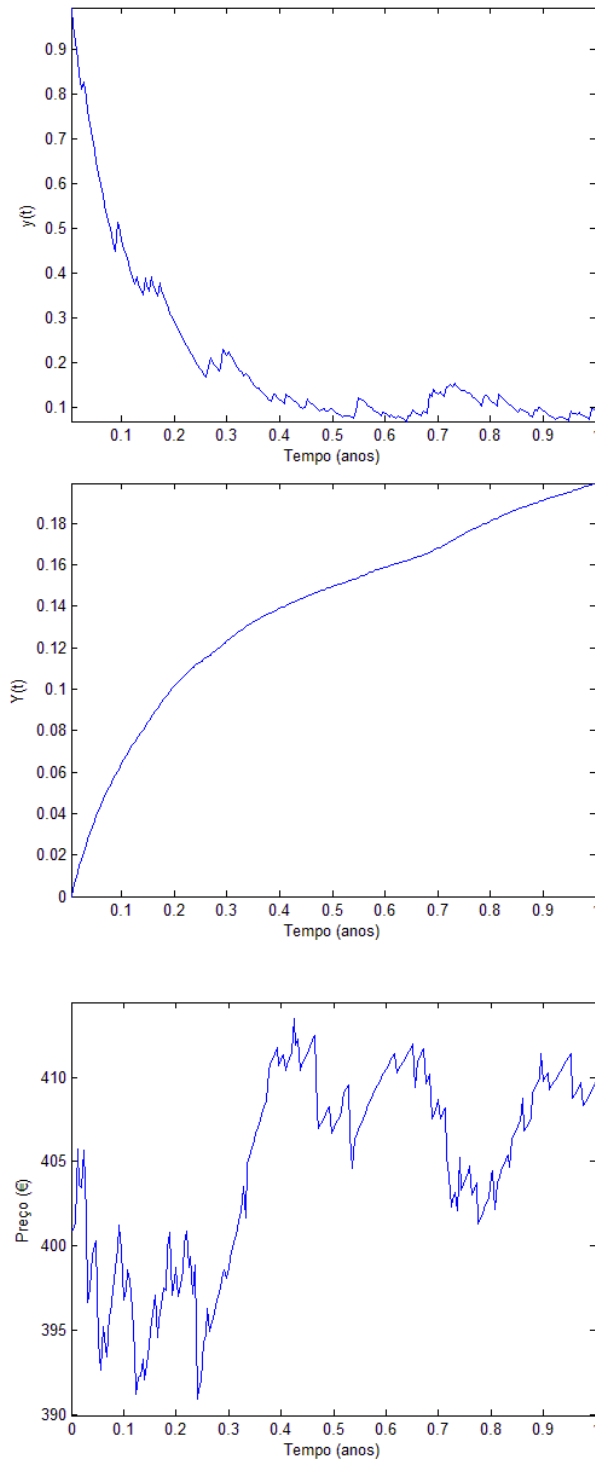


Figura 3 - Simulação do Modelo CGMY-Gamma-OU $y(t)$, $Y(t)$ e $S(t)$ ($S(0) = 400$; $C = 12,6$; $G = 33,3$; $M = 82,2$; $Y = 0,1$; $\lambda = 10$; $a = 10$; $b = 100$; $r = 0,55\%$; $q = 2,29\%$)

Anexo E: RMSE do modelo de Black-Scholes

Através da análise da série de preços (retornos) históricos do índice AEX, relativa ao ano de 2013 (306 preços), faz-se o teste de Kolmogorov-Smirnov e obtém-se um valor- p de aproximadamente 0 (nível de significância de 0,05) e, portanto, rejeita-se a hipótese do índice seguir uma distribuição Normal. Calculam-se os coeficientes de assimetria e curtose obtendo-se -0,14712 e 4,339724, respetivamente, reforçando os factos estilizados, mencionados na secção 2.4, associados à não normalidade do índice.

Através da série de preços históricos, seria de prever que o modelo de Black-Scholes tivesse um RMSE mais elevado. Contudo, o cálculo do RMSE, utilizado no processo de calibração, é feito com base no preço de opções de compra europeias que traduz uma expectativa dos investidores em relação à evolução futura do índice, e não através da série de preços históricos.

Adicionalmente, utilizando as expressões (2.26) e (2.27) obtém-se, para o modelo CGMY, os valores de -0,4225 e 3,3863, para os coeficientes de assimetria e curtose, respetivamente. São valores mais aproximados de uma distribuição Normal – em relação à série de preços históricos - o que ajuda a explicar um RMSE reduzido para o modelo de Black-Scholes.

Referências Bibliográficas

Applebaum, D. (2009). *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge: University Press.

Barndorff-Nielsen, O. E. (1995). Normal inverse Gaussian distributions and the modeling of stock returns. *Research Report no. 300, Department of Theoretical Statistics, Aarhus University*.

Björk, T. (2009) *Arbitrage Theory in Continuous Time*, 3ª Ed. Oxford: University Press.

Black, F. e Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637-654.

Carr, P. e Madan, D. (1998). Option valuation using the fast Fourier transform. *Journal of Computational Finance* 2, 61–73.

Carr, P., Geman, H., Madan, D. H. e Yor, M. (2002). The fine structure of asset returns: an empirical investigation. *Journal of Business* 75, 305–332.

Carr, P., Geman, H., Madan, D., e Yor, M. (2003). Stochastic volatility for Lévy processes. *Mathematical Finance*, 13, 345–382.

Cont, R. e Tankov, P. (2004). *Financial Modelling With Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC.

Corcuera, J.M., Nualart, D. e Schoutens, W. (2005). Completion of a Lévy market by power-jump assets, *Finance and Stochastics*, 9, 109–127.

Delbaen, F e Schachermayer, W (1994). A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing. *Matematische Annalen*, 300, 463–520.

Eberlein, E. e Keller, U. (1995). Hyperbolic distributions in finance. *Bernoulli* 1, 281–299.

Hull, J. C. e White, A. (1988). The pricing of options on assets with stochastic volatility. *Journal of Finance* 42, 281–300.

Geman, H. (2002). Pure jump Levy processes for asset price modelling. *Journal of Banking and Finance* 26, 1297–1316.

Gerber, H. U. e Shiu, E. S. W. (1994). Option pricing by Esscher-transforms. *Transactions of the Society of Actuaries* 46, 99–191

Grigelionis, B. (2003). On the self-decomposability of Euler's gamma function. *Lithuanian Mathematical Journal*, 43(3), 295-305.

Madan, D. B. e Seneta, E. (1990). The VG model for share market returns. *Journal of Business* 63, 511–524.

Merton, R. (1973). The Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141–183.

Nicolau, J (2012). *Modelação de Séries Temporais Financeiras*. Edições Almedina.

Oksendal, B (1998). *Stochastic Differential Equations – An introduction with Applications*. Berlin: Springer-Verlag.

Schoutens, W. (2001). The Meixner process in finance. *EURANDOM Report 2001-002*. EURANDOM, Eindhoven.

Schoutens, W. (2003). *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. John Wiley & Sons, Inc.

Schoutens, W., Simons, E., e Tistaert, J. (2005). Model risk for exotic and moment derivatives. *Exotic Option Pricing and Advanced Lévy Models*, John Wiley and Sons, 67-97