

MESTRADO
ACTUARIAL SCIENCE

TRABALHO FINAL DE MESTRADO
DISSERTAÇÃO

**HETEROGENEIDADE NAS TAXAS DE MORTALIDADE:
UM ESTUDO COMPARADO**

BRUNO MIGUEL COUTO GUERREIRO

OUTUBRO - 2018

MESTRADO EM ACTUARIAL SCIENCE

TRABALHO FINAL DE MESTRADO DISSERTAÇÃO

**HETEROGENEIDADE NAS TAXAS DE MORTALIDADE:
UM ESTUDO COMPARADO**

BRUNO MIGUEL COUTO GUERREIRO

ORIENTAÇÃO:

PROF. ONOFRE ALVES SIMÕES

OUTUBRO - 2018

Agradecimentos

Dedico este espaço a todos os que contribuíram para que esta dissertação fosse realizada. Deixo aqui aos mesmos o meu mais sincero agradecimento.

Ao Professor Onofre Simões, pela sua orientação, apoio, disponibilidade, sugestões e conselhos fundamentais ao longo desta dissertação.

Agradeço ainda ao Professor João Janela, pela ajuda na elaboração do código informático indispensável neste trabalho.

À minha namorada, pelo apoio, ajuda e paciência. Sem ela teria sido impossível a realização desta dissertação.

Por fim, aos meus pais e irmã pelo incentivo e apoio dados.

Resumo

No domínio do atuariado, como em muitos outros, o aperfeiçoamento dos modelos utilizados é de extrema importância, para que a sua aderência à realidade seja cada vez mais efetiva. É desta preocupação que surge a necessidade de estudar a heterogeneidade que por vezes existe na mortalidade das populações, e de qual o seu comportamento nas diferentes idades.

Com o propósito de estudar a heterogeneidade Su e Sherris (2012) aplicam, entre outros, o modelo *Markov Aging* à população australiana, recorrendo ao conceito de idade fisiológica.

Tendo como base este trabalho, o objetivo da presente dissertação consiste no estudo e aplicação do modelo *Markov Aging* à análise e projeção da heterogeneidade existente nas taxas de mortalidade de cinco populações, escolhendo uma coorte específica. Austrália, Canadá, Japão, Portugal e Suécia são os países selecionados, relativamente aos quais se calculam as idades fisiológicas associadas a determinadas idades reais.

Adicionalmente, estuda-se de forma um pouco mais detalhada o caso português, comparando duas coortes distintas, separadas por dez anos. Com isto procura-se inferir se (e como) o comportamento da mortalidade e da heterogeneidade evoluiu ao longo da década em consideração no nosso país.

As conclusões a que se chegou, embora alinhadas com as dos trabalhos de referência, não deixam de ser significativas.

Palavras-chave: Heterogeneidade, Homogeneidade, *Markov Aging*, Idade Fisiológica, Austrália, Canadá, Japão, Portugal, Suécia

Abstract

In the Actuarial Science field, as in other fields, the improvement of the models used is of extreme importance, so that its adherence to reality is increasingly effective. It is from this concern that comes the need to study the heterogeneity existing in the mortality rates of the different populations, and how it actuates at different ages.

In order to study heterogeneity Su and Sherris (2012) apply, among others, the Markov Aging model to the Australian population, using the concept of physiological age.

Based on this work, the objective of this dissertation is to study and apply the Markov Aging model to the analysis and projection of heterogeneity in mortality rates of five populations, choosing a specific cohort. Australia, Canada, Japan, Portugal and Sweden are the selected countries for which the physiological ages associated with certain real ages are calculated.

Additionally, the Portuguese case is studied in a somewhat more detailed way, comparing two distinct cohorts, separated by ten years. With this, we try to infer if (and how) the behavior of mortality and heterogeneity has changed in our country over the decade under consideration.

The conclusions of the study, although in line with those of the reference papers, are significant and enlightening.

Keywords: Heterogeneity, Homogeneity, Markov Aging, Physiological Age, Australia, Canada, Japan, Portugal, Sweden

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Enquadramento Teórico	5
2.1	Mortalidade	5
2.1.1	Função de Sobrevivência	5
2.1.2	Tábuas de Mortalidade	7
2.1.3	Taxa Central de Mortalidade	7
2.2	Cadeias de Markov	8
2.2.1	<i>Phase-Type Distribution</i>	10
3	<i>Markov Aging</i>	11
3.1	Envelhecimento e Idade Fisiológica	11
3.2	Modelo de Mortalidade	12
3.3	Heterogeneidade no Modelo	15
3.4	Processo de Estimação	16
4	Estudo Comparado	18
4.1	Dados	19
4.2	Parâmetros e Estimação	21
4.3	Heterogeneidade	25
4.4	Caso Português	28
5	Conclusão	32
A	Dados HMD	37

Lista de Figuras

3.1	Processo de Envelhecimento	12
4.1	Probabilidade de morte observada	21
4.2	Probabilidade de morte observada vs. estimada	25
4.3	Distribuição da idade fisiológica, nas idades 15, 40 e 65	26
4.4	Probabilidade de morte observada - Portugal 1963	29
4.5	Probabilidade de morte observada vs. estimada - Portugal 1953, 1963 . .	30
4.6	Distribuição da idade fisiológica, nas idades 15, 40 e 65 Portugal 1953, 1963	31

Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros estimados	22
4.2	Parâmetros estimados - Portugal 1963	29
A.1	Dados HMD m_x : Coorte 1953: Austrália, Canadá e Japão	38
A.2	Dados HMD m_x : Coorte 1953: Portugal e Suécia Coorte 1963: Portugal .	39

Capítulo 1

Introdução

A heterogeneidade existente nas populações pode ser estudada a partir de diferentes perspectivas e em áreas de investigação tão diversificadas como a demografia, a psicologia, a medicina e as ciências atuariais, que constituem a área desta dissertação.

No trabalho aqui desenvolvido será considerada a heterogeneidade no que respeita às taxas de mortalidade das populações de diversos países. Assim sendo, interessa primeiramente expor as diferenças entre um país considerado "homogéneo" e um país onde se concluiu que existe heterogeneidade, no que respeita ao comportamento da mortalidade.

De acordo com Su e Sherris (2012) a heterogeneidade reflete as condições de saúde das pessoas numa determinada idade. Pode dizer-se que uma população é considerada homogénea se, para cada idade, o padrão de mortalidade dos indivíduos que a constituem é idêntico. Em oposição, tem-se uma população heterogénea se, para cada idade, se podem identificar diferentes padrões de mortalidade entre os indivíduos dessa mesma idade.

A análise e modelização da mortalidade é de grande relevância no âmbito dos seguros de vida e pensões, assim como na gestão dos sistemas de segurança social. A mortalidade é usualmente incluída nos modelos por meio de tábuas de mortalidade, o que constitui uma forma prática, mas discretizada, de tratar o seu comportamento, Lin e Liu (2007). A obtenção de tábuas de mortalidade credíveis exige um dispêndio muito significativo de recursos. As tábuas de mortalidade para a população portuguesa são elaboradas pelo *Instituto Nacional de Estatística* (INE), com base em censos.

Cada vez mais, a consideração explícita da heterogeneidade nos modelos de mortalidade é um aspeto importante, sobretudo quando se deseja que estes sejam mais adequados e reflitam melhor a realidade. Em consequência, alguns estudos foram feitos sobre o tópico, que serão brevemente apresentados na revisão da literatura que se fará mais adiante. Acredita-se que a consideração da eventual existência de heterogeneidade constitui um fator de aperfeiçoamento na modelização da mortalidade, com efeitos positivos nas áreas em que esta aparece como elemento essencial, nomeadamente, no cálculo atuarial.

Para o estudo da heterogeneidade das populações a literatura existente aborda vários modelos, sendo de destacar o modelo de fragilidade proposto por Vaupel et al. (1979), e numa abordagem posterior o modelo *Markov Aging*, utilizado por Lin e Liu (2007). Em qualquer destes trabalhos são apresentadas revisões de literaturas bastante exaustivas sobre o assunto.

O modelo de fragilidade assenta num princípio multiplicativo e visa obter uma força de mortalidade que incorpore a eventual presença de heterogeneidade na população em questão. Considera para tal a fragilidade existente em cada indivíduo, assim como a força de mortalidade, dada através de leis de mortalidade mais comuns.

O modelo *Markov Aging* surgiu com a necessidade de criar um modelo de mortalidade que, além de se adequar aos dados observados, integre o mecanismo biológico/fisiológico do envelhecimento, permitindo que as informações relativas aos efeitos deste mecanismo sejam incluídas no modelo. Com este intuito o modelo teve por base um processo de Markov contínuo e finito, com um único estado absorvente (morte), e que consegue descrever o processo de envelhecimento fisiológico do corpo humano.

Ao longo dos anos já foram desenvolvidos alguns trabalhos onde se aplica o modelo *Markov Aging*, recorrendo a processos de Markov e *Phase-Type distributions*. Um dos mais ilustrativos, para além dos que serão de seguida apresentados, é o estudo realizado por Govorun et al. (2014), que tem por objetivo explicar e calcular o valor atual dos custos inerentes a um seguro de saúde utilizando os modelos e processos referidos.

Em Portugal o tema não tem sido muito tratado, podendo mencionar-se o trabalho de Ferreira (2015), que por sua vez segue Su e Sherris (2012), onde os autores abordam, para além do modelo *Markov Aging*, o modelo de fragilidade. Fazendo uma comparação dos dois modelos, os autores chegam a algumas conclusões que são significativas no contexto do mercado das rendas atuariais na Austrália. Com efeito, verificam que a heterogeneidade tem impacto sobre a mortalidade da população em estudo, neste caso a população australiana, e que por isso deve ser tida em conta no cálculo das rendas atuariais.

Já Ferreira (2015) foca-se no modelo de fragilidade para a população portuguesa, concluindo que a heterogeneidade é relevante para esta população e que tende a diminuir com a idade. Aplicando os resultados à construção de tábuas de mortalidade heterogéneas, realiza a comparação destas com as habituais tábuas de mortalidade mais utilizadas no mercado segurador português.

Tendo em atenção que o trabalho de Su e Sherris (2012) contém as duas abordagens descritas (fragilidade e envelhecimento), das quais apenas uma foi explorada por Ferreira (2015) (a fragilidade), daí surgiu a motivação para aplicar agora a segunda abordagem (o envelhecimento) ao caso português, também com o objetivo de investigar se as conclusões anteriores serão consistentes com as desta segunda forma de encarar o problema, ou se serão contraditórias, como sucede em Su e Sherris (2012).

Mais ainda, considerou-se importante estender o estudo a outras populações, algumas das quais de outros continentes, e que à partida serão diferentes da população australiana e da população portuguesa, alargando-se deste modo o espetro da análise.

Assim, um dos principais objetivos da presente dissertação, tendo por base a literatura referida, é estudar a heterogeneidade existente na população portuguesa de acordo com o mecanismo biológico/fisiológico do envelhecimento e concluir se esta é (ou não) significativa. Poderá então confrontar-se o resultado com os resultados obtidos nas duas principais referências que suportam o estudo e avançar depois para um estudo comparado com outros países, neste caso, europeus, americanos, asiáticos e da Oceânia, o que constitui o outro principal objetivo estabelecido para o trabalho. De

notar que a comparação com alguma população africana seria interessante, mas razões de tempo e dimensão do texto, bem como de escassez de dados para este continente, inviabilizaram essa possibilidade.

A estrutura desta dissertação é composta por cinco capítulos. No Capítulo 2, pode ler-se uma breve descrição dos fundamentos necessários à compreensão dos desenvolvimentos subsequentes, nomeadamente de noções relativas à mortalidade e aos processos de Markov.

No Capítulo 3 é introduzido o modelo *Markov Aging*, com destaque para o conceito chave da idade fisiológica. Neste capítulo trata-se ainda a questão da heterogeneidade no contexto do modelo e descreve-se o processo de estimação dos parâmetros que nele figuram.

O Capítulo 4 contém a aplicação prática do modelo aos seguintes países; Austrália, Canadá, Japão, Portugal e Suécia. Foi escolhida a coorte da população nascida em 1953, pelo facto de terem agora 65 anos, uma idade próxima das idades de reforma nos países em estudo, critério que também presidiu à escolha das coortes analisadas nos trabalhos de referência.

Utilizando a base de dados *The Human Mortality Database* (HMD), Wilmoth e Shkolnikov (2010), foi efetuada a estimação dos parâmetros necessários para cada país e género, e realizada a análise aos resultados. Neste capítulo encontra-se também a análise à projeção da mortalidade futura, bem como à heterogeneidade e idade fisiológica, segundo os modelos estimados, e faz-se o estudo comparado dos cinco casos. Adicionalmente, e só para a população portuguesa, comparou-se a coorte de 1953 com a coorte de 1963, com o intuito de investigar se esta década originou alterações significativas no comportamento da mortalidade ou no comportamento da heterogeneidade no nosso país.

Por fim, no Capítulo 5, sumariam-se os principais aspetos do estudo e indicam-se algumas vias para desenvolvimentos posteriores.

Capítulo 2

Enquadramento Teórico

Os seguintes fundamentos e conceitos introdutórios essenciais à compreensão deste trabalho podem ser consultados em Dickson et al. (2013), Garcia e Simões (2010), Ross (2014) e em Mourão et al. (2011). Para a notação utilizada foi seguida a notação atuarial internacional, Perryman (1914).

2.1 Mortalidade

2.1.1 Função de Sobrevivência

As funções de sobrevivência que modelam a mortalidade humana são amplamente utilizadas pelos atuários no cálculo de prémios e provisões, essencialmente no chamado "atuariado vida". Estas funções fornecem as probabilidades de vida (e morte) de um qualquer indivíduo da população - com uma determinada idade.

Admita-se assim uma pessoa com idade x , onde $x \geq 0$. A morte desta pessoa pode ocorrer para qualquer idade maior que x . Assim, o seu tempo de vida futuro é uma variável aleatória contínua representada por T_x , sendo conseqüentemente a idade de morte do indivíduo igual a $x + T_x$.

Sendo F_x a função de distribuição de T_x tem-se $F_x(t) = P[T_x \leq t]$, ou seja, F_x representa a probabilidade do indivíduo não sobreviver para além da idade $x + t$.

É também de interesse definir uma função que forneça a probabilidade de sobrevivência de um indivíduo com idade x , que é naturalmente complementar a F_x , e por isso mesmo se designa função sobrevivência. Se se representar a função de sobrevivência por S_x , é imediato que $S_x(t) = 1 - F_x(t) = P[T_x > t]$, e indica a probabilidade de uma pessoa com idade x sobreviver pelo menos t anos.

Dada a função de sobrevivência S_x e admitindo que ω é a idade limite de sobrevivência, utilizando as propriedades próprias das funções de distribuição, tem-se as seguintes propriedades:

- $S_x(0) = 1$
- $S'_x(t) < 0$ para $x \in (0, \omega)$
- $S_x(t) = 0$ para $t \geq \omega - x$

Recorrendo à noção de probabilidade condicionada e lembrando que T_0 representa, pelo definido acima, o tempo de vida futura de um recém nascido, tem-se adicionalmente

$$S_x(t) = P(T_0 > x + t | T_0 > x) = \frac{S_0(x + t)}{S_0(x)}. \quad (2.1)$$

Reescrevendo o resultado em cima, obtém-se $S_0(x + t) = S_0(x)S_x(t)$.

Utilizando a notação atuarial internacional:

- ${}_t p_x = S_x(t)$
- ${}_t q_x = 1 - S_x(t) = F_x(t)$

A probabilidade de uma pessoa com idade x sobreviver mais t anos é assim representada por ${}_t p_x$ e a probabilidade de uma pessoa com idade x falecer em menos de t anos é ${}_t q_x$, vindo

$${}_t p_x = 1 - {}_t q_x. \quad (2.2)$$

Usualmente quando $t = 1$ pode omitir-se, ficando p_x e q_x .

2.1.2 Tábua de Mortalidade

Como foi referido na Introdução, as tábuas de mortalidade são frequentemente utilizadas em cálculos atuariais. Entre outras informações, as tábuas indicam o número de pessoas vivas a cada idade inteira e positiva x , de uma coorte inicial de recém-nascidos.

Recorrendo a uma função de sobrevivência, é possível construir uma tábua de mortalidade. Seja l_x o número de pessoas vivas à idade x e considerando l_0 um número arbitrário positivo, usualmente $l_0 = 10^5$, então

$$l_{x+t} = l_x {}_t p_x.$$

Escrevendo em ordem à função de sobrevivência, obtêm-se os seguintes resultados,

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

$${}_t q_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}$$

É também possível obter para uma tábua de mortalidade o número de mortes entre a idade x e idade $x + 1$, designado por d_x , $d_x = l_x - l_{x+1}$. Daqui resulta que $q_x = \frac{d_x}{l_x}$.

2.1.3 Taxa Central de Mortalidade

Por diversas razões poderá ser útil considerar o número médio de pessoas vivas entre as idades x e $x + 1$, representado por E_x . Recorrendo a uma tábua de mortalidade, e considerando a ocorrência uniforme de mortes ao longo do ano, pode considerar-se a seguinte aproximação

$$E_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}.$$

Relacionando a mortalidade para uma determinada idade x com o número médio de pessoas expostas ao risco entre as idade x e $x + 1$, vem a chamada taxa central de

mortalidade à idade x , m_x . Esta define-se por

$$m_x = \frac{d_x}{E_x}.$$

As taxas centrais de mortalidade são normalmente utilizadas no cálculo de estimativas de q_x ; recorrendo a dados amostrais e admitindo a hipótese clássica de que a distribuição das mortes ao longo de cada ano de idade é uniforme, chega-se ao seguinte resultado:

$$\hat{q}_x = \frac{2m_x}{2 + m_x}. \quad (2.3)$$

2.2 Cadeias de Markov

Um processo estocástico $\{X_t; t \in T\}$ pode definir-se como uma família de variáveis aleatórias. Ou seja, para cada $t \in T$, X_t é uma variável aleatória, sendo T um conjunto arbitrário. Os valores que cada variável X_t pode assumir denominam-se por estados, sendo o conjunto dos mesmos denominado por espaço de estados. Se o espaço de estados contiver um número finito de elementos, o mesmo designa-se por espaço de estados finito, caso contrário designa-se por espaço de estados contínuo.

Num processo estocástico X_t , o índice t é usualmente representativo do tempo e, conseqüentemente, X_t representa o estado do processo no tempo t . Por exemplo, se $X_n = i$ pode dizer-se que o processo se encontra no estado i no momento n . Se o parâmetro t representar períodos de tempo, como $t = 0, 1, 2, \dots$, está-se na presença de um processo estocástico em tempo discreto. Por outro lado, um processo estocástico em tempo contínuo, ocorre quando o parâmetro t representa instantes de tempo, como $t \geq 0$. Adicionalmente, designa-se um processo estocástico por processo estocástico estacionário quando o comportamento do mesmo não depende do tempo, i.e. a probabilidade de passar de um estado para outro estado é constante no tempo.

Um processo de Markov é então um processo estocástico em que a evolução futura da trajetória do mesmo, sendo conhecido o presente, não depende do passado. Sendo que uma cadeia de Markov em tempo discreto é um processo estocástico, estacionário

e com espaço de estados finitos.

Uma cadeia de Markov em tempo discreto satisfaz a propriedade markoviana, i.e. admitindo dois estados, j e i , a probabilidade de o processo se encontrar no estado j no período de tempo seguinte depende apenas do seu estado atual, sendo independente de todos os outros estados anteriores. As probabilidades condicionadas são designadas por probabilidades de transição num passo e representam-se por $P_{ij}^{n,n+1} = Pr\{X_{n+1} = j | X_n = i\}$, sendo usualmente denotadas por P_{ij} .

Assim sendo, P_{ij} representa a probabilidade do processo, após um período de tempo, encontrar-se no estado j dado que estava no estado i , sendo satisfeitas as seguintes condições:

- $0 \leq P_{ji} \leq 1, i, j = 0, 1, 2, \dots ;$
- $\sum_{j \in N} P_{ij} = 1, i, j = 0, 1, 2, \dots .$

Recorrendo à forma matricial é possível definir a chamada matriz de transição num passo, usualmente denominada por matriz \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n0} & p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} .$$

Na matriz acima cada linha representa um dos possíveis estados atuais do processo, enquanto cada coluna representa um dos futuros estados possíveis .

Os processos de Markov são bastante úteis no cálculo atuarial, para diversos ramos, incluindo o ramo vida e pensões. Os estados relevantes neste contexto, relativamente a um qualquer indivíduo, com determinada idade, podem ser "vivo", "ativo", "doente", "inválido", "reformado" ou "morto", entre outros, dependendo da situação em causa.

Como exemplo da aplicabilidade dos processos de Markov à vida humana, assumam-se apenas dois estados; estado 0 - vivo, estado 1 - morto. A matriz de transição entre a idade x e a idade $x + t$ seria neste caso igual a

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} {}_tP_x & {}_tq_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2.1 *Phase-Type Distribution*

Uma *phase-type distribution* é uma distribuição de probabilidade proveniente da agregação de funções exponenciais.

Numa cadeia de Markov diz-se que um estado é absorvente quando $P_{ii} = 1$, o que se traduz pela impossibilidade do processo alterar o seu estado. Quando $P_{ii} < 1$ o estado i diz-se transiente.

Então, se definirmos uma cadeia de Markov com $n + 1$ estados, sendo os n primeiros estados transientes e o último absorvente, pode dizer-se que uma *phase-type distribution* consiste na distribuição do tempo de absorção da particular cadeia de Markov. Os estados transientes podem assim ser considerados fases.

Capítulo 3

Markov Aging

3.1 Envelhecimento e Idade Fisiológica

O modelo *Markov Aging*, apresentado e desenvolvido por Lin e Liu (2007), tenta essencialmente descrever o processo biológico de envelhecimento do corpo humano. Su e Sherris (2012) recorrem a este modelo, como já referido, e é o modelo que serve igualmente de base a este trabalho, pelo que vai ser descrito com algum desenvolvimento na secção seguinte.

O processo de envelhecimento de um organismo vivo é progressivo e irreversível, determinado geneticamente à nascença, e reflete-se na deterioração das suas funções fisiológicas, culminando inevitavelmente com a morte do organismo, Lin e Liu (2007).

A idade fisiológica de cada indivíduo surge neste contexto como uma variável que tenta dar resposta ao grau de envelhecimento do corpo humano. Assim, cada idade fisiológica representa um diferente nível de funcionalidade do nosso organismo, assumindo-se que quanto mais alta for a idade fisiológica menor será a condição deste, ou seja, por exemplo, maior será a probabilidade de se contraírem doenças. Esta idade está diretamente correlacionada com o fator tempo, e não é naturalmente igual à idade cronológica (real).

3.2 Modelo de Mortalidade

Partindo do conceito de idade fisiológica, e conseqüente envelhecimento do corpo humano, vai recorrer-se ao modelo de mortalidade *Markov Aging*, que assenta num processo de Markov contínuo de estados finitos.

No modelo de Markov proposto, as diferentes idades fisiológicas e a morte representam os estados e o processo de envelhecimento é descrito por meio das sucessivas transições de estado para estado, até se chegar ao último dos estados. Uma vez que o envelhecimento humano é irreversível, assume-se que a idade fisiológica é também irreversível, o que implica que só são possíveis transições de uma idade fisiológica para outra idade fisiológica mais avançada; de facto, o tempo não volta para trás, ver Su e Sherris (2012).

O modelo é composto por um único estado absorvente, a morte, e por n idades fisiológicas, resultando numa matriz de transição com um número total de $n + 1$ estados.

Cada idade fisiológica i , com $i = 1, \dots, n$, é caracterizada por dois parâmetros, destinando-se o primeiro, λ_i , a refletir o processo de envelhecimento e o segundo, q_i , a exprimir a intensidade de transição para a morte nessa particular idade fisiológica, ver a Figura 3.1.

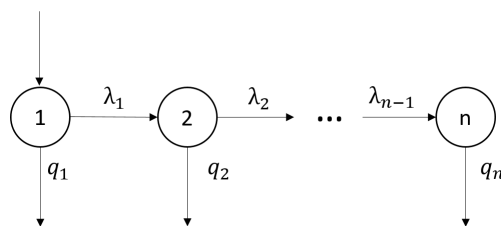


Figura 3.1: Processo de Envelhecimento

Lin e Liu (2007)

A intensidade de transição da idade fisiológica i para a idade $i + 1$ é então dada pelo parâmetro λ_i . Analisando uma população concreta, este parâmetro pode assim providenciar uma medida de intensidade da deterioração do corpo humano para cada idade. De outra perspetiva, o parâmetro λ_i está relacionado com o período de tempo

que decorre desde a transição para o estado i até à transição para o estado $i+1$, pelo que esta variável aleatória tem uma distribuição exponencial com média igual a $\frac{1}{\lambda_i}$. Pode assim concluir-se que, quanto maiores forem os valores assumidos pelos parâmetros λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, mais rápido será o processo de envelhecimento da população em análise.

Segundo Govorun et al. (2014) a matriz geradora do processo pode representar-se da seguinte forma,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} & \mathbf{q} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix},$$

onde,

$$\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + q_1) & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(\lambda_2 + q_2) & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda_3 + q_3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -q_n \end{bmatrix},$$

com distribuição inicial $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$, uma vez que o estudo é efetuado a partir do nascimento e os recém-nascidos estão na idade fisiológica um.

De forma a ajustar o modelo a todas as idades e a todas as probabilidades de morte, é necessário ter em conta o período de adaptação dos recém-nascidos. Assim, é necessário considerar um período que represente o decréscimo da mortalidade desde o nascimento até ao fim do período de adaptação, a partir do qual o desempenho fisiológico será o melhor possível. Para modelar este período adicional, é necessário ter em conta k estados iniciais. Em geral k é um número pequeno, entre 2 e 4, ver Lin e Liu (2007).

Por outro lado, é igualmente necessário definir a estrutura dos parâmetros para os estados em causa, tendo em consideração as dinâmicas de envelhecimento. Conforme estudos desenvolvidos, e conforme referido em Lin e Liu (2007) e Su e Sherris (2012), as funções fisiológicas apresentam em média uma decadência linear a partir de certa idade. Pode assim assumir-se que os parâmetros λ_i são constantes para todas as idades posteriores a k , i.e.,

$$\lambda_i = \lambda, \text{ para } i = k + 1, \dots, n.$$

Segundo Su e Sherris (2012), a taxa de mortalidade q_i varia consoante o estado i , de forma a refletir as condições de saúde. Pode então estabelecer-se a hipótese de que a probabilidade de morte é uma função crescente para todas as idades posteriores ao período de desenvolvimento k , i.e.,

$$q_i = \gamma + \alpha e^{\beta i}, \text{ para } i = k + 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

O parâmetro γ na Equação 3.1 representa uma taxa base, independente das condições de saúde, numa tentativa de modelar o *mid-age hump*, tradicionalmente existente nas populações de países desenvolvidos. Enquanto $\alpha e^{\beta i}$ está associado à componente dependente das condições de saúde.

Deve notar-se que no período de desenvolvimento k cada estado tem uma única taxa de transição e de mortalidade.

Depois de estruturados os parâmetros, a matriz de intensidade de transição Λ pode ser reescrita como

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + q_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -(\lambda_k + q_k) & \lambda_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -(\lambda + \gamma + \alpha e^{\beta(k+1)}) & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -(\lambda + \gamma + \alpha e^{\beta(k+2)}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -(\gamma + \alpha e^{\beta n}) \end{bmatrix}.$$

Recorrendo a Neuts (1981), pode concluir-se que a distribuição de tempo até ao estado absorvente, morte, é uma *Phase-Type distribution*. Consequentemente, a função de sobrevivência de um recém-nascido pode escrever-se como

$$\hat{S}_0(x) = \alpha \exp(\Lambda x) \mathbf{e},$$

onde $\exp(\Lambda x)$ é a matriz exponencial da matriz de intensidade de transição Λ , α é a distribuição inicial e \mathbf{e} é um vetor de uns.

Quanto à probabilidade de morte \hat{q}_x , fica

$$\hat{q}_x = \frac{\hat{S}_0(x) - \hat{S}_0(x+1)}{\hat{S}_0(x)} \quad (3.2)$$

3.3 Heterogeneidade no Modelo

Para o modelo de mortalidade apresentado a heterogeneidade na mortalidade da população é medida pela distribuição das idades fisiológicas através do tempo.

Notando as propriedades de uma *Phase-Type distribution*, ver Neuts (1981), e seguindo Su e Sherris (2012), a probabilidade de um indivíduo de idade x estar no estado i , ou seja, ter a idade fisiológica i é representada por $P_i(x)$ e é dada pela i -ésima entrada no vetor $[\alpha \exp(\Lambda x)]$:

$$P_i(x) = [\alpha \exp(\Lambda x)]_i$$

A probabilidade condicionada de um indivíduo estar no estado i , sabendo-se que sobreviveu até à idade x , é dada por:

$$\pi_i(x) = \frac{P_i(x)}{\hat{S}_0(x)} = \left[\frac{\alpha \exp(\Lambda x)}{\alpha \exp(\Lambda x) \mathbf{e}} \right]_i \quad (3.3)$$

A distribuição da idade fisiológica à idade x é então dada por $\pi(x)$.

A heterogeneidade à idade x pode assim ser medida a partir desta distribuição. Quanto mais dispersa ela for, mais heterogeneidade existirá na população subjacente, pois embora os indivíduos tenham a mesma idade real x , as suas idades fisiológicas

estão dispersas. De forma análoga, pode concluir-se que, quanto mais concentrada a distribuição for, mais homogênea é a população para a idade em análise.

3.4 Processo de Estimação

Tendo em consideração a matriz de transição apresentada, é necessário estimar todos os parâmetros que nela constam.

Seguindo Su e Sherris (2012), o processo adotado passa pela minimização da soma ponderada dos quadrados dos erros para a probabilidade de morte, isto é, quer obter-se os estimadores que minimizam

$$SSE(q_x|S_0(x), \lambda_i, q_i, \lambda, \gamma, \alpha, \beta) = \sum_{x=0}^{\omega-1} (q_x - \hat{q}_x)^2 S_0(x) \quad (3.4)$$

Na equação acima, $S_0(x)$ é a probabilidade observada de um recém-nascido sobreviver até à idade x e q_x é a probabilidade de morte observada nesta idade; \hat{q}_x é dada pela Equação 3.2. A ponderação é utilizada de modo a que os erros em idades avançadas, quando a probabilidade de morte é elevada, tenham um peso reduzido, uma vez que a probabilidade de sobrevivência é reduzida.

Admitindo como dados observados as taxas centrais de mortalidade para cada idade, m_x , comece-se por calcular a probabilidade de morte para cada idade q_x , recorrendo à equação 2.3, e a probabilidade de um recém-nascido sobreviver até à idade x , $S_0(x)$, recorrendo às equações 2.2 e 2.1.

Os parâmetros a estimar são λ_i, q_i , (para $0 < i < k$), λ, γ, α e β . No caso do género masculino pode ser necessário incluir mais do que um parâmetro γ , pois estes são utilizados para modelar o *mid-age hump*, que é mais pronunciado no caso dos homens do que nas mulheres. Os parâmetros podem ser estimados utilizando vários *softwares*, como por exemplo o *Wolfram Mathematica*, recorrendo ao algoritmo *Hooke Jeeves*. Trata-se de um algoritmo determinístico de busca direta, com iterações em todas as possíveis direções que levem à solução do problema proposto; sempre que uma iteração leva a uma solução pior que a sua antecedente, o algoritmo volta à iteração anterior e muda

a sua "direção", ver Hooke e Jeeves (1961).

Adicionalmente, para a percepção da qualidade do modelo, e ainda seguindo Su e Sherris (2012), pode ser calculado o coeficiente de determinação R^2 , dado por:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad (3.5)$$

Na equação acima SSE corresponde à variação que não é explicada pelo modelo, igual à soma ponderada dos erros quadrados:

$$SSE = \sum_{x=0}^{\omega-1} (q_x - \hat{q}_x)^2 S_0(x)$$

e SST é a variação total observada:

$$SST = \sum_{x=0}^{\omega-1} (q_x - \bar{q}_x)^2 S_0(x),$$

sendo ω a maior idade observada, q_x a probabilidade de morte observada para cada idade x e \bar{q}_x a média das mesmas.

Conseqüentemente, o modelo ajusta-se aos dados observados quanto mais o coeficiente de determinação se aproximar do valor 1. Contrariamente, caso R^2 se aproxime de zero é indicativo de que o modelo não se ajusta aos dados em análise.

Capítulo 4

Estudo Comparado

Tal como foi anteriormente explicado, Su e Sherris (2012) e Ferreira (2015) inspiraram este trabalho. Adicionalmente, pois tal não é feito em nenhum dos dois trabalhos referidos, procurou aqui fazer-se um estudo comparado, estendendo a análise da heterogeneidade a populações de outros países e continentes, que estejam atualmente nas proximidades da idade de reforma, com a finalidade de tentar identificar semelhanças e diferenças.

Foram escolhidos cinco países de diversos continentes, que foram selecionados com o desejo de alargar a diversidade dos casos tratados. Não foi considerado nenhum país do continente africano devido à carência de dados para o continente em questão. Relativamente ao nosso país foi-se um pouco mais longe e, à semelhança do que foi feito nos trabalhos em que este se inspirou, desenvolveu-se um estudo comparado de duas coortes, com uma diferença de 10 anos, ver Secção 4.4.

Neste capítulo é apresentada a estimação da mortalidade, bem como a sua projeção futura, recorrendo ao modelo *Markov Aging*, para os países em análise. Em termos de heterogeneidade, é ainda apresentada a distribuição da mesma para cada país e género.

4.1 Dados

Nesta secção são apresentados os dados referentes ao estudo comparado entre os cinco países escolhidos:

- Austrália
- Canadá
- Japão
- Portugal
- Suécia

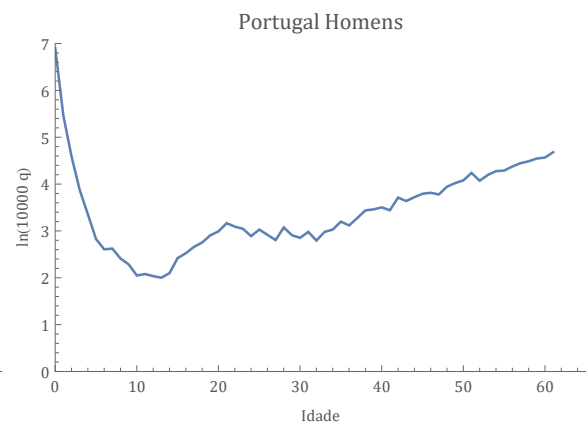
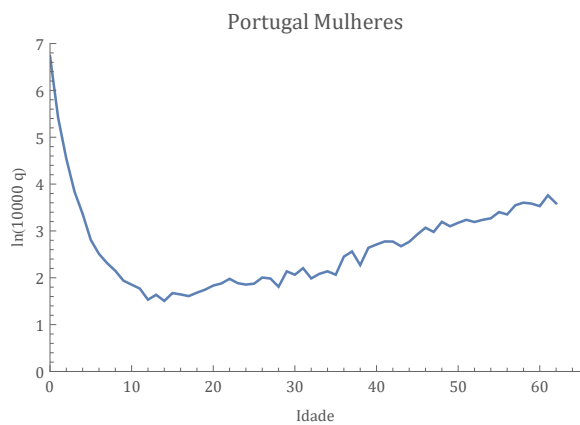
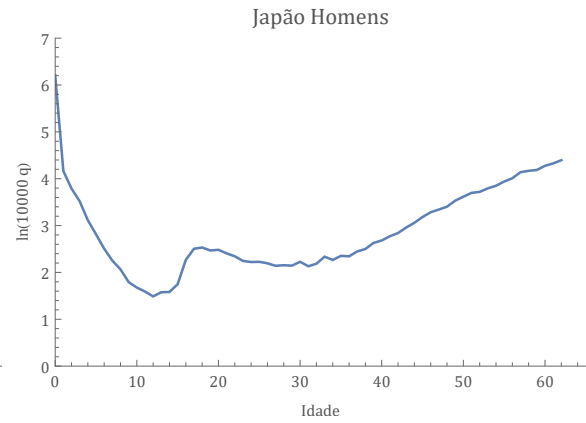
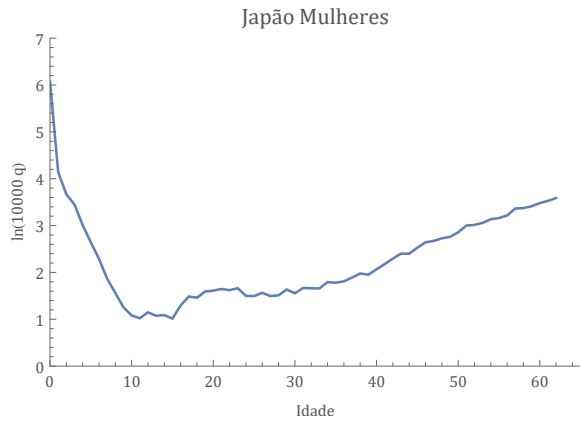
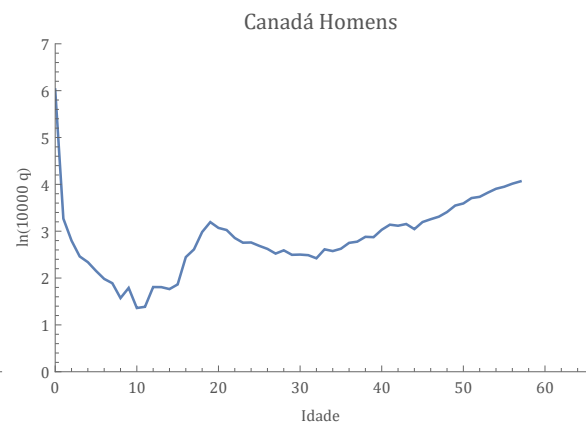
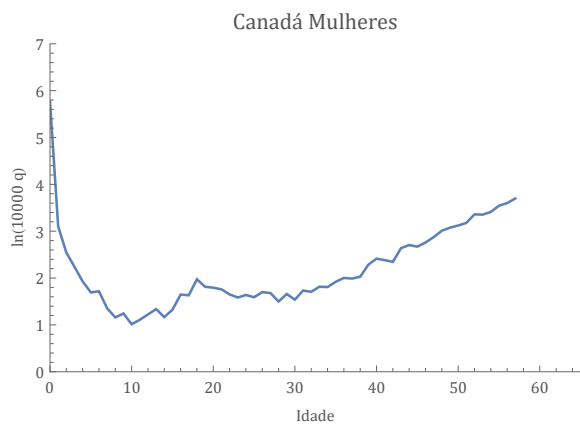
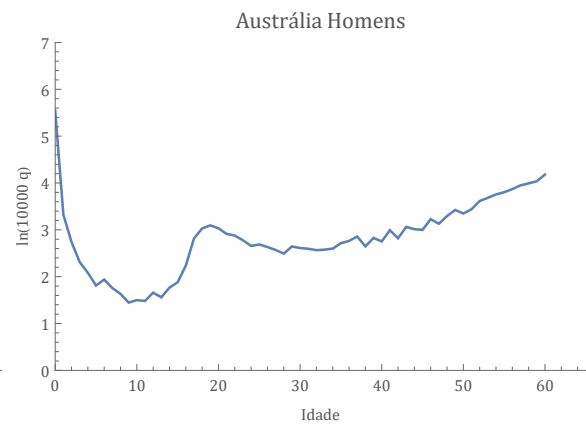
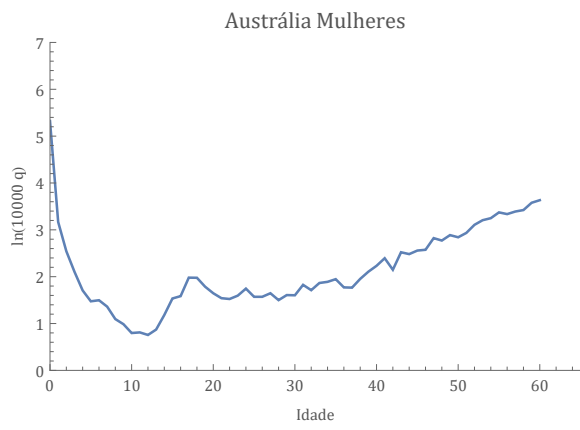
Optou-se por dois países europeus, Portugal e Suécia, para ilustrar as diferenças entre o norte e o sul da Europa.

Os dados utilizados foram recolhidos na base de dados HMD, Wilmoth e Shkolnikov (2010), ver Anexo A. Para estimar o modelo atrás descrito foi apenas necessário extrair as taxas centrais de mortalidade $m_{x,t}$, relativamente aos países mencionados.

Para o estudo comparado entre os diversos países, optou-se pela coorte nascida em 1953, população que conta atualmente 65 anos de idade, idade que se encontra na vizinhança das idades normais de reforma na maioria dos países. Como já foi referido, faz-se ainda uma comparação adicional para o caso português, confrontando a coorte de 1953 com a de 1963, numa tentativa de aprofundar o conhecimento do que sucede no nosso país.

Na Figura 4.1 são apresentadas as taxas de mortalidade para a coorte de 1953, diferenciadas por género para cada população. Para esta análise a probabilidade de morte foi calculada com base na hipótese clássica de uma distribuição uniforme das mortes ao longo do ano, Equação 2.3. De notar que os gráficos são apresentados à escala logarítmica para uma melhor visualização.

4. ESTUDO COMPARADO



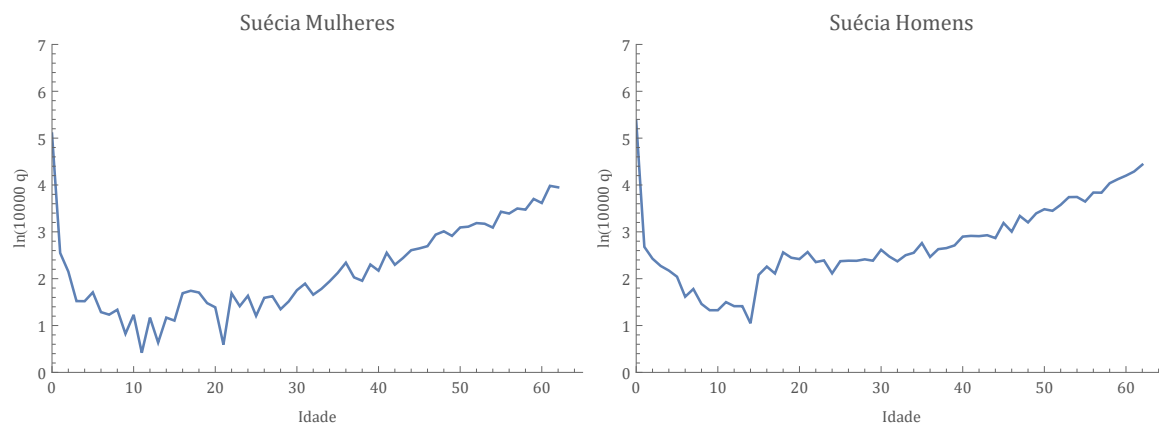


Figura 4.1: Probabilidade de morte observada

Analisando a Figura 4.1 pode concluir-se que, como esperado, as probabilidades de morte das mulheres são inferiores às correspondentes probabilidades de morte nos homens, em todos os países.

Pode também concluir-se que as taxas de mortalidade mais reduzidas, excetuando as idades iniciais, se encontram no Japão, e que as mais elevadas, no conjunto destes cinco países, são as da população portuguesa.

De notar que a probabilidade de morte é naturalmente crescente, com exceção das idades iniciais e da mortalidade "adolescente", visível nos *humps* existentes nos gráficos, e que é mais acentuada no género masculino do que no género feminino, ocorrendo maioritariamente entre os 18 e 20 anos.

4.2 Parâmetros e Estimação

Para a minimização da soma ponderada dos erros quadrados, Equação 3.4, foi aplicada a metodologia descrita no capítulo anterior, tendo sido utilizado o software *Wolfram Mathematica*, recorrendo para a minimização ao algoritmo *Hooke Jeeves*.

Os parâmetros estimados são apresentados na Tabela 4.1, bem como o mínimo obtido pela Equação 3.4, e o coeficiente de determinação recorrendo à Equação 3.5, para fornecer uma medida para a qualidade do ajustamento do modelo.

Deve salientar-se que foram considerados no período de desenvolvimento quatro estados, conforme Su e Sherris (2012), e que para o género masculino, também com

base neste dois autores, decidiu considerar-se dois parâmetros de desenvolvimento especiais, para modelar a maior proeminência da mortalidade "adolescente" nos homens. No caso das mulheres, a maioria dos países estudados não apresenta uma mortalidade "adolescente" acentuada, pelo que se optou pelos parâmetros base. De notar que se considerou $n=150$, visto que este cenário demonstrou uma boa adequação aos dados.

Relativamente à minimização da soma ponderada dos quadrados dos erros, verifica-se que os resultados são da mesma ordem de grandeza para todas as populações, podendo concluir-se que os ajustamentos são aceitáveis em todos os casos.

		Austrália		Canadá	
		Mulheres	Homens	Mulheres	Homens
Parâmetros Gerais	λ	0,8498242	0,9279219	0,8279883	1,0008396
	α	0,0000400	0,0000500	0,0000400	0,0000750
	β	0,0815469	0,0809922	0,0843789	0,0760286
	γ	0,0001535	0,0002300	0,0003000	-0,0000236
Parâmetros Desenvolvimento	λ_1	4,2769531	5,4727578	6,0173828	2,8852099
	q_1	0,0854141	0,0000000	0,1860000	0,1306930
	λ_2	0,7299434	6,0556484	0,7140742	0,9027960
	q_2	0,0000000	0,1545000	0,0030000	0,0000000
	λ_3	1,5639004	3,6531797	4,5184414	0,9024525
	q_3	0,0092930	0,0000000	0,0000000	0,0000000
	λ_4	0,7550605	0,5057500	1,6492500	0,5640597
	q_4	0,0000000	0,0035000	0,0040000	0,0037441
Parâmetros Desenvolvimento Especiais	Período 2	N/A	(14, 17)	N/A	(11, 17)
	γ_2	N/A	-0,0002614	N/A	0,0001318
	Período 3	N/A	(18, 28)	N/A	(18, 28)
	γ_3	N/A	0,0020047	N/A	0,0019963
Mínimos Quadrados		0,0000012	0,0000027	0,0000021	0,0000030
R^2		0,9972040	0,9926180	0,9979580	0,9944470

		Japão		Portugal		Suécia	
		Mulheres	Homens	Mulheres	Homens	Mulheres	Homens
Parâmetros Gerais	λ	0,8661328	0,9067966	0,9756689	0,9615332	0,9420000	1,0501500
	α	0,0000400	0,0000740	0,0000400	0,0000400	0,0000400	0,0000500
	β	0,0790859	0,0801301	0,0747964	0,0903359	0,0750000	0,0710000
	γ	0,0001247	0,0000417	0,0003732	0,0009836	0,0001300	0,0003000
Parâmetros Desenvolvimento	λ_1	4,6453320	2,7075732	4,2367432	3,6232910	13,7700000	9,9600000
	q_1	0,1863906	0,1466109	0,2049331	0,2749648	0,1840000	0,1860000
	λ_2	6,2702852	1,4501905	1,5886958	5,9414668	15,9398000	84,9378000
	q_2	0,0031531	0,0000000	0,0824067	0,0480195	0,0010000	0,0030000
	λ_3	0,0628979	1,2739369	0,5755459	4,3411465	1,0600000	10,4160000
	q_3	0,0084141	0,0036133	0,0184482	0,0662754	0,0050000	0,0090000
	λ_4	0,4671699	0,4155245	0,8540962	0,8275703	7,6540000	0,8778000
	q_4	0,0045859	0,0068770	0,0000000	0,0401328	0,0040000	0,0040000
Parâmetros Desenvolvimento Especiais	Período 2	N/A	(12, 16)	N/A	(14, 18)	N/A	(14, 18)
	γ_2	N/A	-0,0000635	N/A	-0,0000930	N/A	0,0000015
	Período 3	N/A	(17, 23)	N/A	(19, 28)	N/A	(19, 24)
	γ_3	N/A	0,0016057	N/A	0,0020066	N/A	0,0018100
Mínimos Quadrados		0,0000005	0,0000019	0,0000010	0,0000023	0,0000043	0,0000198
R^2		0,9995830	0,9986320	0,9991010	0,9959720	0,9870530	0,9879500

Tabela 4.1: Parâmetros estimados

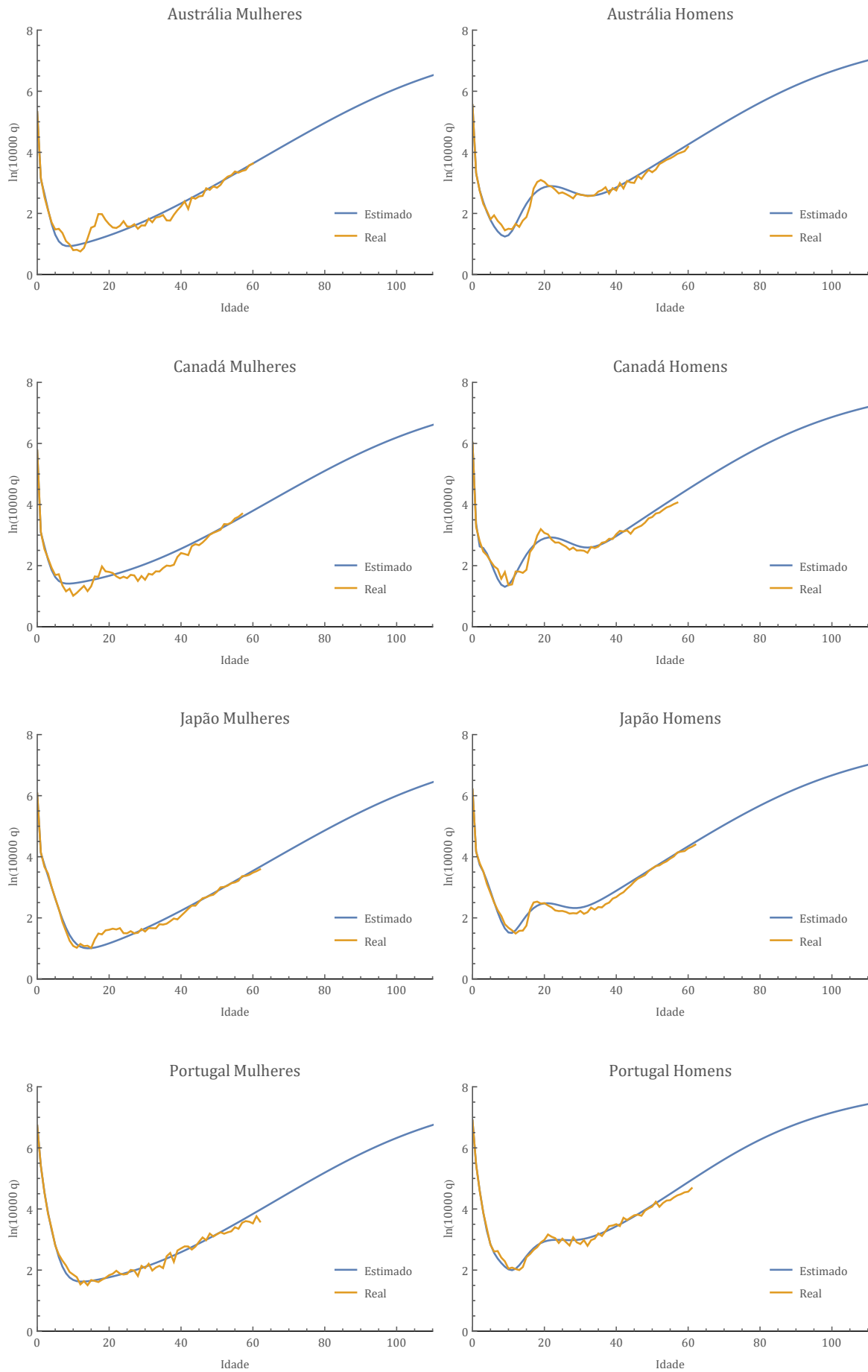
Na Figura 4.2 confrontam-se as probabilidades de morte observadas com as probabilidades de morte estimadas pelo modelo. As conclusões a que se chegou da apreciação do coeficiente de determinação são agora visualizadas graficamente nesta figura: os ajustamentos são muito aceitáveis.

Verifica-se que as probabilidades de morte estimadas mantêm o padrão observado, mesmo nos períodos de maiores oscilações, como sejam os primeiros anos de vida e o período da maior mortalidade na adolescência. Relativamente a este, o *hump* surge em torno dos vinte anos, mais evidente, como já referido, no género masculino, sendo mais pronunciado na Austrália e no Canadá, onde até para as mulheres os picos são maiores do que os dos restantes países para esse género.

Ainda na Figura 4.2 pode ver-se a projeção das probabilidades de morte para os anos futuros, com base nos parâmetros estimados para as coortes e géneros em causa. Como expectável, apresentam valores crescentes com a idade, sendo também o seu comportamento semelhante nos cinco países em estudo. Sendo de notar, mais uma vez, os valores superiores nas taxas de mortalidade futuras no caso masculino, ainda que para as idades mais avançadas tendem a aproximar-se dos valores do género feminino.

Repare-se que nos dois países que representam o continente europeu o comportamento da mortalidade é semelhante, ainda que as taxas sejam superiores em Portugal. A mortalidade "adolescente" situa-se entre os 18 e os 20 anos de idade, tendo pouca relevância no género feminino, principalmente na população portuguesa.

4. ESTUDO COMPARADO



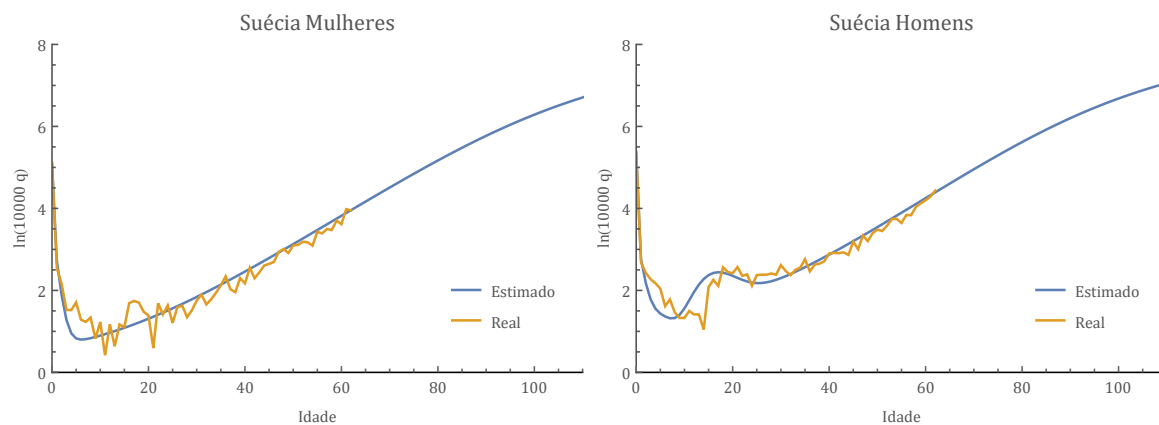
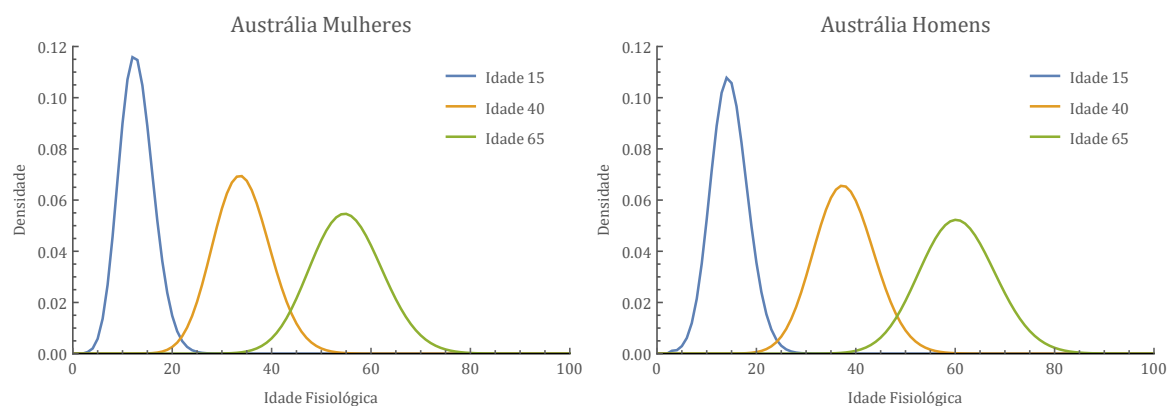


Figura 4.2: Probabilidade de morte observada vs. estimada

4.3 Heterogeneidade

O estudo da heterogeneidade entre os países em estudo e entre várias idades dentro do mesmo país, foi realizado através da análise da função de distribuição da idade fisiológica para cada idade real, ver Equação 3.3.

Observando a função de distribuição da idade fisiológica, pode concluir-se que, quanto menos dispersa esta for em torno do seu "eixo central", mais homogênea é a população. Esta função fornece ainda informação relativamente a como se distribui a idade fisiológica que corresponde a uma dada idade real, na população em análise, analisando para esse efeito onde se situa uma maior concentração da distribuição da idade fisiológica para a idade real que se pretenda analisar.



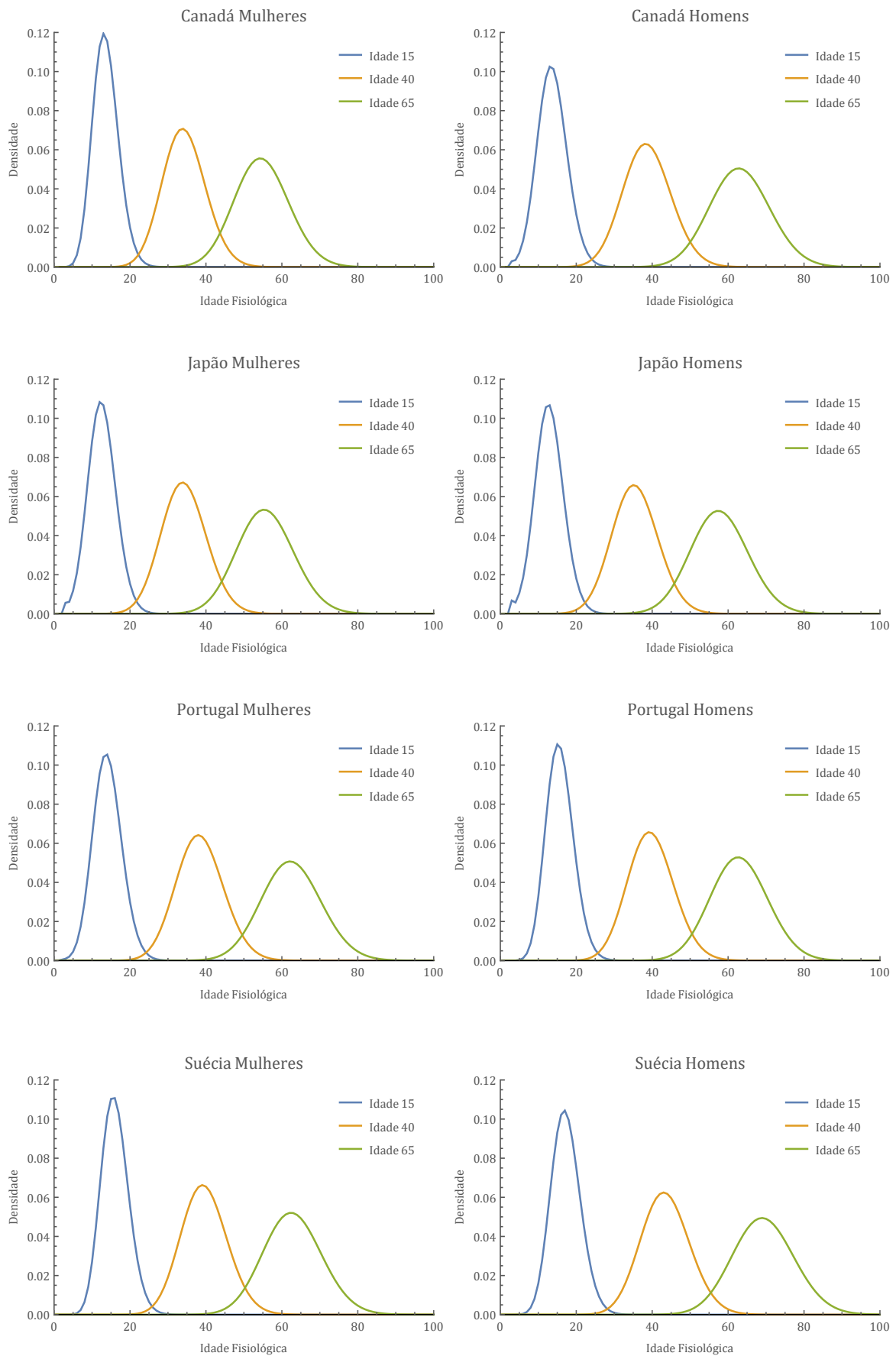


Figura 4.3: Distribuição da idade fisiológica, nas idades 15, 40 e 65

Na Figura 4.3 é apresentada a função densidade para cada país e género, para as idades 15, 40 e 65, recorrendo à Equação 3.3. É possível observar que, para todos os países em estudo, a heterogeneidade aumenta com o avançar da idade. Esta conclusão prende-se com o facto da distribuição da idade fisiológica ser mais dispersa para idades superiores.

Considerando a idade 15, é possível retirar a informação de que, para esta idade real, a maior parte dos indivíduos tem idade fisiológica entre os 10 e os 20 anos. Já para as pessoas com 65 anos, a idade fisiológica da maior parte dos indivíduos vai dos 50 aos 80 anos. Assim, as populações mais envelhecidas, de acordo com a abordagem da idade fisiológica, evidenciam a presença de maior heterogeneidade.

Embora estes resultados estejam perfeitamente alinhados com os obtidos por Su e Sherris (2012), a verdade é que, tal como aconteceu neste trabalho, relativamente à Austrália, também para Portugal a abordagem aqui realizada com o modelo *Markov Aging* conduz a resultados contraditórios com os que se obtiveram utilizando a abordagem pela fragilidade, ver Ferreira (2015). E tudo leva a crer que o mesmo deve acontecer com os restantes países, o que não deixa de ser paradoxal, uma vez que ambas as abordagens, do ponto de vista teórico, fornecem perspetivas razoáveis sobre o problema.

Comparando a heterogeneidade entre géneros, percebe-se que, em geral, os homens evidenciam maior heterogeneidade do que as mulheres. Em Portugal isto não acontece, contudo poderá tratar-se de um ano atípico, ver Secção 4.4.

Também se vê que, com o avançar da idade, as diferenças entre as idades fisiológicas de homens e mulheres com a mesma idade real tendem a aumentar, sendo inferiores nas mulheres, o que faz sentido quando se sabe que as mulheres têm taxas de mortalidade mais baixas e, conseqüentemente, uma maior esperança de vida em todas as idades.

Tomando como exemplo o Canadá e a idade de 65 anos, conclui-se que as idades fisiológicas dos homens se concentram no intervalo dos 60 aos 70 anos, enquanto as das mulheres estão concentradas entre os 50 e os 60. Quer dizer, enquanto a idade

fisiológica no caso masculino se aproxima da idade real, no caso feminino encontra-se significativamente abaixo, pois as mulheres canadianas têm uma longevidade superior à dos homens. Esta conclusão é também verdadeira para os restantes países.

Os países onde se verifica uma diferença positiva entre a idade fisiológica e a idade real mais acentuada são os dois países europeus. O país que apresenta uma diferença negativa mais acentuada é o Japão. Isto significa que, em geral, na população portuguesa e na população sueca a idade fisiológica é superior à idade real, enquanto no Japão acontece o inverso. Contudo estas diferenças não são significativas entre as populações em estudo, pelo que se pode concluir que em geral os cinco países apresentam uma heterogeneidade semelhante.

As conclusões deste trabalho assemelham-se às conclusões de Su e Sherris (2012).

4.4 Caso Português

Nesta secção, de certa forma um pouco acessória relativamente ao objetivo principal do trabalho, é apresentado um estudo comparado da heterogeneidade da população portuguesa nascida em 1953, já abordada anteriormente na comparação entre países, e a da população portuguesa nascida dez anos depois, para se ter uma ideia da evolução ocorrida.

Os dados da coorte de 1963 foram, à semelhança dos anteriores, retirados da base de dados HMD, Wilmoth e Shkolnikov (2010), ver Anexo A. As probabilidades de morte observadas estão na Figura 4.4, evidenciando um comportamento de acordo com o esperado. Sendo de salientar que, mais uma vez, a mortalidade "adolescente" na população portuguesa não tem expressão no género feminino, sendo que a do género masculino se mantém idêntica à da coorte de 1953.

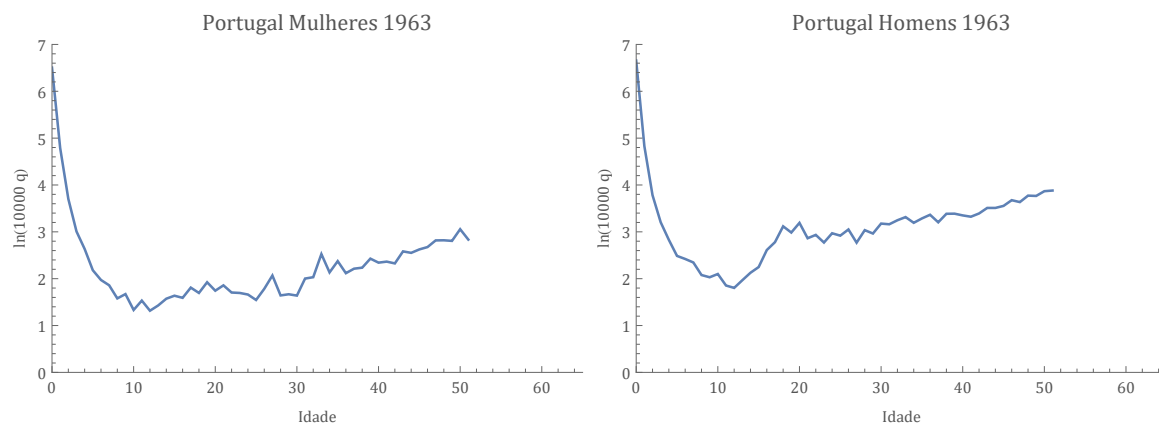


Figura 4.4: Probabilidade de morte observada - Portugal 1963

Na Tabela 4.2, análoga à Tabela 4.1, figuram os parâmetros estimados, o mínimo da soma ponderada dos erros quadrados e o coeficiente de determinação. Foi aqui, também utilizado, para o caso masculino os dois parâmetros de desenvolvimento especiais. Da mesma forma, e semelhante à Figura 4.2 são apresentadas na Figura 4.5 as taxas de mortalidade observadas comparativamente às taxas e mortalidade estimadas para a coorte de 1963 da população portuguesa, sendo ainda nestes gráficos apresentadas as projeções futuras do comportamento da mortalidade, para ambos os géneros.

		Portugal 1963	
		Mulheres	Homens
Parâmetros Gerais	λ	0,8661328	0,9067966
	α	0,0000400	0,0000740
	β	0,0790859	0,0801301
	γ	0,0001247	0,0000417
Parâmetros Desenvolvimento	λ_1	4,6453320	2,7075732
	q_1	0,1863906	0,1466109
	λ_2	6,2702852	1,4501905
	q_2	0,0031531	0,0000000
	λ_3	0,0628979	1,2739369
	q_3	0,0084141	0,0036133
	λ_4	0,4671699	0,4155245
	q_4	0,0045859	0,0068770
Parâmetros Desenvolvimento Especiais	Período 2	N/A	(13, 17)
	γ_2	N/A	-0,0000635
	Período 3	N/A	(18, 28)
	γ_3	N/A	0,0016057
Mínimos Quadrados		0,0000007	0,0000023
R^2		0,9983650	0,9986410

Tabela 4.2: Parâmetros estimados - Portugal 1963

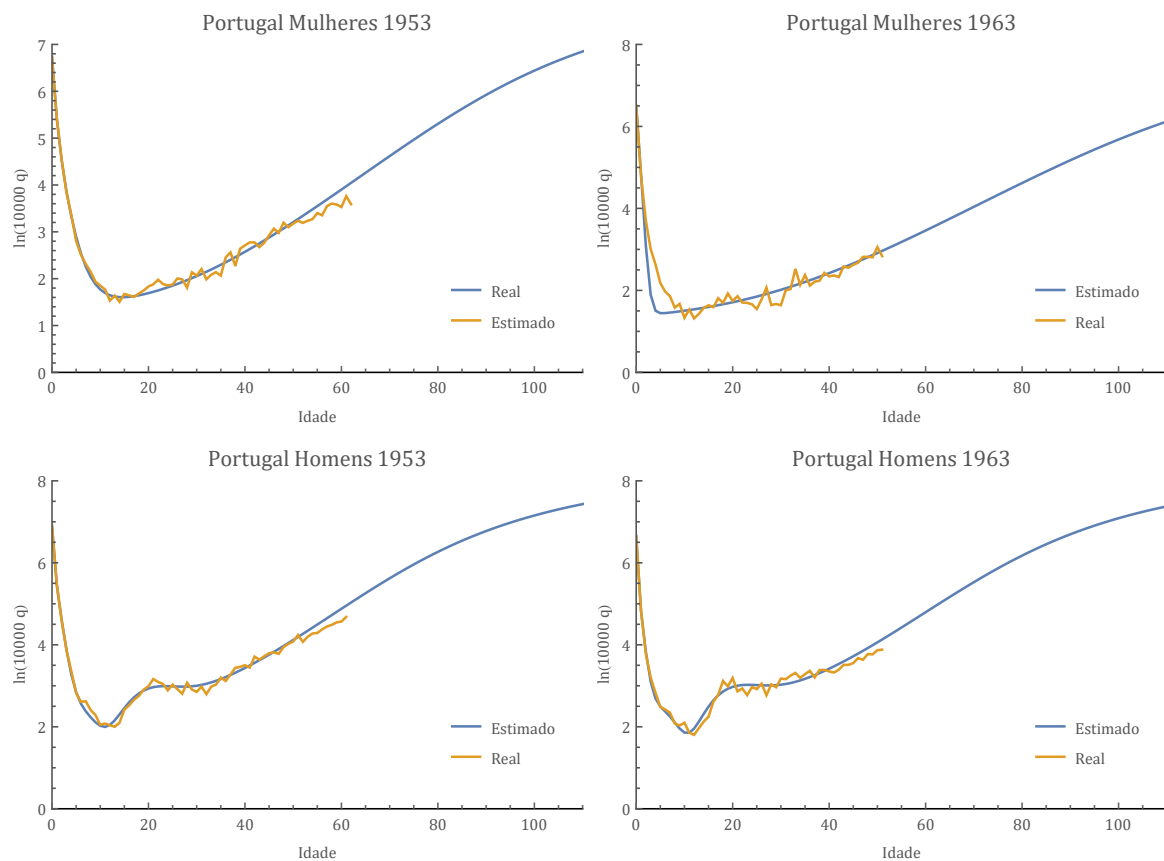


Figura 4.5: Probabilidade de morte observada vs. estimada - Portugal 1953, 1963

Pela análise da Figura 4.5 e do coeficiente de determinação da Tabela 4.2 constata-se que os ajustamentos, como seria desejável, replicam a similaridade dos padrões de mortalidade já detetada nas observações. A projeção da mortalidade futura é também idêntica nos dois anos em estudo, se bem que se note que o ligeiro decréscimo das taxas de mortalidade no género feminino se repercutem, ainda que também de forma leve, a esse nível.

No que respeita à evolução da heterogeneidade da mortalidade no nosso país, entre os nascidos em 1953 e os nascidos em 1963, a Figura 4.6 é muito elucidativa, comparando a distribuição da idade fisiológica para os dois anos em estudo e para ambos os géneros, sendo visíveis as alterações ocorridas durante essa década.

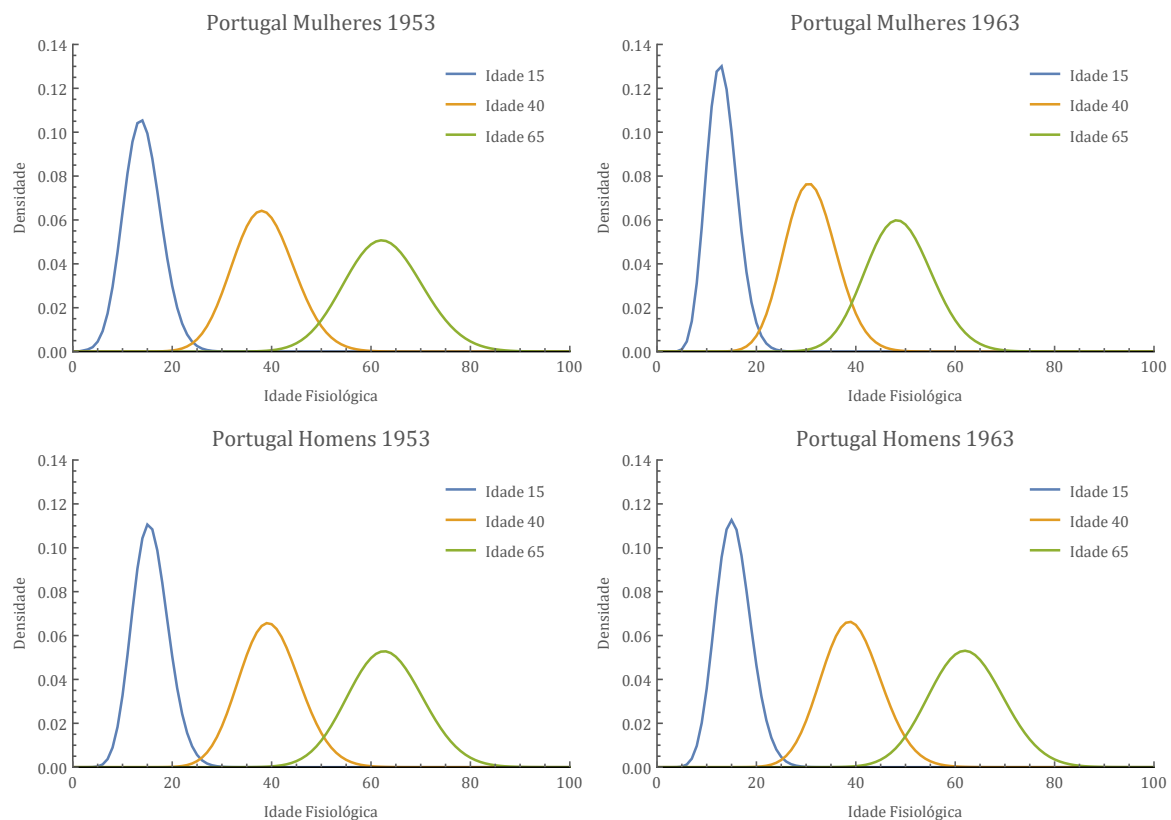


Figura 4.6: Distribuição da idade fisiológica, nas idades 15, 40 e 65 Portugal 1953, 1963

Com efeito, pode concluir-se que, relativamente à população masculina, as alterações são muito pouco pronunciadas. Já no caso da população feminina, as diferenças são notáveis. Esta população tornou-se mais homogénea durante a época em estudo, sendo possível observar no gráfico "Portugal Mulheres 1963" da Figura 4.6, que a distribuição da idade fisiológica se encontra agora muito mais concentrada do que no gráfico "Portugal Mulheres 1953" da mesma figura. Esta evolução vem colocar Portugal no padrão que já se havia notado para os outros quatro países, uma década antes, o que não deixa de ser significativo.

Cumulativamente, é possível observar também que, para idades reais mais avançadas, a idade fisiológica da população em estudo diminuiu, redução mais evidente também no género feminino. Embora expectável, pelo que se sabe relativamente aos ganhos da mortalidade no nosso país, não deixa de ser um aspeto muito positivo, que deve ser sublinhado.

Capítulo 5

Conclusão

Este trabalho centra-se essencialmente no estudo e desenvolvimento do modelo *Markov Aging*, no seguimento de Lin e Liu (2007) e, mais concretamente, de Su e Sherris (2012). O principal objetivo traçado foi assim, estudar e aplicar o modelo em questão, para tentar compreender melhor o fenómeno da mortalidade e projetar o seu comportamento no futuro, dando particular atenção à questão da heterogeneidade. Cinco países foram escolhidos para o estudo comparado que se desenvolveu: Austrália, Canadá, Japão, Portugal e Suécia.

A consideração da heterogeneidade é cada vez mais um aspeto importante quando se tem em vista a maior precisão e adequabilidade dos modelos atuariais que é necessário utilizar. Assim, e seguindo a metodologia descrita por Su e Sherris (2012), foram estudadas as populações já mencionadas, escolhendo especificamente a coorte nascida no ano de 1953, em cada uma delas. Adicionalmente, no caso de Portugal, foi feita a comparação com a coorte nascida uma década depois. Os dados foram retirados da base de dados HMD, Wilmoth e Shkolnikov (2010).

Estimando os parâmetros necessários ao modelo, e tomando em consideração as particularidades associadas a cada um dos dois géneros, foi possível concluir que o modelo *Markov Aging* se adequa aos casos em estudo, mesmo para a população nascida em 1963, relativamente à qual existe menos uma década de informação observada.

A constatação mais imediata é a de que, entre os países em estudo, aquele que apresenta taxas de mortalidade mais baixas é o Japão e o que apresenta taxas mais

elevadas é Portugal. Apesar destas diferenças, deve salientar-se que a projeção da mortalidade futura é bastante semelhante nos cinco países analisados, o que evidencia uma certa convergência no que diz respeito a este fenómeno.

Outro aspeto notório (e expetável) é a observação de que a mortalidade "adolescente" é mais elevada nos homens do que nas mulheres, o que levou à introdução de dois parâmetros adicionais na estimação do modelo para o género masculino. Contudo, no caso das mulheres australianas e canadianas, a mortalidade "adolescente" também tem alguma relevância. No entanto, para uma melhor comparabilidade, utilizou - se com estas o mesmo princípio que foi adotado para as mulheres dos outros países, não tendo sido incluídos parâmetros adicionais.

Relativamente à heterogeneidade, recorreu-se à função de distribuição da idade fisiológica, com a finalidade de analisar como esta se relaciona com a idade real e concluir daí sobre a existência de heterogeneidade. A conclusão mais significativa foi a de que a heterogeneidade aumenta com o avançar da idade, conclusão idêntica à de Su e Sherris (2012). E, como se esperava pelos resultados obtidos para a população australianas no trabalho de Su e Sherris (2012), também as conclusões aqui obtidas para a população portuguesa são contrárias às obtidas por Ferreira (2015), com o modelo de fragilidade, o que não deixa de ser paradoxal, uma vez que do ponto de vista teórico as duas vias de aproximação ao problema estão devidamente fundamentadas.

Numa análise à distribuição da idade fisiológica por géneros, verifica-se também que a heterogeneidade nas mulheres é inferior à evidenciada nos homens, principalmente com o avançar da idade. Mais ainda, é possível perceber, para cada idade real, quais são as idades fisiológicas com maior densidade de probabilidade. Como esperado, conclui-se que estas idades são mais baixas para as mulheres do que para os homens com a mesma idade real.

Passando à análise da distribuição da idade fisiológica por países, conclui-se que as situações menos favoráveis se encontram nos dois países europeus e a mais favorável é a situação japonesa. As diferenças entre os cinco países não são, contudo, acentuadas.

No que diz respeito ao aprofundamento do caso português, pode constatar-se que

o comportamento da mortalidade da coorte de 1963 é para o género masculino idêntico ao da coorte de 1953. Quanto às mulheres, a coorte de 1963 apresenta uma melhoria nas taxas de mortalidade, no alinhamento do que se observa com as mulheres dos outros países, na coorte de 1953. O mesmo se passa com a projeção da mortalidade futura.

Comparando a heterogeneidade na população portuguesa nascida em 1953 com a existente na população nascida em 1963, os resultados são bastante interessantes no caso feminino, com melhoria pronunciada nas idades fisiológicas das mulheres, na década em estudo. Relativamente aos homens, não há a este nível progresso assinalável. Esta situação faz com que os resultados obtidos para a coorte de 1963 sejam mais similares aos resultados constatados para os outros países, com as coortes de 1953, evidenciando uma certa convergência.

Em síntese, concluí-se que a heterogeneidade é significativa nas populações em estudo, tende a aumentar com a idade e apresenta contornos diferentes entre géneros. Estes factos são de grande relevância no âmbito do atuariado vida, e nos modelos pelos quais este se rege.

Relativamente a trabalhos futuros no campo da heterogeneidade, seria interessante aplicar o modelo a uma população africana, o que não se pôde fazer aqui, por diversas razões. Outro desafio seria tentar resolver o paradoxo que surge das conclusões contraditórias a que conduzem a abordagem pelo modelo de fragilidade e a abordagem segundo o modelo *Markov Aging*.

Bibliografia

- Dickson, D. C., M. Hardy, M. R. Hardy e H. R. Waters (2013). *Actuarial mathematics for life contingent risks*. Cambridge University Press.
- Ferreira, R. (2015). “Estudo da Homogeneidade nas Taxas de Mortalidade da População Portuguesa”. *Tese de Mestrado em Ciências Atuariais*. Instituto Superior de Economia e Gestão - Universidade de Lisboa.
- Garcia, J. A. e O. Simões (2010). “Matemática Actuarial-Vida e Pensões”. *Editores Almedina*.
- Govorun, M., G. Latouche e S. Loisel (2014). “Phase-type aging modeling for health dependent costs”.
- Hooke, R. e T. A. Jeeves (1961). ““Direct Search” Solution of Numerical and Statistical Problems”. *Journal of the ACM (JACM)* 8(2), pp. 212–229.
- Instituto Nacional de Estatística. URL: <http://ine.pt>.
- Lin, X. S. e X. Liu (2007). “Markov aging process and phase-type law of mortality”. *North American Actuarial Journal* 11(4), pp. 92–109.
- Mourão, C., L. Pinto, O. Simões, J. Valente e M. Pato (2011). “Investigação Operacional: Exercícios e Aplicações”. *Verlag Dashöfer*.
- Neuts, M. F. (1981). “Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach”. *Johns Hopkins University, Baltimore*.
- Perryman, F. S. (1914). “International Actuarial Notation”.
- Ross, S. M. (2014). *Introduction to probability models*. Academic press.

- Su, S. e M. Sherris (2012). "Heterogeneity of Australian population mortality and implications for a viable life annuity market". *Insurance: Mathematics and Economics* 51(2), pp. 322–332.
- Vaupel, J. W., K. G. Manton e E. Stallard (1979). "The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality". *Demography* 16(3), pp. 439–454.
- Wilmoth, J. R. e V. Shkolnikov (2010). "Human mortality database". *University of California*.

Apêndice A

Dados HMD

Neste apêndice são apresentados os dados utilizados das taxas centrais de mortalidade m_x , retirados da base de dados HMD, para a coorte de 1953 e para os países selecionados para o estudo efetuado nesta dissertação:

- Austrália
- Canadá
- Japão
- Portugal
- Suécia

No caso português, uma vez que foi também estudada a coorte de 1963, são também apresentados os dados para a mesma nas seguintes páginas.

Idade	Austrália		Canadá		Japão	
	Mulheres	Homens	Mulheres	Homens	Mulheres	Homens
0	0,020693	0,025969	0,032492	0,042212	0,044339	0,050800
1	0,002378	0,002777	0,002226	0,002629	0,006307	0,006445
2	0,001273	0,001551	0,001273	0,001644	0,003936	0,004434
3	0,000820	0,001009	0,000940	0,001173	0,003150	0,003380
4	0,000551	0,000804	0,000688	0,001038	0,002033	0,002253
5	0,000437	0,000612	0,000544	0,000861	0,001406	0,001667
6	0,000447	0,000695	0,000557	0,000726	0,000989	0,001227
7	0,000390	0,000580	0,000387	0,000662	0,000647	0,000951
8	0,000299	0,000512	0,000319	0,000482	0,000477	0,000789
9	0,000268	0,000425	0,000347	0,000599	0,000351	0,000601
10	0,000222	0,000448	0,000276	0,000390	0,000295	0,000535
11	0,000225	0,000440	0,000303	0,000400	0,000278	0,000491
12	0,000213	0,000526	0,000340	0,000610	0,000315	0,000443
13	0,000239	0,000476	0,000381	0,000609	0,000293	0,000484
14	0,000326	0,000585	0,000321	0,000584	0,000297	0,000487
15	0,000464	0,000656	0,000376	0,000645	0,000276	0,000574
16	0,000488	0,000937	0,000519	0,001156	0,000365	0,000966
17	0,000724	0,001670	0,000512	0,001363	0,000442	0,001225
18	0,000722	0,002071	0,000720	0,001976	0,000431	0,001258
19	0,000597	0,002212	0,000613	0,002442	0,000491	0,001181
20	0,000519	0,002079	0,000602	0,002157	0,000501	0,001198
21	0,000467	0,001843	0,000581	0,002062	0,000519	0,001110
22	0,000459	0,001780	0,000521	0,001739	0,000506	0,001043
23	0,000493	0,001608	0,000488	0,001573	0,000528	0,000945
24	0,000573	0,001425	0,000515	0,001580	0,000448	0,000923
25	0,000481	0,001471	0,000491	0,001470	0,000446	0,000927
26	0,000481	0,001393	0,000547	0,001378	0,000478	0,000898
27	0,000519	0,001307	0,000537	0,001246	0,000446	0,000851
28	0,000448	0,001210	0,000448	0,001336	0,000453	0,000862
29	0,000499	0,001409	0,000526	0,001214	0,000513	0,000854
30	0,000497	0,001363	0,000466	0,001220	0,000473	0,000928
31	0,000621	0,001342	0,000566	0,001205	0,000530	0,000843
32	0,000554	0,001303	0,000551	0,001127	0,000527	0,000890
33	0,000646	0,001316	0,000614	0,001365	0,000525	0,001034
34	0,000662	0,001346	0,000610	0,001315	0,000601	0,000964
35	0,000701	0,001512	0,000682	0,001382	0,000593	0,001053
36	0,000588	0,001586	0,000741	0,001567	0,000611	0,001042
37	0,000585	0,001743	0,000731	0,001608	0,000662	0,001157
38	0,000705	0,001411	0,000760	0,001783	0,000723	0,001219
39	0,000822	0,001693	0,000984	0,001770	0,000704	0,001388
40	0,000932	0,001569	0,001118	0,002073	0,000790	0,001461
41	0,001096	0,001995	0,001084	0,002311	0,000883	0,001601
42	0,000857	0,001678	0,001044	0,002260	0,000993	0,001713
43	0,001245	0,002142	0,001400	0,002344	0,001104	0,001929
44	0,001197	0,002038	0,001495	0,002102	0,001102	0,002134
45	0,001291	0,002009	0,001446	0,002445	0,001254	0,002414
46	0,001313	0,002525	0,001579	0,002597	0,001405	0,002672
47	0,001684	0,002289	0,001772	0,002742	0,001449	0,002832
48	0,001599	0,002696	0,002031	0,003028	0,001531	0,003013
49	0,001796	0,003075	0,002167	0,003479	0,001578	0,003423
50	0,001715	0,002851	0,002272	0,003638	0,001741	0,003727
51	0,001882	0,003121	0,002400	0,004083	0,002011	0,004043
52	0,002238	0,003722	0,002884	0,004192	0,002040	0,004131
53	0,002470	0,003987	0,002863	0,004584	0,002129	0,004456
54	0,002579	0,004284	0,003036	0,004979	0,002301	0,004711
55	0,002919	0,004492	0,003465	0,005202	0,002363	0,005153
56	0,002814	0,004804	0,003669	0,005553	0,002494	0,005531
57	0,002973	0,005202	0,004046	0,005840	0,002896	0,006295
58	0,003069	0,005430			0,002921	0,006482
59	0,003586	0,005682			0,003035	0,006601
60	0,003789	0,006560			0,003251	0,007216
61					0,003410	0,007597
62					0,003627	0,008137

Tabela A.1: Dados HMD m_x : Coorte 1953: Austrália, Canadá e Japão

Idade	Portugal		Suécia		Portugal 1963	
	Mulheres	Homens	Mulheres	Homens	Mulheres	Homens
0	0,087409	0,025969	0,016486	0,021784	0,069133	0,080807
1	0,022659	0,002777	0,001280	0,001458	0,012089	0,012585
2	0,009420	0,001551	0,000860	0,001133	0,004063	0,004399
3	0,004665	0,001009	0,000458	0,000970	0,002027	0,002467
4	0,002889	0,000804	0,000457	0,000879	0,001394	0,001694
5	0,001656	0,000612	0,000552	0,000771	0,000885	0,001202
6	0,001231	0,000695	0,000362	0,000503	0,000719	0,001126
7	0,001010	0,000580	0,000343	0,000593	0,000642	0,001045
8	0,000858	0,000512	0,000381	0,000431	0,000485	0,000799
9	0,000695	0,000425	0,000228	0,000377	0,000532	0,000762
10	0,000638	0,000448	0,000342	0,000377	0,000379	0,000817
11	0,000587	0,000440	0,000152	0,000448	0,000463	0,000639
12	0,000463	0,000526	0,000322	0,000411	0,000373	0,000607
13	0,000514	0,000476	0,000189	0,000411	0,000417	0,000715
14	0,000451	0,000585	0,000322	0,000285	0,000482	0,000839
15	0,000533	0,000656	0,000302	0,000802	0,000514	0,000947
16	0,000518	0,000937	0,000542	0,000957	0,000491	0,001363
17	0,000500	0,001670	0,000571	0,000826	0,000611	0,001612
18	0,000538	0,002071	0,000550	0,001296	0,000545	0,002262
19	0,000574	0,002212	0,000439	0,001156	0,000685	0,001980
20	0,000626	0,002079	0,000401	0,001123	0,000572	0,002435
21	0,000655	0,001843	0,000181	0,001306	0,000641	0,001753
22	0,000723	0,001780	0,000540	0,001053	0,000550	0,001883
23	0,000659	0,001608	0,000411	0,001092	0,000545	0,001599
24	0,000639	0,001425	0,000513	0,000828	0,000527	0,001950
25	0,000652	0,001471	0,000334	0,001074	0,000469	0,001853
26	0,000743	0,001393	0,000491	0,001085	0,000595	0,002115
27	0,000728	0,001307	0,000508	0,001083	0,000791	0,001595
28	0,000610	0,001210	0,000385	0,001117	0,000517	0,002084
29	0,000848	0,001409	0,000455	0,001085	0,000530	0,001939
30	0,000789	0,001363	0,000578	0,001370	0,000515	0,002398
31	0,000908	0,001342	0,000665	0,001187	0,000741	0,002363
32	0,000729	0,001303	0,000525	0,001070	0,000763	0,002575
33	0,000804	0,001316	0,000594	0,001220	0,001250	0,002755
34	0,000849	0,001346	0,000698	0,001285	0,000845	0,002438
35	0,000789	0,001512	0,000836	0,001581	0,001075	0,002676
36	0,001162	0,001586	0,001040	0,001176	0,000831	0,002896
37	0,001296	0,001743	0,000760	0,001389	0,000915	0,002464
38	0,000969	0,001411	0,000707	0,001420	0,000935	0,002956
39	0,001402	0,001693	0,001000	0,001504	0,001134	0,002964
40	0,001505	0,001569	0,000877	0,001816	0,001041	0,002856
41	0,001606	0,001995	0,001285	0,001844	0,001064	0,002777
42	0,001603	0,001678	0,000995	0,001833	0,001024	0,002977
43	0,001450	0,002142	0,001150	0,001870	0,001324	0,003351
44	0,001593	0,002038	0,001358	0,001759	0,001283	0,003350
45	0,001867	0,002009	0,001411	0,002429	0,001381	0,003500
46	0,002152	0,002525	0,001480	0,002018	0,001452	0,003955
47	0,001967	0,002289	0,001894	0,002823	0,001674	0,003797
48	0,002443	0,002696	0,002032	0,002459	0,001678	0,004359
49	0,002220	0,003075	0,001844	0,002983	0,001657	0,004331
50	0,002392	0,002851	0,002208	0,003260	0,002127	0,004793
51	0,002550	0,003121	0,002245	0,003151	0,001703	0,004861
52	0,002434	0,003722	0,002423	0,003582		
53	0,002549	0,003987	0,002390	0,004222		
54	0,002633	0,004284	0,002202	0,004235		
55	0,003007	0,004492	0,003090	0,003839		
56	0,002860	0,004804	0,002973	0,004656		
57	0,003480	0,005202	0,003310	0,004643		
58	0,003679	0,005430	0,003231	0,005682		
59	0,003604	0,005682	0,004062	0,006197		
60	0,003414	0,006560	0,003723	0,006687		
61	0,004306		0,005375	0,007309		
62			0,005206	0,008458		

Tabela A.2: Dados HMD m_x : Coorte 1953: Portugal e Suécia
Coorte 1963: Portugal