



**LISBOA
SCHOOL OF
ECONOMICS &
MANAGEMENT**

MESTRADO

DECISÃO ECONÓMICA E EMPRESARIAL

TRABALHO FINAL DE MESTRADO

TRABALHO DE PROJECTO

**SOLUÇÕES ADMISSÍVEIS PARA O CARP MISTO:
UMA MATHEURÍSTICA**

KARINE ANDRÉ MARTINS

SETEMBRO-2013



**LISBOA
SCHOOL OF
ECONOMICS &
MANAGEMENT**

**MESTRADO EM
DECISÃO ECONÓMICA E EMPRESARIAL**

**TRABALHO FINAL DE MESTRADO
TRABALHO DE PROJECTO**

**SOLUÇÕES ADMISSÍVEIS PARA O CARP MISTO:
UMA MATHEURÍSTICA**

KARINE ANDRÉ MARTINS

ORIENTAÇÃO:

PROFESSORA DOUTORA LEONOR ALMEIDA LEITE SANTIAGO PINTO

SETEMBRO - 2013

Agradecimento

Gostaria de agradecer à Fundação para a Ciência e a Tecnologia pelo financiamento através de uma Bolsa concedida através do projeto SEROW (PTDC/EGE-GES/121406/2010), à minha orientadora, família e amigos.

“Fais de ta vie un rêve, et d’un rêve, une réalité.”

(Antoine de Saint-Exupéry)

Resumo

Trata-se do estudo de um problema de otimização de rotas nos arcos definido num grafo misto. As ligações podem ser tarefas, caso em que requerem serviço, ou apenas constar para assegurar a definição das rotas. Cada ligação tem associado um custo em vazio e, se for tarefa, um custo de serviço e procura. O serviço é efetuado por uma frota homogénea de veículos com uma dada capacidade. Pretende-se determinar um conjunto de rotas, a iniciar e terminar no depósito, compatíveis com a capacidade dos veículos, que assegurem a execução de todas as tarefas com um custo total mínimo. O problema, conhecido pela designação de MCARP (*Mixed Capacitated Arc Routing Problem*), é comprovadamente NP-difícil.

Uma aplicação prática deste problema é a recolha de resíduos sólidos urbanos. A motivação para este trabalho surgiu no âmbito da otimização de rotas para a recolha de resíduos sólidos urbanos no Município do Seixal.

Com o objetivo de determinar soluções admissíveis, apresenta-se uma matheurística em que se alia a resolução de dois modelos compactos a regras heurísticas para a fixação de serviços. Esta pode ser decomposta em três fases: (I) resolução do modelo agregado; (II) afetação de serviços a veículos; (III) resolução do modelo válido no problema de menor dimensão resultante de (II).

O desempenho da matheurística foi avaliado com um conjunto de instâncias habitualmente utilizado para testar heurísticas para o MCARP. Os resultados não foram os mais animadores, pois as instâncias de maior dimensão que simulam casos reais permanecem com um tempo computacional elevado.

Palavras-chave: matheurística, heurística, MCARP.

Summary

This project is regarding a study of a routes optimization problem in the arcs of a mixed graph. The connections may be tasks, in which case require service, or just to be included to ensure the definition of the routes. Each link has an associated deadheaded cost, and, if it is a task, it has a service cost and a demand. The service is performed by a homogeneous fleet of vehicles with a given capacity. It is intended to determine a set of routes, starting and ending in the depot, consistent with the capacity of the vehicles that perform all tasks at a minimum total cost. The problem, known by the designation of MCARP (Mixed Capacitated Arc Routing Problem), is proven to be NP-hard.

A practical application of this problem is the collection of household solid waste. The motivation for this dissertation is the route optimization for the collection of solid waste in the Seixal Municipality.

In order to determine feasible solutions, a matheuristic is presented in which we combine the resolution of two compact models with heuristic rules for services setting. This method can be decomposed into three stages: (I) resolution of the aggregate model; (II) allocation of services to vehicles, (III) resolution of the valid model in the problem of smallest dimension resulting from (II).

The matheuristic performance was evaluated with a set of instances normally used to test MCARP heuristics. The results on the larger instances, that simulate real cases, remain with a high computational time.

Keywords: matheuristic, heuristic, MCARP.

Índice

1. Introdução.....	1
2. MCARP.....	2
2.1. Enquadramento	2
2.2. Estudos anteriores.....	4
2.3. Definição do problema MCARP	6
3. Modelos.....	7
3.1. Modelo válido.....	8
3.2. Modelo agregado	11
4. A matheurística.....	12
4.1. Cálculo de distâncias.....	16
4.2. Seleção dos vértices-semente.....	16
4.3. Seleção das tarefas.....	18
4.3.1. Fixação <i>a priori</i>	18
4.3.2. Fixação <i>a posteriori</i> (FP).....	24
5. Resultados computacionais.....	26
5.1. Instâncias <i>mval</i>	26
5.2. Instâncias <i>lpr</i>	29
6. Conclusão	34
7. Referências bibliográficas.....	36
8. Anexos	38
Anexo A: Algoritmo da matheurística	38
Anexo B: Resultados <i>mval</i>	40
Anexo C: Tempos computacionais <i>mval</i>	41
Anexo D: Tempos computacionais <i>mval</i> – MR.....	42
Anexo E: Resultados <i>lpr</i>	43
Anexo F: Tempos computacionais <i>lpr</i> –RR.....	44
Anexo G: Tempos computacionais <i>lpr</i> –MR.....	45

Índice de ilustrações

Ilustração 1 - Pré-processamento	13
Ilustração 2 - Exemplo	13
Ilustração 3 - Grafo induzido – 1º fase.....	14
Ilustração 4 - 2º fase	14
Ilustração 5 - Solução do exemplo - 3º fase	15
Ilustração 6 - vi e vj	19
Ilustração 7 - Sub-circuito	19
Ilustração 8 - Fixação tarefas 1.....	21
Ilustração 9 - Fixação de tarefas 2.....	22
Ilustração 10 - Fixação de tarefas 3	22
Ilustração 11 – Fixação <i>a priori</i> RR.....	23
Ilustração 12b - Fixação <i>à posteriori</i> em que (a,b) é ligação em vazio	24
Ilustração 13a - Fixação <i>à posteriori</i> em que (a,b) é tarefa.....	24

Índice de Tabelas

Tabela 1 - Características <i>mval</i>	26
Tabela 2 - <i>gap's mval</i>	28
Tabela 3- Características <i>mval</i>	29
Tabela 4 - <i>gap's lpr</i> RR.....	31
Tabela 5 - <i>gap's lpr</i> MR.....	31
Tabela 6 – Valor da solução heurística <i>mval</i>	40
Tabela 7 - Tempos computacionais <i>mval</i> - RR.....	41
Tabela 8 - Tempos computacionais <i>mval</i> - MR.....	42
Tabela 9 - Valor da solução heurística <i>lpr</i> - RR.....	43
Tabela 10 - Valor da solução heurística <i>lpr</i> - MR.....	43
Tabela 11 - Tempos computacionais <i>lpr</i> - RR.....	44
Tabela 12 - Tempos computacionais <i>lpr</i> - MR.....	45

Lista de abreviaturas

ARP	<i>Arc Routing Problem</i>
CARP	<i>Capacitated Arc Routing Problem</i>
CCPP	<i>Capacitated Chinese Postman Problem</i>
CPP	<i>Chinese Postman Problem</i>
FP	<i>Fixação a posteriori</i>
MCARP	<i>Mixed Capacitated Arc Routing Problem</i>
MR	Multi-Rotas
PLI	Programação Linear Inteira
RPP	<i>Rural Postman Problem</i>
RR	Rota a Rota
SARP	<i>Sectoring Arc Routing Problem</i>
TSP	<i>Travelling Salesman Problem</i>

1. Introdução

O presente trabalho tem como objetivo encontrar soluções admissíveis para o problema de roteamento nos arcos definido num grafo misto e conhecido como *Mixed Capacitated Arc Routing Problem* (MCARP).

A motivação para este projeto é a recolha dos resíduos sólidos urbanos no concelho do Seixal. Como o mapa de estradas do Seixal sugere um grafo misto, investiu-se no problema MCARP. O método descrito para o MCARP, com ligeiras alterações, poderá ser utilizado no município do Seixal de forma a determinar um conjunto de rotas para a recolha dos resíduos sólidos urbanos.

Com este propósito, foi desenvolvida uma matheurística composta por três fases. A primeira e a terceira fase da matheurística consistem na resolução exata de dois modelos compactos para o MCARP. Na primeira, trata-se de um modelo agregado capaz de produzir bons limites inferiores para o problema e na terceira de um modelo válido, ambos apresentados em [8]. A maior contribuição do presente trabalho consistiu no teste computacional de diversas propostas para a segunda fase do método apresentado.

Na secção 2 é realizado o enquadramento teórico, incluindo-se estudos anteriores e a definição do problema MCARP. A secção 3 especifica os modelos compactos utilizados. Na secção 4, a matheurística é apresentada discutindo-se as suas diferentes estratégias. Os resultados computacionais estão presentes na secção 5, onde se faz a sua análise e comparação com resultados publicados na literatura. Finalmente, na última secção, conclui-se sobre o estudo feito e são referidas algumas sugestões para trabalho futuro.

2. MCARP

2.1. Enquadramento

Os problemas de roteamento com procura nos arcos, conhecidos como *Arc Routing Problem* (ARP), são problemas cujas tarefas a executar estão localizadas ao longo dos arcos ou das arestas de um grafo. São exemplos de aplicação a recolha de resíduos sólidos urbanos, a remoção de neve em estradas ou a distribuição do correio porta-a-porta.

O estudo de problemas em grafos começa em 1735 quando Euler apresentou uma solução para o *Königsberg bridge problem* [13], conhecido como o *Euler Tour Problem*. Este problema é baseado na cidade de Königsberg que é cortada pelo Rio Prególia, onde existem duas ilhas ligadas entre si e à cidade por sete pontes. Discutia-se nas ruas da cidade sobre a possibilidade de atravessar todas as pontes passando apenas uma vez em cada uma delas e retornar ao ponto de partida. Euler esquematizou a questão representando por retas as pontes e as interseções por pontos, as arestas e os vértices, criando possivelmente o primeiro grafo. O matemático Suíço estabeleceu que uma condição necessária para a existência de um percurso com essas características seria o grafo incluir apenas vértices com grau par. Deste modo, encerrou pela negativa a questão das pontes de Königsberg. Um tal percurso é hoje conhecido pela designação de circuito Euleriano e um grafo que o contenha é um grafo Euleriano. A suficiência da condição só veio a ser provada mais tarde contudo a conjectura foi estabelecida igualmente por Euler.

Em 1962, Guan [9] introduz o *Chinese Postman Problem* (CPP), para determinar o circuito de custo mínimo necessário para percorrer todas as arestas de um grafo pelo menos uma vez. Em 1974, Orloff sugere o *Rural Postman Problem* (RPP) [12],

que tem o mesmo objetivo que o CPP mas agora é obrigatório integrar no circuito apenas um subconjunto de arestas.

As situações reais são mais exigentes do que o CPP. Neste sentido, ao longo dos anos foram desenvolvidos vários estudos sobre problemas ARP incorporando diversas questões suscitadas pelas aplicações.

Os problemas ARP podem ser definidos em grafos orientados, não orientados, ou mistos. Nos grafos mistos, os arcos podem representar ruas de sentido único ou avenidas largas com procura em ambas as direções e as arestas ruas com dois sentidos em que o serviço será efetuado apenas num deles, percorrendo-as em “zig zag”, sendo o custo de serviço independente do sentido. Os ARP's podem também ser classificados consoante o número de veículos (um ou vários), que podem ter ou não capacidade limitada.

O *Capacitated Arc Routing Problem* (CARP), introduzido por Golden e Wong em 1981 [7] é definido num grafo não orientado e os seus veículos têm restrições de capacidade. O objetivo deste problema é encontrar um conjunto de rotas, com partida e chegada no depósito, onde os veículos estão estacionados, que minimize o custo total e execute todas as tarefas, respeitando a capacidade dos veículos. O CARP é NP-Difícil [7] e o seu estudo é muito mais recente.

O MCARP é um problema mais versátil em termos de modelização de aplicações por ser definido num grafo misto. Também é NP-difícil dado incluir o CARP como caso particular.

2.2. Estudos anteriores

Existem vários estudos realizados sobre o problema MCARP. Alguns foram adaptados de algoritmos para o CARP, como os limites inferiores e superiores apresentados por Belenguer et al. [2].

Em [2], os limites inferiores foram obtidos através de um algoritmo de *cutting-plane* e os limites superiores generalizando os algoritmos: *Path-Scanning*, *Augment-Merge* e *Ulusoy's heuristic*.

A primeira, *Path-Scanning*, baseada na heurística para o CARP de Golden et al. [6], constrói sequencialmente uma rota de cada vez e é inspirada na *nearest neighbor heuristic* para o *Travelling Salesman Problem* (TSP) [16]. Cada rota é construída de forma recursiva, adicionando a tarefa mais próxima até a capacidade do veículo estar lotada, através de cinco regras de desempate. É determinada uma solução para cada regra e escolhe-se a melhor das soluções obtidas.

A segunda, *Augment-Merge* [7], começa com uma rota por cada tarefa. As rotas são ordenadas decrescentemente pelo custo. Numa primeira fase, rotas de menor custo são absorvidas por rotas de maior custo que as percorrem em vazio. Numa segunda fase, é ensaiada a junção de pares de rotas, efetuando-se a fusão do par que resulte na maior poupança. O processo é repetido até que não seja possível juntar mais rotas.

Por fim, *Ulusoy's heuristic* [15], de tipo *route-first cluster-second*, começa por desenvolver uma rota gigante que é dividida em rotas que respeitam a restrição de capacidade. Recorre a um algoritmo de *splitting* que, por sua vez, tem por base a identificação de um caminho mais curto. Este constrói um grafo auxiliar em que

cada arco do grafo Euleriano (gigante) dá origem a um vértice e , é ainda incluído o vértice 0, de partida. Cada ligação (i,j) representa o percurso da rota gigante que tem início no depósito, satisfaz todas as tarefas representadas pelos vértices entre i e j e regressa ao depósito. Só são consideradas as ligações (i,j) que não violam a restrição de capacidade. É então calculado o caminho mais curto entre o vértice 0 e o último vértice (que representa, na rota gigante, a última tarefa realizada antes de voltar ao depósito). Este caminho mais curto irá representar a melhor separação da rota gigante.

Mourão e Amado [10], com a motivação de propor rotas para a recolha de resíduos sólidos urbanos em Lisboa, desenvolveram uma heurística para o MCARP. O primeiro passo utiliza o *service direction algorithm* para transformar o grafo num grafo orientado e Euleriano. A partir deste, são formados circuitos que vão sendo agregados até formarem rotas que respeitem a restrição de capacidade. Foi testada com as instâncias utilizadas em Belenguer et al. [2] e, em média, obtém melhores resultados mas em tempos de computação maiores.

Ghiani et al. [5], tendo como aplicação a recolha de resíduos urbanos no sul de Itália, usaram um modelo MCARP, em que as ruas foram divididas por três classes, consoante a respetiva uma hora limite de recolha. Este caso de estudo tem também dois tipos de contentores e veículos com três tipos de capacidade diferentes. Cada tipo de veículo está restrito a determinados contentores e a ruas com determinada classe. Uma heurística, de tipo *cluster-first route-second*, foi aplicada a este caso e reduziu a distância percorrida em 10,6% e o tempo gasto em 13,5%.

Outro trabalho sobre a recolha de resíduos urbanos em Espanha deve-se a Bautista et al. [1]. Neste, foi escrita uma heurística que transforma as ligações em vértices e

constrói um novo grafo orientado onde se passa a pretender resolver um *node routing problem*. Depois, aplicaram-lhe duas heurísticas diferentes a *nearest neighbor heuristic* e a *nearest insertion heuristic*.

Em 2009, Gouveia et al. [8], apresentaram dois modelos compactos. Um modelo é válido para o MCARP e o outro, um modelo agregado, é não válido. Nos testes com as instâncias de Belenguer et al. [2] ressalta a qualidade dos limites inferiores do modelo agregado com um tempo computacional razoável.

2.3. Definição do problema MCARP

No quadro dos problemas de roteamento nos arcos pode definir-se rota como o percurso que um veículo descreve, iniciando e terminando no depósito, para servir um conjunto de ligações, compatível com a sua capacidade.

Nos conceitos seguintes usar-se-á a aplicação para os ajudar a descrever. Nomeadamente, no caso da aplicação presente, serviço significa recolha de resíduos sólidos ao longo da ligação.

Para definir o problema MCARP, usamos um grafo misto $\Gamma = (V, A' \cup E)$. Os vértices de V representam cruzamentos ou becos sem saída. Em A' estão os arcos que representam ruas de sentido único ou avenidas largas, em E estão as ruas com dois sentidos e onde o serviço poderá ser efetuado numa só passagem. As ligações podem ser de serviço ou de passagem em vazio. As de serviço, também designadas por tarefas, têm uma procura a satisfazer com um dado custo de serviço. As ligações em vazio servem apenas para assegurar a conexidade das rotas. Visto que as tarefas também podem ser utilizadas apenas de passagem, todas as ligações do grafo têm atribuído um custo de passagem em vazio. Para efetuar o serviço, é

conhecido o número de veículos, estacionados no depósito, bem como a respetiva capacidade. No final, os veículos devem recolher ao depósito onde é cobrado um custo de despejo.

Assim, define-se o MCARP pelo conjunto de rotas que assegura a execução de todas as tarefas a um custo total mínimo. O número de rotas não pode exceder o número de veículos, pois um veículo efetua uma só rota.

3. Modelos

O objetivo desta secção é apresentar os modelos para o MCARP [8] que serão usados no desenvolvimento da matheurística. Ambas as formalizações contêm variáveis de fluxo para garantir a conexidade das rotas. O primeiro modelo é um modelo válido que permite obter soluções para instâncias de média dimensão e as suas variáveis estão indexadas de forma a identificar as rotas. O segundo modelo, um modelo agregado, é uma relaxação do primeiro que produz bons limites inferiores para instâncias de maior dimensão. Este modelo encontra uma rota gigante, realizada por um só veículo de capacidade igual ao total das capacidades dos veículos disponíveis.

É, agora, apresentada a notação utilizada e nas secções seguintes a formalização de cada modelo.

Começamos por transformar o grafo misto $\Gamma = (V, A' \cup E)$ num grafo orientado, criando dois arcos opostos por cada aresta, i.e., $G = (V, A)$ com $A = A' \cup \{(i, j), (j, i) : (i, j) \in E\}$.

Para assegurar que o depósito, representado pelo vértice 1, possa ser utilizado apenas de passagem, sem custo de despejo, é adicionado ao grafo um depósito fictício, representado pelo vértice 0 e duas ligações, também fictícias, sem serviço $\{(0,1),(1,0)\}$, com custo de passagem em vazio nulo, ou seja, $d_{0,1} = d_{1,0} = 0$.

Seja $G_0 = (V_0, A_0)$, o grafo orientado com $V_0 = V \cup \{0\}$ e $A_0 = A \cup \{(1,0), (0,1)\}$, considera-se a seguinte notação:

- $N = |V|$
- $A_R \subset A_0$: conjunto de tarefas do grafo orientado
- $A'_R \subset A'$: conjunto de arcos-tarefa do grafo misto Γ
- $E_R \subset E$: conjunto de arestas-tarefa do grafo misto Γ
- P : número de veículos disponíveis
- W : capacidade de cada veículo
- λ : custo de despejo
- d_{ij} : custo de passagem em vazio no arco $(i, j) \in A_0$
- c_{ij} : custo de serviço do arco $(i, j) \in A_R$
- q_{ij} : procura no arco $(i, j) \in A_R$
- $QT = \sum_{(i,j) \in \{A'_R \cup E_R\}} q_{ij}$: Procura total

3.1. Modelo válido

Para formalizar o MCARP como um problema de programação linear inteira (PLI), definem-se três conjuntos de variáveis.

Para $p=1, \dots, P$:

- $x_{ij}^p = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } (i, j) \text{ é servido pela rota } p \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall (i, j) \in A_R$

- y_{ij}^p é o número de passagens em vazio no arco (i, j) na rota p , para $(i, j) \in A_0$
- f_{ij}^p é o fluxo que atravessa o arco (i, j) relacionado com a procura restante da rota p , para $(i, j) \in A_0$

$$\text{Min } Z = \sum_{p=1}^P \sum_{(i,j) \in A_0} d_{ij} y_{ij}^p + \sum_{p=1}^P \sum_{(i,j) \in A_R} c_{ij} x_{ij}^p + \lambda \sum_{p=1}^P y_{1,0}^p \quad (1)$$

s.a.:

$$\sum_{j:(i,j) \in A_0} y_{ij}^p + \sum_{j:(i,j) \in A_R} x_{ij}^p = \sum_{j:(j,i) \in A_0} y_{ji}^p + \sum_{j:(j,i) \in A_R} x_{ji}^p \quad i=1, \dots, N; p=1, \dots, P \quad (2)$$

$$\sum_{p=1}^P x_{ij}^p = 1 \quad \forall (i, j) \in A'_R \quad (3)$$

$$\sum_{p=1}^P (x_{ij}^p + x_{ji}^p) = 1 \quad \forall (i, j) \in E_R \quad (4)$$

$$\sum_{j:(j,i) \in A} f_{ji}^p - \sum_{j:(i,j) \in A} f_{ij}^p = \sum_{j:(j,i) \in A_R} q_{ji} x_{ji}^p \quad i=1, \dots, N; p=1, \dots, P \quad (5)$$

$$f_{0,1}^p = \sum_{(i,j) \in A_R} q_{ij} x_{ij}^p \quad p=1, \dots, P \quad (6)$$

$$f_{1,0}^p = 0 \quad p=1, \dots, P \quad (7)$$

$$y_{0,j}^p \leq 1 \quad p=1, \dots, P \quad (8)$$

$$f_{ij}^p \leq W(y_{ij}^p + x_{ij}^p) \quad \forall (i, j) \in A_0; p=1, \dots, P \quad (9)$$

$$f_{ij}^p \geq 0; y_{ij}^p \geq 0 \text{ e inteiro} \quad \forall (i, j) \in A_0; p=1, \dots, P \quad (10)$$

$$x_{ij}^p \in \{0,1\} \quad \forall (i, j) \in A_R; p=1, \dots, P \quad (11)$$

A função objetivo (1) representa o custo total, ou seja, a soma do total do custo de passagem em vazio, com o total do custo de serviço e o total do custo de despejo. Como todas as tarefas têm de ser servidas, a função poderia não considerar o custo de serviço, no entanto, esta expressão facilita a comparação de resultados com estudos anteriores. As restrições (2) estabelecem que o número de vezes que uma rota entra e sai de um vértice é igual. As restrições (3) e (4) impõem que as tarefas sejam servidas, (5), (6) e (7) são restrições de fluxo que asseguram a conectividade das rotas e que em conjunto com (2) garantem a continuidade das rotas. As restrições (8) certificam que há apenas uma saída do depósito por rota e as restrições (9) relacionam as variáveis de fluxo com as variáveis inteiras. Em (10) e (11) estão definidas as restrições de sinal e de integralidade.

Para tentar diminuir o tempo de resolução deste PLI foram adicionadas à formalização anterior as seguintes desigualdades válidas:

$$f_{ij}^p \geq q_{ij} x_{ij}^p \quad \forall (i, j) \in A_R; \quad p=1, \dots, P \quad (12)$$

$$f_{ij}^p \geq y_{ij}^p - 1 \quad \forall (i, j) \in A_0 \setminus A_R; \quad p=1, \dots, P \quad (13)$$

$$\sum_{p=1}^P \left(\sum_{j:(1,j) \in A} y_{1,j}^p + \sum_{j:(1,j) \in A} x_{1,j}^p \right) \geq \left\lceil \frac{QT}{W} \right\rceil \quad (14)$$

$$y_{0,1}^p \geq y_{0,1}^{p+1} \quad p=1, \dots, P-1 \quad (15)$$

O conjunto de desigualdades (12) e (13) são limites inferiores para as variáveis de fluxo, a (14) fixa um número mínimo de veículos para satisfazer a procura total e as (15) eliminam soluções equivalentes.

3.2. Modelo agregado

Neste modelo as variáveis são agregadas, obtendo-se como solução uma única rota que satisfaz a procura total. Para formalizar o modelo agregado, definem-se os seguintes três conjuntos de variáveis:

- $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j) \in R \text{ é servido} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall (i, j) \in R; \text{ com } x_{ij} = \sum_{p=1}^P x_{ij}^p, \forall (i, j) \in A_R$
- y_{ij} é o número de passagens em vazio no arco $(i, j) \in A_0$; com

$$y_{ij} = \sum_{p=1}^P y_{ij}^p$$
- f_{ij} é o fluxo do arco $(i, j) \in A_0$; com $f_{ij} = \sum_{p=1}^P f_{ij}^p$.

$$\text{Min } Z_A = \sum_{(i,j) \in A_0} d_{ij} y_{ij} + \sum_{(i,j) \in A_R} c_{ij} x_{ij} + \lambda y_{1,0} \quad (16)$$

s.a.:

$$\sum_{j:(i,j) \in A_0} y_{ij} + \sum_{j:(i,j) \in A_R} x_{ij} = \sum_{j:(j,i) \in A_0} y_{ji} + \sum_{j:(j,i) \in A_R} x_{ji} \quad i=1, \dots, N \quad (17)$$

$$x_{ij} = 1 \quad \forall (i, j) \in A'_R \quad (18)$$

$$x_{ij} + x_{ji} = 1 \quad \forall (i, j) \in E_R \quad (19)$$

$$\sum_{j:(j,i) \in A} f_{ji} - \sum_{j:(i,j) \in A} f_{ij} = \sum_{j:(j,i) \in A_R} q_{ji} x_{ji} \quad i=1, \dots, N \quad (20)$$

$$f_{0,1} = QT \quad (21)$$

$$f_{1,0} = 0 \quad (22)$$

$$y_{0,1} \leq P \quad (23)$$

$$f_{ij} \leq W(y_{ij} + x_{ij}) \quad \forall (i, j) \in A_0 \quad (24)$$

$$f_{ij} \geq 0; y_{ij} \geq 0 \text{ e inteiro} \quad \forall (i, j) \in A_0 \quad (25)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A_R \quad (26)$$

Este modelo não é válido para o MCARP mas produz bons limites inferiores. Todas as restrições foram obtidas através da agregação das variáveis do modelo válido.

As seguintes desigualdades válidas decorrem igualmente das do modelo válido.

$$f_{ij} \geq q_{ij}x_{ij} \quad \forall (i, j) \in A_R \quad (27)$$

$$f_{ij} \geq y_{ij} - P \quad \forall (i, j) \in A_0 \setminus A_R \quad (28)$$

$$\sum_{j:(1,j) \in A} y_{1,j} + \sum_{j:(1,j) \in A_R} x_{1,j} \geq \left\lceil \frac{QT}{W} \right\rceil \quad (29)$$

4. A matheurística

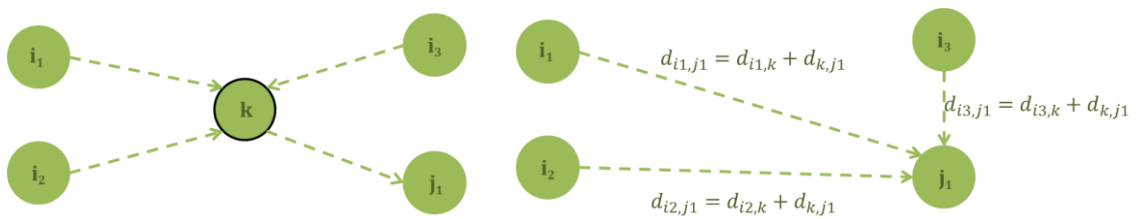
A presente secção tem como propósito a apresentação da matheurística desenvolvida para o MCARP.

No decorrer do trabalho, assume-se que todos os vértices do grafo G (com exceção eventualmente do depósito) são vértices com tarefas incidentes. Não há perda de generalidade porque se o grafo original não verificasse esta hipótese poder-se-ia realizar uma transformação de modo a trabalhar num grafo a satisfazer este requisito, como a seguir se explica.

Seja $G = (V, A)$ um grafo orientado tal que V contém vértices sem tarefas incidentes. Seja k ($k \neq 1$) um destes vértices com ligação a pelo menos um vértice com tarefas incidentes, efetua-se o seguinte:

```

PréProcessa(k) {
  I = {i ∈ V: (i, k) ∈ A \ AR}
  J = {j ∈ V: (k, j) ∈ A \ AR}
  Para todo o i ∈ I e j ∈ J:
    Se (i, j) ∈ A
      dij ← Min{dij, dik + dkj}
    cc
      A ← A ∪ {(i, j)} e dij = dik + dkj
  V ← V \ {k}
  A ← A \ {(i, k): i ∈ I} ∪ {(k, j): j ∈ J}
}
    
```



No final destas transformações, aplicadas a todo o vértice k sem tarefas incidentes obtém-se um grafo G como pretendido.

Para acompanhar a exposição usar-se-á o seguinte exemplo:

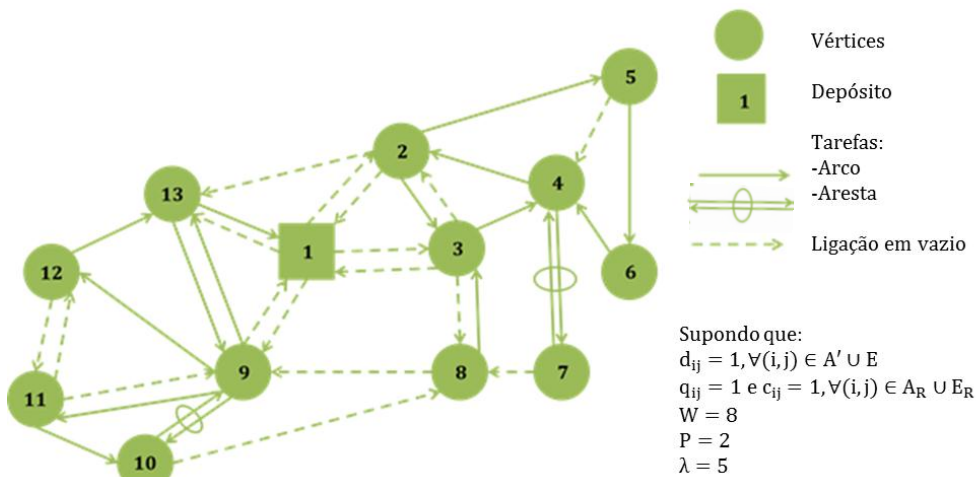


Ilustração 2 - Exemplo

A matheurística assemelha-se às heurísticas do tipo *route-first cluster-second* [15], onde primeiro se encontra uma rota gigante que é seguidamente dividida em rotas, e estrutura-se em três fases essenciais:

Fase 1 – Resolver o modelo agregado

Fase 2 – Fixar tarefas

- Calcular distâncias
- Escolher sementes
- Escolher ligações

Fase 3 – Resolver o modelo válido com as tarefas fixadas na Fase 2.

Na primeira fase resolve-se o modelo agregado. Este dá-nos uma rota gigante compatível com a capacidade total dos P veículos. O valor da solução é um limite inferior do valor ótimo do problema. O grafo induzido pela solução do modelo agregado, $G_I = (V, A_I)$, é um grafo de menor dimensão do que o grafo inicial, com $A_I \subset A$; i.e., já não constam algumas ligações em vazio e um dos dois arcos a representar cada aresta de serviço.

No exemplo, obtém-se, como solução ótima do modelo agregado, $Z_A=25$ e o seguinte grafo induzido (ilustração 3).

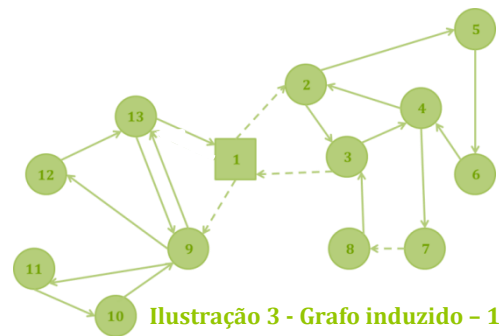


Ilustração 3 - Grafo induzido - 1ª fase

A partir do grafo G_I , segue a segunda fase da matheurística, onde incidirá em grande parte este projeto. Trata-se da fixação de tarefas em rotas de modo a reduzir a dimensão do problema a resolver na terceira fase. Esta fixação será detalhada nas secções seguintes.

Na ilustração 4, as tarefas fixadas estão representadas a laranja para uma rota e a vermelho para outra.

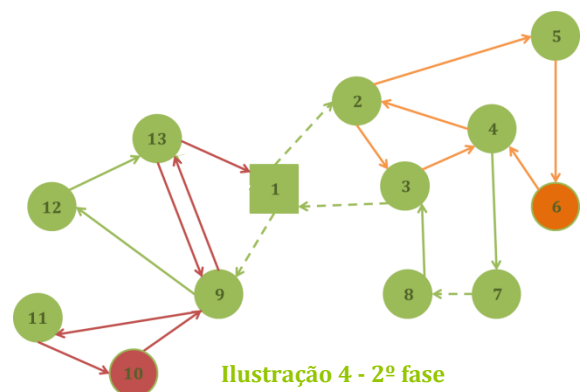


Ilustração 4 - 2ª fase

A terceira fase consiste na resolução do modelo válido com algumas tarefas pré-fixadas em rotas de acordo com a segunda fase. No exemplo, temos a solução heurística ($Z^*=30$) depois de resolvido o modelo válido.

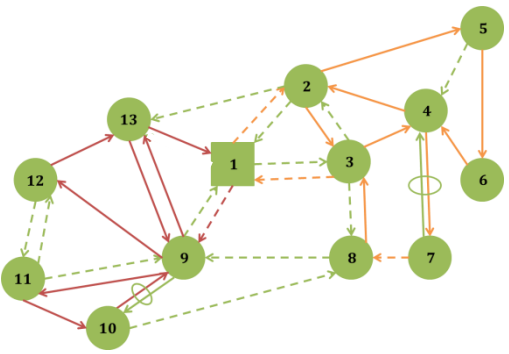


Ilustração 5 - Solução do exemplo - 3ª fase

Como se mencionou, o trabalho incidiu essencialmente sobre a segunda fase, a fixação das tarefas em rotas. Nesta fase torna-se necessário quer o cálculo de distâncias, quer a seleção de um conjunto especial de vértices designados por vértices-semente.

Antes de detalhar cada um dos passos da segunda fase da matheurística, apresenta-se a sua estrutura de modo a clarificar encadeamento desta fase.

4.1. Cálculo de distâncias

A distância entre o par de vértices i, j de V , $\mathbf{Dist}(i, j)$, é o comprimento do caminho mais curto em G_I , assumindo-se que o comprimento do arco $(u, v) \in A_I$ é dado por d_{uv} . O cálculo foi feito com o algoritmo *Floyd-Warshall* [14]. Com base nestas distâncias é ainda calculado:

$\mathbf{Circ}_{1j} = \text{Dist}(1, j) + \text{Dist}(j, 1), j \in V \setminus \{1\}$, o comprimento do circuito mais curto que inclui o vértice j e o depósito; (28)

$\mathbf{DistMedia} = \frac{\sum_{i \in V, j \in V} \text{Dist}(i, j)}{N^2 - N}$, a distância média entre todos os vértices. (29)

```

Calcular Distâncias () {
  Para  $i, j \in V$ 
    Calcular  $\text{Dist}(i, j)$  //Calculado através do algoritmo Floyd-Warshall.
  Para  $j \in V \setminus \{1\}$ 
     $\text{Circ}_{1j} = \text{Dist}(1, j) + \text{Dist}(j, 1)$ 

     $\text{DistMedia} = \frac{\sum_{i \in V, j \in V} \text{Dist}(i, j)}{N^2 - N}$ 
}

```

4.2. Seleção dos vértices-semente

Para fixar tarefas em rotas de forma equilibrada, seleciona-se um conjunto de vértices-semente, evoluindo a partir de cada um, uma rota. É intuitivo que para este efeito se procure um conjunto de vértices afastados entre si e do depósito. O conjunto de vértices-semente terá cardinalidade igual ao número mínimo de rotas necessárias, que será igual ao arredondamento por excesso da procura total dividida pela capacidade de um veículo. Esta quantidade designa-se por:

$$\mathbf{NMinRotas} = \left\lceil \frac{QT}{W} \right\rceil. \quad (30)$$

A distância ao depósito será controlada através de um parâmetro, D_A , e a distância entre vértices-semente por intermédio de outro, D_B . Inicialmente $D_A = D_B = \text{DistMedia}$. Na ausência de vértices candidatos a semente D_A e D_B são sucessivamente divididos pelos fatores de redução δ e θ respetivamente, até se conseguir o número de vértices-semente pretendido. O primeiro vértice a ser selecionado é o que maximiza Circ_{1j} . Seguidamente, a escolha é limitada aos vértices ainda não selecionados (em $V \setminus V_s$) que estão afastados do depósito pelo menos D_A . Isto é, aos vértices do conjunto L , com $L = \{j \in V \setminus V_s : \text{Dist}(1, j) \geq D_A \wedge \text{Dist}(j, 1) \geq D_A\}$. Como se exige igualmente um afastamento mínimo entre sementes de D_B , a escolha incide num subconjunto de L , $K = \{j \in L : \text{Dist}(i, j) \geq D_B \wedge \text{Dist}(j, i) \geq D_B, \forall i \in V_s\}$. Em cada iteração é definido o conjunto K e eleito para semente o vértice k : $\max_{j \in K}(\text{Circ}_{1j})$. Em resumo:

```

Escolha das sementes {
   $V_s = \emptyset$ 
   $D_A = D_B = \text{DistMedia}$ 
  Para  $Niter=1$  até  $NMinRotas$ 
     $L = \{j \in V \setminus V_s : \text{Dist}(1, j) \geq D_A \wedge \text{Dist}(j, 1) \geq D_A\}$ 
    Enquanto  $L = \emptyset$ 
       $D_A = \frac{D_A}{\delta}$ 
       $L = \{j \in V \setminus V_s : \text{Dist}(1, j) \geq D_A \wedge \text{Dist}(j, 1) \geq D_A\}$ 
       $K = \{j \in L : \text{Dist}(i, j) \geq D_B \wedge \text{Dist}(j, i) \geq D_B, \forall i \in V_s\}$ 
      Enquanto  $K = \emptyset$ 
         $D_B = \frac{D_B}{\theta}$ 
         $K = \{j \in L : \text{Dist}(i, j) \geq D_B \wedge \text{Dist}(j, i) \geq D_B, \forall i \in V_s\}$ 
        Selecionar vértice  $k$  tal que:  $\max_{j \in K}(\text{Circ}_{1j})$ 
         $V_s = V_s \cup \{k\}$ 
    }
}

```

Apesar de ser um problema com procura nos arcos, a semente selecionada é dada por um vértice e não por uma tarefa como Mourão et al. [11] utilizaram na heurística para o SARP (*Sectoring Arc Routing Problem*). Esta opção é viável porque, como atrás se referiu, pode assumir-se que qualquer vértice do grafo tem pelo menos uma tarefa nele incidente.

No exemplo, $N_{\text{MinRotas}}=2$, ou seja serão selecionados 2 vértices-semente. Como não existe um vértice afastado do depósito mais do que $D_A = \text{DistMedia} \approx 3,61$. Foi preciso acionar o fator de redução δ . Tomando $\delta=\theta=1,1$, D_A foi reduzido sucessivamente até se obter o primeiro vértice-semente 6 ($D_A \approx 2,99$; $\text{Circ}_{1,6} = 7$; $\text{Dist}(1,6)=3$; $\text{Dist}(6,1)=4$). O segundo vértice-semente é o 10 ($\text{Circ}_{1,10} = 6$; $\text{Dist}(1,10)=\text{Dist}(10,1)=3$; $\text{Dist}(10,6)=6$; $\text{Dist}(6,10)=7$; $D_B = \text{DistMedia} \approx 3,61$).

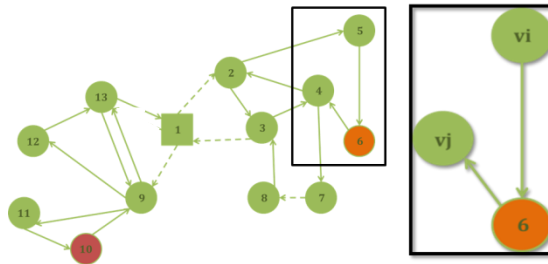
4.3. Seleção das tarefas

Consideram-se dois tipos de fixação que se denominam por fixação *a priori* e *a posteriori*.

4.3.1. Fixação *a priori*

O critério que preside à seleção da tarefa a fixar tem como principal objetivo impedir que a rota se afaste descontroladamente do depósito. Sublinha-se que inicialmente poderá ser tolerado um desvio, Desv , na aproximação ao depósito. (Mais abaixo, o desvio será explicado com mais pormenor.)

Este estudo centra-se nas tarefas incidentes em dois vértices particulares v_i e v_j . O vértice v_i está ligado ao vértice-semente da rota por um caminho, com orientação de v_i para a semente contendo eventualmente algumas tarefas já fixadas na rota. O vértice v_j também está ligado à semente mas num caminho orientado da semente para este e podendo igualmente conter algumas tarefas já fixadas na rota. Inicialmente, v_i e v_j são o vértice-semente.

Ilustração 6 - v_i e v_j

A ligação escolhida poderá ser do tipo (i, v_i) ou (v_j, j) . As ligações candidatas deverão respeitar um dos três requisitos seguintes, numerados por prioridade decrescente.

No requisito R1, são candidatas tarefas ainda não fixadas, que quando incluídas na rota, a carga do veículo não exceda αW . As tarefas serão escolhidas de entre as candidatas que:

- $\text{Dist}(1, i) < \text{Dist}(1, v_i) + \text{Desv}$, para tarefas do tipo (i, v_i) ;
- $\text{Dist}(j, 1) < \text{Dist}(v_j, 1) + \text{Desv}$, para tarefas do tipo (v_j, j) .

Caso não existam tarefas a cumprir R1, estuda-se o requisito R2. Neste, são também candidatas tarefas ainda não fixadas, que quando incluídas na rota, a carga do veículo não exceda αW . As tarefas serão escolhidas de entre as que pertencem a um sub-circuito do grafo.

Como a ilustração 7 exemplifica, (v_j, a) é uma ligação pertencente a um sub-circuito e a distância do vértice a até ao depósito é superior a distância de v_j até ao depósito, pois $\text{Dist}(a, 1) = \text{Dist}(a, v_j) + \text{Dist}(v_j, 1)$,

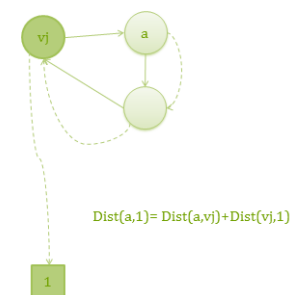


Ilustração 7 - Sub-circuito

afastando a rota do depósito até esta percorrer todo o sub-circuito. Assim sendo, as tarefas a escolher serão aquelas com um número de ligações até retornar a v_j inferior a um parâmetro t ($t \in \mathbb{N}$). Mais concretamente e designando por $\mathbf{Nlig}(u, v)$

o número de ligações entre os vértices u e v serão escolhidas de entre as tarefas com:

- $N_{\text{lig}}(v_i, i) < t$, para as tarefas do tipo (i, v_i)
- $N_{\text{lig}}(j, v_j) < t$, para as tarefas do tipo (v_j, j) .

Na ausência de tarefas que obedeçam a R2, uma das extremidades, v_i ou v_j , passa para a outra extremidade de uma ligação em vazio (ou de uma tarefa já selecionada que seja utilizada apenas de passagem). As ligações escolhidas em vazio para esse efeito serão as que respeitam o requisito R3, ou seja, tal como em R1, entre as que:

- $\text{Dist}(1, i) < \text{Dist}(1, v_i) + \text{Desv}$, para as do tipo (i, v_i)
- $\text{Dist}(j, 1) < \text{Dist}(v_j, 1) + \text{Desv}$, para as do tipo (v_j, j) .

A ligação selecionada (a, b) é, em qualquer dos requisitos, a que maximiza a distância entre a extremidade e o depósito, $\text{Dist}(1, i)$ se $(a, b) = (i, v_i)$ ou $\text{Dist}(j, 1)$ se $(a, b) = (v_j, j)$. A fixação *a priori* prossegue até que v_i e v_j atinjam o depósito. Só as tarefas são fixadas para a terceira fase da heurística, as ligações de passagem em vazio apenas ficam registadas para utilização na fixação *a posteriori*, que será exposta na secção seguinte.

O desvio acima mencionado, **Desv**, é positivo até a carga do veículo atingir μW e nulo a partir daí. Assim, permite-se que a rota se afaste do depósito inicialmente.

Para garantir que o afastamento não seja exagerado calcula-se, **Desv** = $\frac{\text{DistMinSem}}{r}$,

com **DistMinSem**, distância mínima entre todos os pares de vértices-semente, e um parâmetro $r \in \mathbb{N}$.

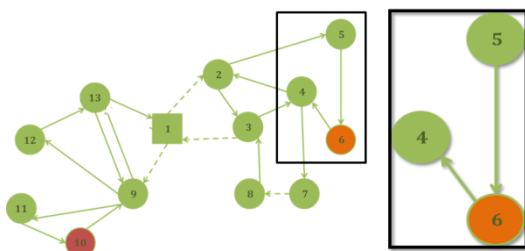
Apresenta-se o pseudo-código, cujos parâmetros e variáveis foram anteriormente explicados:

```

Fixação a priori( $p, v_i, v_j, Qfixa(p), ServSelec, fim(p), ServFix(p), LigPassUtil(p)$ );

  Se  $Qfixa(p) < \mu W$ 
     $Desv = DistMinSem/r$ 
  cc
     $Desv = 0$ 
   $ServCand = \{(a, b) \in A_{IR} \setminus ServSelec: Qfixa(p) + q_{a,b} \leq \alpha W\}$ 
   $Bi = \{(i, v_i) \in ServCand: Dist(1, i) < Dist(1, v_i) + Desv\}$ 
   $Bj = \{(v_j, j) \in ServCand: Dist(j, 1) < Dist(v_j, 1) + Desv\}$ 
   $Serv = \mathbf{verdadeiro}$ 
  Se  $Bi \cup Bj = \emptyset$ 
     $Bi = \{(i, v_i) \in ServCand: v_i \neq 1 \wedge Nlig(v_i, i) < t\}$ 
     $Bj = \{(v_j, j) \in ServCand: v_j \neq 1 \wedge Nlig(j, v_j) < t\}$ 
    Se  $Bi \cup Bj = \emptyset$ 
       $Bi = \{(i, v_i) \in A_I: v_i \neq 1 \wedge Dist(1, i) < Dist(1, v_i) + Desv\}$ 
       $Bj = \{(v_j, j) \in A_I: v_j \neq 1 \wedge Dist(j, 1) < Dist(v_j, 1) + Desv\}$ 
       $Serv = \mathbf{falso}$ 
      Se  $Bi \cup Bj = \emptyset$ 
         $fim(p) = \mathbf{falso}$ 
        QUEBRAR
       $Dist\_i = \max_{(i, v_i) \in Bi} \{Dist(1, i)\}; Dist\_j = \max_{(v_j, j) \in Bj} \{Dist(j, 1)\};$ 
      Se  $Dist\_i > Dist\_j$ 
         $(a, b) = (i, v_i)$ 
         $v_i = i$ 
      cc
         $(a, b) = (v_j, j)$ 
         $v_j = j$ 
      Se  $Serv$ 
         $ServSelec = ServSelec \cup \{(a, b)\}$ 
         $Qfixa(p) += q_{a,b}$ 
         $ServFix(p) = ServFix(p) \cup \{(a, b)\}$ 
      Cc
         $LigPassUtil(p) = LigPassUtil(p) \cup \{(a, b)\}$ 
    }
  }
  
```

No exemplo, considerando $\alpha=80\%$ e $Desv=0$ ($\mu = 0$), partindo do primeiro vértice-mente, $v_i=v_j=6$, são candidatas as seguintes tarefas:



$(i, v_i) = (5, 6)$, com $Dist(1, 5) = 2 < Dist(1, 6) = 3$

$(v_j, j) = (6, 4)$, com $Dist(4, 1) = 3 < Dist(6, 1) = 4$

Destas é selecionada a que maximiza a distância entre a rota e o depósito, $(6, 4)$.

Ilustração 8 - Fixação tarefas 1

Suponhamos que $v_i=2$, $v_j=3$ e as tarefas já fixadas na rota são as representadas a laranja na figura 9.

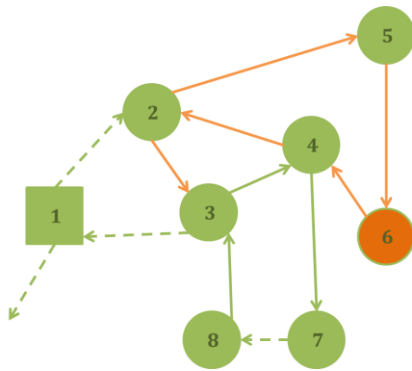


Ilustração 9 - Fixação de tarefas 2

Todas as tarefas (i,v_i) foram fixadas e a única tarefa (v_j,j) ainda por selecionar é $(3,4)$. No entanto, $Dist(4,1) > Dist(3,1)$, não havendo tarefas a cumprir R1. Neste caso, verificamos que a tarefa pertence a um sub-circuito, pois $N_{lig}(4,3)=2$. Admitindo que $t=3$, a tarefa satisfaz o requisito R2 e é fixa na rota, resultando $v_i=2$ e $v_j=4$.

Recorde-se que cada tarefa tem uma procura unitária e a carga fixa é de 6 unidades. Dado que $\alpha.W=6,4$, já não existem tarefas candidatas. Agora, será escolhida uma ligação em vazio para v_i ou v_j passar para a outra extremidade. Assim:

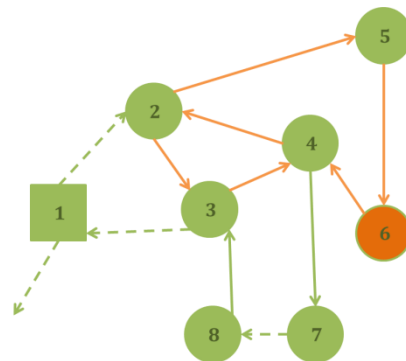


Ilustração 10 - Fixação de tarefas 3

$v_i=2 \rightarrow Dist(1,2)=1$

Ligações em vazio:

- $(1,2) \rightarrow Dist(1,1)=0 < 1$: Cumpre R3
- $(4,2) \rightarrow Dist(1,4)=3 > 1$: Não cumpre R3

$v_j=4 \rightarrow Dist(4,1)=3$

Ligações em vazio:

- $(4,2) \rightarrow Dist(2,1)=2 < 3$: Cumpre R3
- $(4,7) \rightarrow Dist(7,1)=3 = 3$: Não cumpre R3

Entre $(4,2)$ e $(1,2)$, é selecionada $(4,2)$ por maximizar a distância entre a rota e o depósito. Esta ligação é apenas de passagem e não é fixa a rota, no entanto a informação é guardada para ser utilizada na fixação *a posteriori*.

Rota a Rota (RR) versus Multi-Rotas (MR)

A fixação descrita, com base nos requisitos R1, R2 e R3, poderá ter duas sequências distintas, Rota a Rota ou Multi-Rotas. A fixação Rota a Rota repete o procedimento numa rota até atingir o depósito e só depois passa à fixação das tarefas da rota seguinte. Na fixação Multi-Rotas, o procedimento é alternado de rota em rota. Com a estratégia MR pretende-se eliminar a vantagem sistemática das primeiras rotas na seleção das tarefas RR. Com a realização de testes preliminares verificou-se que, após a fixação *a priori* pela estratégia RR, algumas rotas não continham qualquer tarefa fixa, foi esta constatação que sugeriu a estratégia MR.

Seguidamente apresenta-se o pseudo-código da fixação *a priori* na estratégia RR. O anexo A contém o pseudo-código da estratégia MR.

```

Fixação RR() {
    ServSelec =  $\emptyset$ 
    DistMinSem =  $\min(\text{Dist}(i, j), \forall i, j \in Vs : i \neq j)$ 
    Calcular Nlig(u,v) // Número mínimo de ligações entre os
    vértices u e v - Algoritmo Floyd-Warshal
    Para p=1 até NMinRotas
        v $\in$ Vs
        Vs=Vs\{v}
        Qfixa(p)=0; ServFix(p) =  $\emptyset$ ; LigPassUtil(p) =  $\emptyset$ 
        vi=v
        vj=v
        fim(p)=falso
        Enquanto (!fim(p))
            Fixação a priori();
    }
  
```

A ilustração 11 exemplifica a fixação RR no exemplo que se tem considerado, a laranja representam-se as ligações selecionadas a partir do vértice-semente 6 e a vermelho a partir do vértice-semente 10.

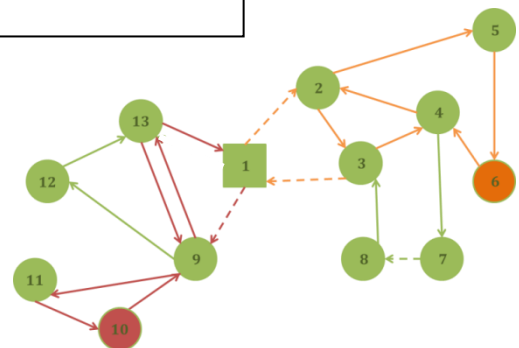


Ilustração 11 - Fixação *a priori* RR

4.3.2. Fixação *a posteriori* (FP)

Verificou-se que, na maioria dos casos, as rotas alcançavam o depósito antes de atingir a percentagem da capacidade pretendida. Por este motivo pensou-se numa fixação *a posteriori*. Este ponto adicional consiste em procurar qual a rota em que uma tarefa por fixar deverá ser incluída. Assim sendo, é utilizado um método semelhante à poupança *Clarke-Wright*, [3], onde é calculada a variação no custo de se adicionar uma tarefa a cada rota e a tarefa é fixa na rota que proporcionará menor acréscimo de custo.

A variação do custo de inserir a tarefa (u,v) na ligação (a,b) da rota k é dada por:

- $\text{Custo}(k) = \text{Dist}(a, u) + \text{Dist}(v, a)$, se (a,b) é tarefa fixa na rota k, ou
- $\text{Custo}(k) = \text{Dist}(a, u) + \text{Dist}(v, b) - d_{a,b}$, se (a,b) é ligação de passagem selecionada na fixação *a priori*.

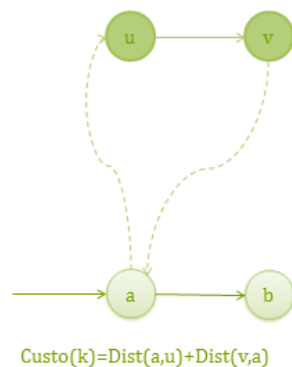


Ilustração 13a - Fixação à posteriori em que (a,b) é tarefa

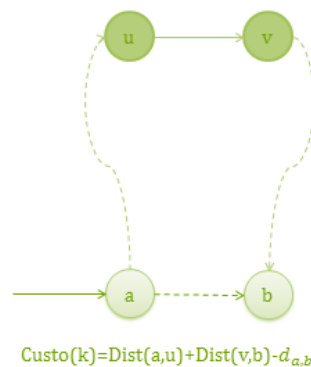


Ilustração 12b - Fixação à posteriori em que (a,b) é ligação em vazio

Mais precisamente:

Fixação à posteriori () {

Se FP

Para $(i, j) \in A_{IR} \setminus ServSelec$

Para $p=1$ até $NMinRotas$

$Cust(p)=INF$

$ServCand = \{(a, b) \in A_{IR} \setminus ServSelec: Qfixa(p) + q_{a,b} \leq aW\}$

Se $(i, j) \in ServCand$

Se $Cust(p) < Dist(a, i) + Dist(j, a), \forall (a, b) \in ServFix(p)$

Atualizar $Cust(p)$

Se $Cust(p) < Dist(a, i) + Dist(j, b) - d_{a,b}, \forall (a, b) \in LigPassUtil(p)$

Atualizar $Cust(p)$

Selecionar a rota $k: \min_{s=1, \dots, NMinRotas} (Cust(s))$

$Qfixa(k) += q_{i,j}$

$ServFix(k) = ServFix(k) \cup \{(i, j)\}$

$ServSelec = ServSelec \cup \{(i, j)\}$

}

Na secção seguinte apresentam-se e discutem-se os resultados de testes computacionais.

5. Resultados computacionais

A matheurística foi programada em C++ recorrendo-se ao CPLEX 12.3 para resolver os modelos de programação inteira. Os testes foram efetuados num computador com um processador Intel(R) Pentium(R) CPU B950 2.1GHz com 6,00 GB de RAM.

Testaram-se as duas estratégias referidas acima com e sem fixação *a posteriori* e foram utilizados diferentes conjuntos de parâmetros da heurística (μ e α). Na primeira e última fase da heurística limitou-se o CPLEX a uma hora.

Foram usados dois conjuntos diferentes de instâncias habitualmente utilizados para testar o MCARP, construídas por Belenguer et al. [2] e disponíveis em www.uv.es/~belengue/mcarp/index.html.

5.1. Instâncias *mval*

O primeiro conjunto é composto por 34 instâncias de média dimensão. Estas não têm custo de despejo ($\lambda=0$) e apresentam as seguintes características:

Instâncias	V	A	E	P	W
1A	24	35	20	4	200
1B	24	38	13	5	120
1C	24	36	17	10	45
2A	24	28	16	4	180
2B	24	40	12	5	120
2C	24	35	14	10	40
3A	24	33	15	4	80
3B	24	29	16	5	50
3C	24	25	18	9	20
4A	41	69	26	5	225
4B	41	83	19	6	170
4C	41	82	21	7	130
4D	41	83	21	11	75
5A	34	74	22	5	220
5B	34	56	35	6	165
5C	34	81	17	7	130
5D	34	63	29	11	75
6A	31	47	22	5	170
6B	31	44	22	6	120
6C	31	45	23	12	50
7A	40	50	36	5	200
7B	40	66	25	6	150
7C	40	62	28	11	65
8A	30	76	20	5	200
8B	30	64	27	6	150
8C	30	55	28	11	65
9A	50	100	32	5	235
9B	50	76	44	6	175
9C	50	83	42	7	140
9D	50	93	38	12	70
10A	50	106	32	5	250
10B	50	101	33	6	190
10C	50	100	36	7	150
10D	50	87	42	12	75

Tabela 1 - Características *mval*

Foram realizados 5 testes para a estratégia Rota a Rota (RR 1 – RR 5) e 5 para a Multi-Rotas (MR 1 – MR 5) onde diferem os valores dos parâmetros (μ e α) e a existência de fixação *a posteriori* (FP). Iniciaram-se com $\alpha=80\%$, onde foram testados vários níveis de desvio, $\mu=0\%$ e $\mu=10\%$, com e sem fixação *a posteriori* (FP). Como se poderá verificar na tabela 2, o método encontra soluções admissíveis para todas as instâncias. Tentou-se, então, diminuir α para 70% para testar se era possível reduzir o *gap* obtido. A tabela 2 apresenta os *gap*'s dos resultados obtidos. A segunda coluna contém o valor ótimo do modelo agregado obtido na primeira fase. Na terceira coluna identificam-se limites inferiores que são os melhores valores importados de [8]. A negrito representa-se o valor ótimo do problema. Nos anexos B, C e D estão expostos os valores da heurística e os tempos computacionais. Quando o valor ótimo do modelo inteiro não foi encontrado ao fim de uma hora, o valor é um limite superior e encontra-se sublinhado.

Instâncias	Z*agregado	Limite inferior	RR 1	RR 2	RR 3	RR 4	RR 5	MR 1	MR 2	MR 3	MR 4	MR 5
1A	230	230	0,0%	14,3%	9,1%	0,0%	3,9%	0,0%	14,3%	9,1%	0,0%	3,9%
1B	261	261	0,0%	5,7%	0,0%	0,0%	22,6%	0,4%	2,7%	9,6%	0,0%	6,5%
1C	309	309	12,9%	27,5%	21,4%	12,9%	62,5%	16,2%	42,4%	26,2%	16,2%	42,4%
2A	324	324	0,0%	6,8%	9,0%	0,0%	6,8%	0,0%	13,0%	4,9%	2,5%	9,3%
2B	395	395	6,3%	14,2%	11,1%	4,1%	10,6%	0,0%	1,0%	5,1%	6,3%	8,6%
2C	521	521	16,7%	27,6%	31,3%	16,7%	27,6%	16,9%	44,9%	13,2%	16,9%	44,9%
3A	115	115	0,9%	7,0%	7,8%	0,9%	7,0%	4,3%	13,9%	14,8%	2,6%	8,7%
3B	142	142	0,0%	2,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	7,0%	0,0%	0,0%	4,9%
3C	163	166	8,4%	21,1%	10,2%	6,0%	16,3%	9,0%	16,3%	9,6%	11,4%	22,3%
4A	580	580	5,0%	11,9%	6,6%	3,4%	4,1%	3,1%	10,0%	7,6%	2,8%	12,4%
4B	650	650	1,2%	14,5%	3,4%	1,8%	8,5%	2,2%	10,9%	5,5%	1,8%	7,8%
4C	630	630	4,9%	12,7%	8,4%	3,3%	7,0%	7,3%	15,2%	8,1%	4,4%	11,7%
4D	746	746	13,1%	27,7%	28,6%	14,6%	23,1%	14,6%	20,6%	19,6%	15,1%	22,4%
5A	597	597	0,0%	19,1%	7,0%	1,7%	18,8%	0,8%	18,1%	6,5%	0,8%	9,4%
5B	613	613	2,9%	9,6%	5,9%	2,9%	4,7%	4,4%	15,5%	9,3%	8,8%	11,9%
5C	697	697	4,6%	6,6%	7,3%	8,0%	13,8%	7,3%	15,6%	10,8%	4,6%	9,6%
5D	718	719	18,9%	20,9%	17,0%	14,7%	26,3%	14,3%	24,9%	16,8%	11,4%	19,5%
6A	326	326	0,3%	8,0%	4,0%	1,5%	8,3%	0,3%	11,0%	6,1%	1,5%	9,2%
6B	317	317	2,5%	11,4%	18,3%	2,5%	11,4%	0,0%	23,7%	21,8%	0,0%	23,7%
6C	355	365	13,4%	32,1%	25,5%	13,4%	32,1%	22,7%	43,3%	35,9%	22,7%	43,3%
7A	364	364	0,0%	22,0%	16,2%	0,0%	25,8%	0,8%	22,3%	17,0%	4,1%	26,4%
7B	412	412	2,9%	27,7%	20,6%	2,9%	27,7%	5,3%	23,1%	18,0%	7,0%	27,2%
7C	417	424	13,7%	34,9%	28,5%	13,7%	34,9%	18,6%	29,2%	23,1%	18,6%	29,2%
8A	581	581	0,0%	5,7%	2,2%	0,9%	4,6%	0,9%	7,2%	2,9%	0,0%	2,8%
8B	531	531	0,0%	4,9%	7,5%	0,0%	10,2%	0,6%	16,6%	4,1%	0,0%	4,5%
8C	617	617	16,0%	27,2%	18,6%	18,6%	22,4%	16,2%	22,9%	19,1%	17,3%	23,2%
9A	458	458	0,0%	15,9%	9,0%	0,0%	11,1%	0,0%	17,0%	8,3%	0,2%	13,1%
9B	453	453	3,5%	15,2%	15,5%	2,2%	17,4%	2,2%	14,8%	10,2%	3,1%	19,2%
9C	428	428	7,7%	24,1%	13,8%	7,2%	26,2%	4,2%	22,9%	22,9%	7,0%	36,9%
9D	514	514	20,0%	45,1%	33,9%	15,4%	33,7%	8,8%	28,8%	20,2%	11,5%	29,4%
10A	634	634	0,0%	10,3%	4,6%	0,6%	9,1%	0,0%	8,4%	4,7%	0,0%	4,4%
10B	661	661	0,6%	6,7%	3,3%	0,9%	4,7%	0,6%	6,7%	2,3%	1,4%	4,4%
10C	623	623	3,7%	16,7%	11,2%	3,4%	8,8%	3,4%	20,1%	9,6%	3,0%	13,8%
10D	642	643	10,7%	26,0%	14,2%	10,7%	23,0%	10,7%	20,4%	22,9%	11,5%	20,2%
α			80%	80%	70%	80%	80%	80%	80%	70%	80%	80%
μ			0%	0%	0%	10%	10%	0%	0%	0%	10%	10%
FP			Não	Sim	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Sim	Não	Sim
gap médio			6%	17%	13%	5%	17%	6%	18%	13%	6%	17%
gap mínimo			0%	2%	0%	0%	0%	0%	1%	0%	0%	3%
gap máximo			20%	45%	34%	19%	62%	23%	45%	36%	23%	45%
Tempo médio			941,78	730,13	1242,22	962,39	536,37	900,20	758,85	761,45	936,30	681,02
Tempo mínimo			0,56	0,32	0,53	0,47	0,36	0,33	0,66	0,36	0,40	0,47
Tempo máximo			3947,93	4316,42	4020,24	3970,46	4043,48	3939,64	4294,33	0,35	4278,81	4183,68

Tabela 2 - gap's mval

$$gap = \frac{Z_{heurística} - LI}{LI}, LI = \text{Limite inferior}; \theta = \delta = 1,1; t = 3; r = 4; \text{Tempo expresso em segundos.}$$

Em ambos os casos, RR e MR, os melhores resultados são sem fixação *a posteriori* (RR 1, RR 4, MR 1 e MR 4) com um *gap* médio entre 5%-6%. Já os resultados obtidos com fixação *a posteriori* (RR 2, RR 3, RR 5, MR 2, MR 3 e MR 5) apresentam um *gap* médio acima dos 10%. Como seria de esperar, os testes efetuados sem

fixação *a posteriori* não fixam a totalidade da percentagem pretendida em todas as rotas, o que aumenta os tempos computacionais de resolução.

A redução de α para 70% diminui o *gap* médio mas continua superior a 10%. Quanto aos tempos de resolução, a estratégia MR tem apenas 4 instâncias, nas 34, que atinge o tempo limite, enquanto a RR tem 8 das 34 instâncias.

A estratégia MR apresenta em geral tempos computacionais mais baixos, sendo MR 5 ($\alpha = 80\%$ e $\mu = 10\%$ com FP) a melhor combinação. Apenas em 3 instâncias não se encontraram soluções heurísticas em uma hora de execução.

Nestas instâncias, a segunda fase da heurística tem sempre um tempo computacional inferior a 1 segundo.

5.2. Instâncias *lpr*

Estas instâncias são de maior dimensão e foram criadas de forma a imitar casos reais. Em todos o custo de despejo é $\lambda=300$ e a capacidade $W=10000$. Na tabela estão as principais características:

Instância	V	A	E	P
A1	28	94	0	3
A2	53	164	5	4
A3	146	436	33	8
A4	195	617	34	13
A5	320	998	58	19
B1	28	58	5	3
B2	53	108	9	4
B3	163	335	26	8
B4	248	574	8	12
B5	401	839	37	19
C1	28	13	39	4
C2	53	24	77	5
C3	163	75	241	12
C4	277	242	362	17
C5	369	454	387	25

Tabela 3- Características *mval*

Como anteriormente, os testes foram realizados para ambas as estratégias. Foram elaborados 12 testes para a Rota a Rota (RR 1 – RR 12) e 13 para a Multi-Rotas

(MR 1 – MR 13) e iniciaram-se com $\alpha=80\%$, onde foram testados vários níveis de desvio, $\mu=0\%$, $\mu=10\%$ e $\mu=20\%$, com e sem fixação *a posteriori* (FP). Como os níveis de μ não foram conclusivos, nos testes seguintes foram apenas considerados $\mu=0\%$ e $\mu=10\%$. Com o objetivo de encontrar soluções admissíveis para todas as instâncias, os testes foram efetuados com valores de α cada vez mais altos, atingindo 99,5%.

Tal como nos resultados das instâncias anteriores, as tabelas 4 e 5 apresentam os *gap's* dos resultados obtidos. A primeira tabela mostra os resultados dos testes com a estratégia Rota a Rota (RR 1 – RR 12) e a segunda refere-se à estratégia Multi-Rotas (MR 1 – MR 13). A segunda coluna contém o valor do modelo agregado obtido na primeira fase. Nos casos em que o valor ótimo do modelo agregado não foi encontrado no tempo estipulado, o valor apresentado é um limite superior. Na terceira coluna apresentam-se limites inferiores que são os melhores valores importados de [8]. A ausência de valor significa que não foram encontradas soluções admissíveis dentro do tempo limite. Os *gap's* médios registados são calculados de acordo com as soluções obtidas, não considerando as instâncias sem solução encontrada. O **negrito** representa-se o valor ótimo do problema. Nos anexos E, F e G estão presentes os valores da heurística e os tempos computacionais. Quando o valor ótimo do modelo inteiro não foi encontrado ao fim de uma hora, o valor é um limite superior e encontra-se sublinhado.

Instância	Zagregado	Limite Inferior	RR 1	RR 2	RR 3	RR 4	RR 5	RR 6	RR 7	RR 8	RR 9	RR 10	RR 11	RR 12
A1	13484	13484	0,00%	0,00%	0,32%	0,23%	0,32%	1,39%	0,23%	0,32%	1,39%	0,32%	1,39%	0,32%
A2	28052	28052	0,18%	0,00%	1,40%	3,06%	0,72%	0,95%	2,91%	0,87%	1,03%	0,98%	0,87%	1,22%
A3	76115	76115	0,76%	0,66%	2,74%	2,22%	3,08%	3,15%	3,25%	2,88%	3,24%	3,02%	3,38%	2,96%
A4	<u>126946</u>	126946		2,15%				6,48%	5,58%	4,36%	3,21%	3,57%	3,30%	2,98%
A5	<u>197429</u>	<u>202736</u>					7,85%	8,47%		5,90%		5,28%		4,88%
B1	14835	14835	0,00%	0,00%	0,69%	0,81%	0,69%	0,69%	0,81%	0,69%	0,69%	0,69%	0,69%	0,69%
B2	28645	28654	0,00%	0,00%	1,77%	1,99%	0,45%	2,92%	2,18%	0,30%	2,78%	0,30%	3,04%	0,30%
B3	77859	77859	0,01%	0,19%	2,08%	2,55%	3,75%	3,51%	3,01%	4,30%	3,19%	2,43%	2,49%	2,74%
B4	126932	126932			11,44%	7,46%	3,71%	3,73%	4,18%	4,15%	3,34%	4,60%	3,09%	3,51%
B5	<u>209849</u>	209791					5,48%	5,36%	4,51%	6,21%	5,60%	6,25%	5,44%	6,17%
C1	18639	18639	0,17%	0,17%	0,48%	0,48%	0,58%	0,58%	0,58%	0,21%	0,21%	0,41%	0,41%	0,41%
C2	36339	36339	0,55%	0,94%	2,60%	1,69%	2,61%	1,75%	2,71%	2,50%	1,52%	1,87%	1,50%	1,86%
C3	<u>111161</u>	111117				3,61%	3,40%	3,91%	3,65%	4,19%	4,05%	3,91%	3,75%	3,94%
C4	<u>168503</u>	168441						6,59%		4,99%	14,29%	4,28%	4,53%	4,42%
C5	<u>258069</u>	257890						5,09%						6,41%
Nº Soluções			8	9	9	10	13	14	12	14	13	14	13	15
α			80%	80%	80%	80%	90%	90%	90%	95%	95%	99%	99%	99,5%
μ			0%	20%	0%	20%	0%	10%	20%	0%	10%	0%	10%	0%
FP			Não	Não	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
gap médio			0,21%	0,46%	2,61%	2,41%	2,90%	3,53%	2,80%	2,99%	3,43%	2,71%	2,61%	2,85%
gap mínimo			0,00%	0,00%	0,32%	0,23%	0,32%	0,58%	0,23%	0,21%	0,21%	0,30%	0,41%	0,30%
gap máximo			0,76%	2,15%	11,44%	7,46%	7,85%	8,47%	5,58%	6,21%	14,29%	6,25%	5,44%	6,41%
Tempo médio			4240,57	4268,50	4029,53	4027,62	3993,64	4029,94	4277,51	4087,88	4012,93	3808,64	3880,47	3862,54
Tempo mínimo			0,46	0,49	0,34	0,42	0,35	0,34	0,52	0,34	0,38	0,33	0,43	0,36
Tempo máximo			7477,77	7705,68	7929,15	7574,27	7498,59	7536,48	7738,33	7625,50	7495,15	7576,92	8184,26	8030,88

Tabela 4 - gap's lpr RR

$$gap = \frac{Z_{heurística} - LI}{LI}, LI = \text{Limite inferior}; \theta = \delta = 1,1; t = 3; r = 4; \text{Tempo expresso em segundos}$$

Instância	Zagregado	Limite Inferior	MR 1	MR 2	MR 3	MR 4	MR 5	MR 6	MR 7	MR 8	MR 9	MR 10	MR 11	MR 12	MR 13
A1	13484	13484	0,00%	0,28%	0,32%	0,33%	0,32%	0,02%	0,33%	0,32%	0,02%	0,32%	0,02%	0,32%	0,02%
A2	28052	28052	0,39%	0,00%	1,46%	3,06%	1,11%	0,83%	2,91%	0,99%	0,95%	0,99%	1,24%	1,01%	1,23%
A3	76115	76115	0,52%	1,08%	1,76%	2,61%	1,95%	2,91%	3,31%	2,70%	3,45%	2,20%	3,10%	2,15%	3,01%
A4	<u>126946</u>	126946					5,47%			4,04%	4,10%	3,62%	4,33%	3,88%	4,09%
A5	<u>197429</u>	<u>202736</u>						7,78%	5,67%	5,86%			4,88%		5,24%
B1	14835	14835	0,00%	0,00%	0,69%	0,81%	0,69%	0,69%	0,81%	0,69%	0,69%	0,69%	0,69%	0,69%	0,69%
B2	28645	28654	0,01%	0,00%	2,33%	2,01%	1,88%	1,97%	2,10%	0,40%	1,93%	0,40%	0,85%	0,40%	0,88%
B3	77859	77859		0,20%	2,97%	2,88%	3,57%	3,56%	3,71%	3,98%	4,27%	3,73%	2,95%	4,20%	2,78%
B4	126932	126932			3,80%	4,71%	3,97%	4,10%	4,66%	4,18%	4,36%	4,01%	4,25%	4,08%	4,30%
B5	<u>209849</u>	209791					8,62%	5,70%	6,59%	6,35%	8,76%	6,34%	5,74%	6,55%	5,58%
C1	18639	18639	0,29%	0,17%	0,57%	0,48%	0,55%	0,55%	0,58%	0,75%	0,75%	0,95%	0,95%	0,75%	0,75%
C2	36339	36339	0,64%	0,68%	2,91%	1,20%	2,06%	1,75%	1,17%	1,78%	1,82%	2,09%	1,63%	1,98%	1,53%
C3	<u>111161</u>	111117		7,36%	7,95%		3,74%			4,18%	4,01%	4,40%	3,83%	3,80%	4,56%
C4	<u>168503</u>	168441									10,88%	4,37%	4,36%		4,26%
C5	<u>258069</u>	257890												7,10%	
Nº Soluções			7	9	10	9	12	11	11	13	13	13	14	13	14
α			80%	80%	80%	80%	90%	90%	90%	95%	95%	99%	99%	99,5%	99,5%
μ			0%	20%	0%	20%	0%	10%	20%	0%	10%	0%	10%	0%	10%
FP			Não	Não	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
gap médio			0,26%	1,09%	2,48%	2,01%	2,83%	2,71%	2,89%	2,79%	3,54%	2,62%	2,77%	2,84%	2,78%
gap mínimo			0,00%	0,00%	0,32%	0,33%	0,32%	0,02%	0,33%	0,32%	0,02%	0,32%	0,02%	0,32%	0,02%
gap máximo			0,64%	7,36%	7,95%	4,71%	8,62%	7,78%	6,59%	6,35%	10,88%	6,34%	5,74%	7,10%	5,58%
Tempo médio			4240,57	4268,50	4029,53	4027,62	3993,64	4029,94	4277,51	4087,88	4012,93	3808,64	3880,47	3862,54	3817,26
Tempo mínimo			0,46	0,49	0,34	0,42	0,35	0,34	0,52	0,34	0,38	0,33	0,43	0,36	0,40
Tempo máximo			7477,77	7705,68	7929,15	7574,27	7498,59	7536,48	7738,33	7625,50	7495,15	7576,92	8184,26	8030,88	7499,82

Tabela 5 - gap's lpr MR

$$gap = \frac{Z_{heurística} - LI}{LI}, LI = \text{Limite inferior}; \theta = \delta = 1,1; t = 3; r = 4; \text{Tempo expresso em segundos}$$

Como se pode verificar, na estratégia RR os testes com menores *gap's* médios são os que resolvem menos instâncias com o tempo limite de uma hora. Com uma fixação de 99,5% são encontradas soluções para todas as instâncias com um *gap* médio de 2,85%. Estes resultados apresentam um *gap* médio entre 0,21%-3,53%, sendo o *gap* mais baixo de 0% e o mais alto de 14,29%.

Na estratégia MR também podemos verificar que os testes que apresentam um menor *gap* médio são os que resolvem menos instâncias dentro do limite de tempo imposto. Numa fixação até 99,5%, nenhum teste encontra solução para todas as instâncias. Por exemplo, o que encontra uma solução da instância C5 é o teste MR 12 com fixação de 99,5% sem desvio, mas neste não se obtém solução para as instâncias A5 e C4. No entanto, estas instâncias têm solução se for escolhida o teste MR 13 com fixação de 99,5% e desvio de 10% e no teste MR 11 com fixação de 99% e desvio de 10%.

Estes resultados apresentam um *gap* médio entre 0,26%-3,54%, sendo o *gap* mais baixo de 0% e o mais alto de 10,88%.

Em ambas as estratégias, só se encontram soluções admissíveis para as instâncias maiores com elevadas percentagens de capacidade fixas, pelo que a solução é quase determinada na fase 2.

Não é possível concluir sobre a vantagem ou desvantagem da inclusão do desvio, pois o efeito nos resultados difere de teste para teste.

Os tempos de resolução são bastante elevados. É importante salientar que a resolução do modelo agregado (Fase 1), que não depende da fixação dos serviços,

atinge o tempo limite em 7 das 15 instâncias. Destas, 6 são limites superiores do modelo agregado.

Na estratégia RR, o tempo computacional da Fase 2 nunca é superior a 5 minutos.

Na MR, o tempo computacional da Fase 2 é mais baixo do que na RR, e é sempre inferior a 3 minutos.

O tempo de resolução da Fase 3 atinge o limite de 1 hora em pelo menos 8 das 15 instâncias em ambas as estratégias.

6. Conclusão

Neste projeto desenvolveu-se uma matheurística a partir de modelos compactos conhecidos para encontrar soluções admissíveis para o problema MCARP.

Com a ajuda do CPLEX e a programação do algoritmo em C++, o método foi testado em instâncias habitualmente usadas para este efeito.

Os resultados obtidos não foram muito animadores. Quer no que diz respeito ao tempo, quer no que se refere ao valor das soluções obtidas. O uso de fixação *a posteriori* diminui bastante os tempos computacionais mas aumenta os *gap's*. As duas estratégias obtêm *gap's* semelhantes, porém a estratégia Multi-Rotas em tempo computacional mais reduzido.

As instâncias de maior dimensão registam um tempo computacional elevado, mesmo no caso do modelo agregado. No entanto, os valores médios de *gap* obtidos são em geral baixos. Contudo, é importante lembrar que estes valores médios foram calculados excluindo os problemas para os quais não foi possível encontrar solução admissível. Apenas uma combinação produziu soluções admissíveis para todas as instâncias, foi o teste RR 12 com $\alpha=95,5$ $\mu=0\%$ e com fixação *a posteriori*.

Uma das vantagens desta matheurística é que nos casos reais poderão existir algumas restrições práticas que simplificam o problema, como por exemplo determinadas ruas serem satisfeitas por uma rota particular por questões logísticas ou de tráfego. Estas serão fáceis de contemplar neste processo mas a escolha das sementes deverá ser repensada, porque poderá não fazer sentido neste contexto.

A resolução dos dois problemas de programação linear inteira incluídas na matheurística conduziu, por vezes, a tempos de computação bastante elevados. Deste modo, e atendendo à dimensão dos conjuntos de instâncias de teste, este fator limitou a quantidade de alternativas que foi possível ensaiar.

Como foi referido na análise dos resultados, o tempo computacional da segunda fase é bastante reduzido, existindo assim margem para alterações mesmo usando procedimentos mais pesados.

Como trabalho futuro seria interessante investir na fixação *a posteriori*. Em vez de estudar cada tarefa individualmente, analisar em simultâneo todas as tarefas. Outra alternativa seria, a partir de cada rota, escolher a tarefa por fixar mais conveniente. Seria também útil estudar outras formas de cálculo do custo de inserção da tarefa.

Poderá repensar-se a escolha de uma tarefa que pertence a um sub-circuito na fixação *a priori*, pois pode não fazer sentido inserir esta tarefa se não for possível incluir as restantes. Eventualmente, a escolha de cada vértice-semente poderia efetuar-se apenas após a fixação *a priori* da rota anterior estar concluída.

Como mencionado no início do trabalho, a motivação para este projeto foi a recolha de resíduos sólidos urbanos do município do Seixal, é portanto uma sequência natural adaptar o método estudado e testá-lo com instâncias reais deste município.

7. Referências bibliográficas

- [1] J. Bautista, E. Fernández, and J. Pereira, "Solving an urban waste collection problem using ants heuristics," *Computers and Operations Research*, vol. 35, pp. 3020–3033, 2008.
- [2] J. Belenguer, E. Benavent, P. Lacomme, and C. Prins, "Lower and upper bounds for the mixed capacitated arc routing problem," *Computers and Operations Research*, vol. 33, pp. 3363–3383, 2006.
- [3] G. Clarke and J. Wright, "Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points," *Operations Research*, vol. 12, pp. 568-581, 1964.
- [4] A. Corberán and C. Prins, "Recent results on arc routing problems: An annotated bibliography," *Networks*, vol. 56, pp. 59-60, 2010.
- [5] G. Ghiani, F. Guerriero, G. Improta, and R. Musmanno, "Waste collection in Southern Italy: solution of a real-life arc routing problem," *International Transactions in Operational Research*, vol. 12, pp. 135–144, 2005.
- [6] B. Golden, J. DeArmon, and E. Baker, "Computational experiments with algorithms for a class of routing problems," *Computers and Operations Research*, vol. 10, pp. 47–59, 1983.
- [7] B. Golden and R. Wong, "Capacitated arc routing problems," *Networks*, vol. 11, pp. 305–315, 1981.
- [8] L. Gouveia, M. Mourão, and L. Pinto, "Lower bounds for the mixed capacitated arc routing problem," *Computers and Operations Research*, vol. 37, pp. 692 – 699, 2010.
- [9] M. Guan, "Graphic programming using odd or even points," *Chinese mathematics*, vol. 1, pp. 273-277, 1962.
- [10] M. Mourão and L. Amado, "Heuristic method for a mixed capacitated arc routing problem: A refuse collection application," *European Journal of Operational Research*, vol. 160, pp. 139–153, 2005.
- [11] M. Mourão, A. Nunes, and C. Prins, "Heuristic method for the sectoring arc routing problem," *European Journal of Operational Research*, vol. 196, pp. 856-868, 2009.
- [12] C.S. Orloff, "A fundamental problem in vehicle routing," *Networks*, vol. 4, pp. 35-64, 1974.

- [13] H. Sachs, M. Stiebitz, and R. Wilson, "An historical note: Euler's Konigberg letters.," *Journal of Graph Theory*, vol. 12, pp. 133-139, 1988.
- [14] H. Taha, *Operation research: an introduction.*: Pearson Education/ Prentice Hall, 2003.
- [15] G. Ulusoy, "The fleet size and mix problem for capacitated arc routing," *European Journal of Operational Research*, vol. 22, pp. 329 -337, 1985.
- [16] W. Winston, *Operation research - applications and algorithm*, 4th ed.: Internacional student edition, 2004.
- [17] S. Wøhlk, "A decade of capacitated arc routing," in *The vehicle routing problem: Latest advances and new challenges*, Bruce Golden, S. Raghavan, and Edward Wasil, Eds., 2008, pp. 29-48.

8. Anexos

Anexo A: Algoritmo da matheurística

ALGORITMO MATHEURISTICA MCARP

Dados iniciais:

$G' = (V, A' \cup E)$ – Grafo inicial com N vértice
 $A'_R \subset A'$: Conjunto de arcos com procura em G'
 $E_R \subset E$: Conjunto de arestas com procura em G'
 Todos os vértices têm tarefas incidentes

$G=(V,A)$ – Grafo orientado com $A = A' \cup \{(i, j), (j, i) : (i, j) \in E\}$
 Vértice 1: depósito
 $A_R \subset A$: conjunto de arcos com procura
 q_{ij} Procura; c_{ij} Custo de recolha; $(i,j) \in A_R$
 d_{ij} Custo de passagem em vazio; $(i,j) \in A$
 P Número de veículos; W : Capacidade do veículo; λ : custo de depósito
 $QT = \sum_{(i,j) \in \{A'_R \cup E_R\}} q_{ij}$: Procura total
 $NMinRotas = \left\lceil \frac{QT}{W} \right\rceil$: número mínimo de rotas

Designação dos parâmetros a fixar:

α : limite máximo percentual de capacidade da procura total das tarefas a fixar em cada rota
 μ : limite máximo percentual de capacidade da procura total das tarefas a fixar em cada rota em que se permite que a tarefa fixa se afaste do depósito
 δ e θ : fatores de redução das distâncias médias utilizada nos critérios de seleção das sementes
 t : número máximo de ligações do sub-circuito
 r : fator de redução da distância permitida para o desvio
 FP: Verdadeiro - com Fixação *a posteriori*; Falso – sem Fixação *a posteriori*

Pseudo-código matheurística MCARP – Estratégia MR

```

Resolver Modelo Agregado ();

Calcular Distâncias (); // p. 16

Escolha das sementes (); // p.18

Fixação MR ();1

Fixação a posteriori (); // p.25

Resolver modelo válido com ligações fixadas ();
  
```

Resolver Modelo Agregado () {

Input: Dados iniciais

Output: $G_1=(V, A_1)$; // grafo (orientado) induzido pela solução do modelo agregado com $A_1 \subset A$

```

    Resolver modelo agregado pelo Cplex.
}
  
```

¹ Na estratégia RR, esta função é substituída por Fixação RR() apresentada na página 23 e todo o restante pseudo-código permanece igual.

Fixação MR () {**Input:** $G_1=(V, A_1)$; $Dist(i, j)$ $i, j \in V$; Vs ;**Output:** $ServSelec$; $ServFix(p)$, $LigPassUtil(p)$ $p=1, \dots, NMinRotas$; $ServSelec = \emptyset$ $DistMinSem = \min(Dist(i, j), \forall i, j \in Vs : i \neq j)$ Calcular **$Nlig(u, v)$** // Número mínimo de ligações entre os vértices u e v - Algoritmo *Floyd-Warshal* $Fim = \text{falso}$ **Para** $p=1$ **até** $NMinRotas$ $v \in Vs$ $Vs = Vs \setminus \{v\}$ $Qfixa(p) = 0$; $ServFix(p) = \emptyset$; $LigPassUtil(p) = \emptyset$ $vi(p) = v$ $vj(p) = v$ $fim(p) = \text{falso}$ **Enquanto** $\neg Fim$ **Para** $p=1$ **até** $NMinRotas$ $vi = vi(p)$ $vj = vj(p)$ **se** $\neg fim(p)$ *Fixação a priori()* // p.21 $vi(p) = vi$ $vj(p) = vj$ **Se** $fim(p)$, $p = 1, \dots, NMinRotas$ $Fim = \text{verdadeiro}$

}

Resolver modelo válido com ligações fixadas () {**Input:** Dados iniciais*; $ServFix(p)$ $p=1, \dots, NMinRotas$;**Output:** Conjunto de rotas para o MCARPResolver Modelo válido fixando na rota p as tarefas $(a, b) \in ServFix(p)$ $p=1, \dots, NMinRotas$, pelo Cplex

}

Anexo B: Resultados *mval*

Instâncias	Z*agregado	Limite inferior	RR 1	RR 2	RR 3	RR 4	RR 5	MR 1	MR 2	MR 3	MR 4	MR 5
1A	230	230	230	263	251	230	239	230	263	251	230	239
1B	261	261	261	276	261	261	320	262	268	286	261	278
1C	309	309	349	394	375	349	502	359	440	390	359	440
2A	324	324	324	346	353	324	346	324	366	340	332	354
2B	395	395	420	451	439	411	437	395	399	415	420	429
2C	521	521	608	665	<u>684</u>	608	665	609	<u>755</u>	590	609	<u>755</u>
3A	115	115	116	123	124	116	123	120	131	132	118	125
3B	142	142	142	145	142	142	142	142	152	142	142	149
3C	163	166	180	201	183	176	193	181	193	182	185	203
4A	580	580	609	649	618	600	604	598	638	624	596	652
4B	650	650	658	744	672	662	705	664	721	686	662	701
4C	630	630	661	710	683	651	674	676	726	681	658	704
4D	746	746	844	<u>953</u>	<u>959</u>	<u>855</u>	<u>918</u>	855	900	892	859	913
5A	597	597	597	711	639	607	709	602	705	636	602	653
5B	613	613	631	672	649	631	642	640	708	670	667	686
5C	697	697	729	743	748	753	793	748	806	772	729	764
5D	718	719	<u>855</u>	<u>869</u>	841	825	<u>908</u>	822	<u>898</u>	840	801	859
6A	326	326	327	352	339	331	353	327	362	346	331	356
6B	317	317	325	353	375	325	353	317	392	386	317	392
6C	355	365	414	482	458	414	482	448	523	496	448	523
7A	364	364	364	444	423	364	458	367	445	426	379	460
7B	412	412	424	526	497	424	526	434	507	486	441	524
7C	417	424	482	572	545	482	572	503	548	522	503	548
8A	581	581	581	614	594	586	608	586	623	598	581	597
8B	531	531	531	557	571	531	585	534	619	553	531	555
8C	617	617	716	785	<u>732</u>	732	755	717	758	<u>735</u>	724	760
9A	458	458	458	531	499	458	509	458	536	496	<u>459</u>	518
9B	453	453	<u>469</u>	522	523	<u>463</u>	532	<u>463</u>	520	499	<u>467</u>	540
9C	428	428	<u>461</u>	531	487	<u>459</u>	540	<u>446</u>	526	526	<u>458</u>	586
9D	514	514	<u>617</u>	746	688	<u>593</u>	<u>687</u>	<u>559</u>	<u>662</u>	618	<u>573</u>	<u>665</u>
10A	634	634	634	699	663	638	692	634	687	664	634	662
10B	661	661	665	705	683	667	692	665	705	676	<u>670</u>	690
10C	623	623	<u>646</u>	<u>727</u>	<u>693</u>	644	678	<u>644</u>	<u>748</u>	683	<u>642</u>	<u>709</u>
10D	642	643	<u>712</u>	<u>810</u>	<u>734</u>	712	<u>791</u>	<u>712</u>	<u>774</u>	790	<u>717</u>	<u>773</u>
Nº soluções			34	34	34	34	34	34	34	34	34	34
α			80%	80%	70%	80%	80%	80%	80%	70%	80%	80%
μ			0%	0%	0%	10%	10%	0%	0%	0%	10%	10%
FP			Não	Sim	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Sim	Não	Sim
<i>gap</i> médio			6%	17%	13%	5%	17%	6%	18%	13%	6%	17%
<i>gap</i> mínimo			0%	2%	0%	0%	0%	0%	1%	0%	0%	3%
<i>gap</i> máximo			20%	45%	34%	19%	62%	23%	45%	36%	23%	45%

Tabela 6 - Valor da solução heurística *mval*

Anexo C: Tempos computacionais *mval*

Instâncias	RR 1			RR 2			RR 3			RR 4			RR 5		
	Fase 1	Fase 2	Total	Fase 2	Fase 3	Total	Fase 2	Fase 3	Total	Fase 2	Fase 3	Total	Fase 2	Fase 3	Total
1A	0,84	0,13	70,16	0,13	0,32	1,29	0,13	1,97	2,93	0,14	29,38	30,35	0,15	0,20	1,18
1B	0,15	0,18	1,51	0,11	11,24	11,50	0,11	1,96	2,22	0,07	2,02	2,23	0,11	7,97	8,23
1C	1,08	0,14	29,69	0,09	18,23	19,40	0,09	3177,22	3178,40	0,06	40,16	41,30	0,10	27,61	28,79
2A	0,11	0,12	0,56	0,05	0,17	0,32	0,10	0,33	0,53	0,05	0,32	0,47	0,07	0,18	0,36
2B	0,16	0,11	1,78	0,05	0,22	0,43	0,10	1,74	2,00	0,05	1,03	1,25	0,07	0,27	0,50
2C	11,04	0,12	1666,96	0,09	119,17	130,30	0,11	3632,15	3643,30	0,08	2239,41	2250,53	0,08	97,11	108,23
3A	0,17	0,11	0,29	0,06	0,38	0,60	0,11	0,34	0,61	0,06	0,28	0,50	0,08	0,26	0,51
3B	0,16	0,11	0,62	0,08	0,55	0,80	0,12	0,70	0,98	0,06	0,85	1,07	0,07	0,27	0,51
3C	0,94	0,12	11,55	0,09	9,67	10,70	0,12	1417,66	1418,72	0,08	17,61	18,64	0,09	10,38	11,41
4A	1,45	0,22	7,96	0,13	4,55	6,13	0,21	0,98	2,64	0,16	0,64	2,24	0,15	0,62	2,22
4B	0,21	0,23	3,22	0,17	16,11	16,49	0,23	13,43	13,86	0,17	0,92	1,30	0,15	2,14	2,50
4C	0,74	0,28	176,82	0,19	13,73	14,66	0,25	1181,43	1182,42	0,19	13,54	14,46	0,17	5,62	6,53
4D	15,06	0,30	2088,01	0,24	3707,01	3722,31	0,30	3643,83	3659,19	0,25	3639,80	3655,11	0,22	3698,07	3713,35
5A	0,41	0,21	7,90	0,15	1,68	2,23	0,23	11,55	12,19	0,10	10,17	10,68	0,24	1,16	1,81
5B	33,85	0,26	567,05	0,19	3,01	37,05	0,25	351,21	385,32	0,18	40,51	74,54	0,27	3,42	37,54
5C	0,11	0,24	13,79	0,17	8,34	8,62	0,23	16,77	17,11	0,16	10,96	11,24	0,23	17,20	17,54
5D	132,41	0,19	3638,48	0,23	3686,62	3819,27	0,29	1500,36	1633,06	0,24	103,07	235,72	0,20	3698,56	3831,17
6A	0,44	0,16	12,39	0,12	1,12	1,68	0,16	20,40	21,00	0,12	2,71	3,26	0,18	0,90	1,52
6B	0,52	0,16	20,56	0,10	4,54	5,17	0,16	7,77	8,46	0,11	20,44	21,07	0,19	4,65	5,36
6C	3,61	0,20	102,41	0,15	6,67	10,43	0,20	263,98	267,79	0,16	93,38	97,14	0,14	4,68	8,43
7A	1,16	0,24	569,02	0,17	2,27	3,60	0,25	11,17	12,58	0,18	69,60	70,94	0,17	6,02	7,34
7B	0,17	0,25	14,28	0,17	5,26	5,59	0,23	6,09	6,49	0,10	13,19	13,46	0,25	4,66	5,07
7C	3,47	0,30	47,04	0,23	233,33	237,02	0,29	3590,44	3594,20	0,23	46,95	50,65	0,20	193,83	197,49
8A	0,29	0,19	6,53	0,13	3,83	4,25	0,19	6,58	7,06	0,14	4,40	4,83	0,13	0,78	1,20
8B	1,11	0,23	69,42	0,18	136,43	137,72	0,23	74,73	76,07	0,17	16,27	17,55	0,15	79,46	80,73
8C	52,55	0,17	191,13	0,20	3461,15	3513,90	0,26	3640,04	3692,84	0,20	488,53	541,28	0,18	17,67	70,39
9A	1,39	0,22	3448,48	0,26	4,94	6,58	0,34	20,87	22,59	0,25	3645,46	3647,10	0,24	2,43	4,06
9B	16,28	0,39	3627,43	0,30	60,72	77,29	0,39	3627,91	3644,58	0,30	3630,80	3647,38	0,44	133,29	150,01
9C	46,87	0,42	3622,79	0,23	3641,42	3688,51	0,33	3653,62	3700,81	0,34	3626,69	3673,89	0,28	138,52	185,66
9D	323,14	0,59	3624,20	0,51	3664,49	3988,14	0,48	3673,02	3996,64	0,34	3646,99	3970,46	0,40	3719,95	4043,48
10A	0,75	0,43	163,19	0,29	6,56	7,60	0,30	13,42	14,47	0,29	173,94	174,98	0,55	2,85	4,16
10B	3,08	0,38	81,00	0,30	167,41	170,79	0,19	219,33	222,60	0,29	3126,82	3130,19	0,42	167,70	171,19
10C	2,85	0,43	3684,33	0,35	844,61	847,80	0,23	3768,58	3771,66	0,35	3629,99	3633,19	0,46	1820,57	1823,87
10D	37,09	0,63	3747,82	0,53	4278,80	4316,42	0,52	3982,62	4020,24	0,35	3634,66	3672,11	0,41	3666,81	3704,32
Nº instâncias com tempo de resolução >1hora						5			8			7			4
Máximo (seg)						0,53			0,52			0,35			0,55

Tabela 7 - Tempos computacionais *mval* - RR

Anexo D: Tempos computacionais mval - MR

Instâncias	MR 1			MR 2			MR 3			MR 4			MR 5		
	Fase 1	Fase 2	Total	Fase 2	Fase 3	Total	Fase 2	Fase 3	Total	Fase 2	Fase 3	Total	Fase 2	Fase 3	Total
1A	0,84	0,14	117,52	0,14	0,34	1,32	0,19	3,06	4,08	0,08	28,33	29,25	0,16	0,29	1,29
1B	0,15	0,09	0,49	0,72	0,61	0,86	0,13	5,18	5,45	0,10	0,56	0,80	0,21	0,61	0,96
1C	1,08	0,11	27,42	28,61	0,09	1426,92	1428,10	1460,17	1461,32	0,06	14,56	15,70	0,06	2017,94	2019,09
2A	0,11	0,06	0,36	0,52	0,50	0,67	0,06	0,19	0,36	0,05	0,34	0,50	0,08	0,28	0,47
2B	0,16	0,07	0,25	0,48	0,51	0,87	0,06	0,44	0,66	0,05	0,19	0,40	0,08	0,42	0,66
2C	11,04	0,09	203,76	214,88	0,07	3760,88	3771,99	155,86	166,98	0,05	132,31	143,40	0,08	4172,56	4183,68
3A	0,17	0,09	1,60	1,86	0,09	0,41	0,66	0,47	0,70	0,05	2,41	2,62	0,07	0,29	0,53
3B	0,16	0,07	0,49	0,72	0,20	0,41	0,77	0,39	0,62	0,05	0,66	0,87	0,08	0,63	0,88
3C	0,94	0,08	36,10	37,12	0,13	31,40	32,47	506,30	507,32	0,06	36,41	37,41	0,09	16,66	17,69
4A	1,45	0,09	0,38	1,92	0,22	0,55	2,21	1,34	2,88	0,11	6,76	8,32	0,18	33,28	34,90
4B	0,21	0,11	5,56	5,87	0,22	10,72	11,15	5,20	5,58	0,10	0,74	1,05	0,16	6,51	6,88
4C	0,74	0,10	324,59	325,43	0,22	671,29	672,24	818,04	818,94	0,10	23,79	24,64	0,19	512,73	513,66
4D	15,06	0,17	1222,63	1237,86	0,27	591,80	607,12	1203,22	1218,51	0,13	186,14	201,32	0,24	459,71	475,00
5A	0,41	0,14	12,51	13,06	0,20	26,97	27,59	1,74	2,39	0,11	1,64	2,16	0,16	4,89	5,45
5B	33,85	0,11	419,71	453,66	0,16	13,51	47,52	842,89	876,90	0,11	10,80	44,76	0,20	23,28	57,33
5C	0,11	0,13	23,07	23,31	0,20	29,17	29,49	57,95	58,43	0,14	9,16	9,41	0,17	19,01	19,29
5D	132,41	0,16	2059,72	2192,29	0,17	3635,85	3768,43	2907,40	3040,16	0,12	117,42	249,96	0,23	2005,71	2138,35
6A	0,44	0,08	6,47	6,99	0,19	0,62	1,25	57,82	58,43	0,07	1,55	2,06	0,11	0,36	0,91
6B	0,52	0,11	7,88	8,51	0,17	93,83	94,53	10,63	11,40	0,10	10,76	11,38	0,11	86,63	87,26
6C	3,61	0,13	2248,16	2251,89	0,11	53,65	57,37	416,35	420,17	0,14	1603,56	1607,30	0,13	48,95	52,69
7A	1,16	0,17	198,55	199,88	0,23	2,18	3,58	18,14	19,46	0,17	19,01	20,34	0,11	3,21	4,48
7B	0,17	0,22	17,50	17,89	0,23	2,61	3,01	39,97	40,29	0,10	11,70	11,96	0,14	1,31	1,62
7C	3,47	0,20	106,98	110,64	0,17	95,50	99,14	1136,62	1140,26	0,18	54,53	58,18	0,19	100,62	104,27
8A	0,29	0,13	14,41	14,83	0,11	11,15	11,56	8,16	8,59	0,14	0,72	1,15	0,08	1,12	1,50
8B	1,11	0,18	103,07	104,37	0,20	85,96	87,27	4,56	5,83	0,14	7,85	9,11	0,11	14,60	15,83
8C	52,55	0,18	319,49	372,21	0,14	448,25	500,94	3722,38	3775,08	0,16	1979,79	2032,44	0,11	1753,21	1805,87
9A	1,39	0,25	3884,13	3885,77	0,30	5,62	7,30	21,98	23,57	0,30	3860,12	3861,80	0,22	6,96	8,56
9B	16,28	0,25	3623,54	3640,07	0,34	213,25	229,87	173,75	190,28	0,23	3950,39	3966,90	0,17	16,55	33,00
9C	46,87	0,16	3621,28	3668,30	0,23	2281,47	2328,57	3715,02	3762,06	0,34	4231,60	4278,81	0,17	681,35	728,38
9D	323,14	0,34	3616,16	3939,64	0,48	3670,09	3993,71	3711,29	4034,77	0,23	3690,33	4013,70	0,34	3713,15	4036,63
10A	0,75	0,20	36,65	37,60	0,39	21,58	22,72	26,99	28,14	0,19	94,51	95,45	0,20	25,82	26,77
10B	3,08	0,23	113,83	117,15	0,34	16,69	20,11	278,31	281,55	0,23	3405,72	3409,03	0,23	212,50	215,82
10C	2,85	0,27	3756,57	3759,68	0,22	3639,27	3642,34	193,01	196,13	0,27	3979,49	3982,60	0,27	3637,74	3640,85
10D	37,09	0,25	3777,32	3814,66	0,38	4256,85	4294,33	3684,85	3722,18	0,30	3662,19	3699,58	0,39	2876,57	2914,95
Nº instâncias com tempo de resolução > 1hora			6			5		4			6				3
Máximo (seg)			0,34			0,48		0,40			0,34			0,39	

Tabela 8 - Tempos computacionais mval - MR

Anexo E: Resultados *lpr*

Instância	Zagregado	Limite Inferior	RR 1	RR 2	RR 3	RR 4	RR 5	RR 6	RR 7	RR 8	RR 9	RR 10	RR 11	RR 12
A1	13484	13484	13484	13484	13527	13515	13527	13671	13515	13527	13671	13527	13671	13527
A2	28052	28052	28102	28052	28446	28911	28255	28319	28867	28295	28340	28328	28295	28393
A3	76115	76115	<u>76694</u>	<u>76620</u>	<u>78201</u>	<u>77803</u>	<u>78458</u>	<u>78516</u>	<u>78588</u>	<u>78304</u>	<u>78580</u>	<u>78415</u>	<u>78689</u>	<u>78366</u>
A4	<u>126946</u>	126946		<u>129674</u>				<u>135169</u>	<u>134029</u>	<u>132484</u>	<u>131027</u>	<u>131481</u>	<u>131133</u>	<u>130724</u>
A5	<u>197429</u>	202736					<u>218643</u>	<u>219899</u>		<u>214694</u>		<u>213433</u>		<u>212627</u>
B1	14835	14835	14835	14835	14937	14955	14937	14937	14955	14937	14937	14937	14937	14937
B2	28645	28654	28654	28654	29162	29225	28782	29491	29280	28740	29452	28740	29525	28740
B3	77859	77859	<u>77865</u>	<u>78007</u>	<u>79480</u>	<u>79846</u>	<u>80777</u>	<u>80590</u>	<u>80205</u>	<u>81210</u>	<u>80346</u>	79750	79801	79996
B4	126932	126932			<u>141456</u>	<u>136402</u>	<u>131641</u>	<u>131662</u>	<u>132242</u>	<u>132204</u>	<u>131173</u>	<u>132775</u>	<u>130854</u>	<u>131381</u>
B5	<u>209849</u>	209791					<u>221286</u>	<u>221034</u>	<u>219248</u>	<u>222812</u>	<u>221538</u>	<u>222901</u>	<u>221198</u>	<u>222736</u>
C1	18639	18639	18671	18671	18728	18728	18747	18747	18747	18679	18679	18716	18716	18716
C2	36339	36339	<u>36538</u>	<u>36679</u>	37284	36954	37287	36975	37322	37247	36893	37019	36883	37014
C3	<u>111161</u>	111117				<u>115133</u>	<u>114897</u>	<u>115465</u>	<u>115170</u>	<u>115777</u>	<u>115617</u>	<u>115467</u>	<u>115279</u>	<u>115493</u>
C4	<u>168503</u>	168441						<u>179538</u>		<u>176.851</u>	<u>192517</u>	<u>175644</u>	<u>176077</u>	<u>175880</u>
C5	<u>258069</u>	257890					<u>271006</u>							<u>274431</u>
Nº Soluções			8	9	9	10	13	14	12	14	13	14	13	15
α			80%	80%	80%	80%	90%	90%	90%	95%	95%	99%	99%	99,5%
μ			0%	20%	0%	20%	0%	10%	20%	0%	10%	0%	10%	0%
FP			Não	Não	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
<i>gap</i> médio			0,21%	0,46%	2,61%	2,41%	2,90%	3,53%	2,80%	2,99%	3,43%	2,71%	2,61%	2,85%
<i>gap</i> mínimo			0,00%	0,00%	0,32%	0,23%	0,32%	0,58%	0,23%	0,21%	0,21%	0,30%	0,41%	0,30%
<i>gap</i> máximo			0,76%	2,15%	11,44%	7,46%	7,85%	8,47%	5,58%	6,21%	14,29%	6,25%	5,44%	6,41%

Tabela 9 - Valor da solução heurística *lpr*-RR

Instância	Zagregado	Limite Inferior	MR 1	MR 2	MR 3	MR 4	MR 5	MR 6	MR 7	MR 8	MR 9	MR 10	MR 11	MR 12	MR 13
A1	13484	13484	13484	13522	13527	13529	13527	13487	13529	13527	13487	13527	13487	13527	13487
A2	28052	28052	28162	28052	28461	28911	28362	28286	28867	28330	28319	28330	28399	28334	28397
A3	76115	76115	<u>76509</u>	<u>76935</u>	<u>77451</u>	<u>78102</u>	<u>77598</u>	<u>78331</u>	<u>78636</u>	<u>78170</u>	<u>78743</u>	<u>77792</u>	<u>78471</u>	<u>77749</u>	<u>78407</u>
A4	<u>126946</u>	126946					<u>133889</u>			<u>132076</u>	<u>132148</u>	<u>131542</u>	<u>132446</u>	<u>131866</u>	<u>132141</u>
A5	<u>197429</u>	202736						<u>218517</u>	<u>214234</u>	<u>214613</u>			<u>212630</u>		<u>213355</u>
B1	14835	14835	14835	14835	14937	14955	14937	14937	14955	14937	14937	14937	14937	14937	14937
B2	28645	28654	<u>28656</u>	28654	29322	29230	29192	29218	29257	28769	29207	28769	28898	28769	28905
B3	77859	77859		<u>78017</u>	<u>80175</u>	<u>80102</u>	<u>80635</u>	<u>80627</u>	<u>80748</u>	<u>80961</u>	<u>81187</u>	<u>80762</u>	<u>80152</u>	<u>81127</u>	<u>80022</u>
B4	126932	126932			<u>131754</u>	<u>132905</u>	<u>131970</u>	<u>132132</u>	<u>132847</u>	<u>132232</u>	<u>132471</u>	<u>132016</u>	<u>132326</u>	<u>132110</u>	<u>132385</u>
B5	<u>209849</u>	209791					<u>227872</u>	<u>221742</u>	<u>223613</u>	<u>223107</u>	<u>228167</u>	<u>223098</u>	<u>221832</u>	<u>223532</u>	<u>221502</u>
C1	18639	18639	18693	18671	18746	18728	18741	18741	18747	18778	18778	18816	18.816	18778	18778
C2	36339	36339	<u>36570</u>	<u>36587</u>	37396	36775	37089	36974	36763	36985	37001	37098	36.931	37060	36896
C3	<u>111161</u>	111117		<u>119291</u>	<u>119955</u>		<u>115275</u>			<u>115765</u>	<u>115573</u>	<u>116009</u>	<u>115378</u>	<u>115337</u>	<u>116183</u>
C4	<u>168503</u>	168441									<u>186767</u>	<u>175800</u>	<u>175779</u>		<u>175619</u>
C5	<u>258069</u>	257890												<u>276197</u>	
Nº Soluções			7	9	10	9	12	11	11	13	13	13	14	13	14
α			80%	80%	80%	80%	90%	90%	90%	95%	95%	99%	99%	99,5%	99,5%
μ			0%	20%	0%	20%	0%	10%	20%	0%	10%	0%	10%	0%	10%
FP			Não	Não	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
<i>gap</i> médio			0,26%	1,09%	2,48%	2,01%	2,83%	2,71%	2,89%	2,79%	3,54%	2,62%	2,77%	2,84%	2,78%
<i>gap</i> mínimo			0,00%	0,00%	0,32%	0,33%	0,32%	0,02%	0,33%	0,32%	0,02%	0,32%	0,02%	0,32%	0,02%
<i>gap</i> máximo			0,64%	7,36%	7,95%	4,71%	8,62%	7,78%	6,59%	6,35%	10,88%	6,34%	5,74%	7,10%	5,58%

Tabela 10 - Valor da solução heurística *lpr*-MR

Anexo F: Tempos computacionais Ipr - RR

Instância	RR 1			RR 2			RR 3			RR 4			RR 5			RR 6			
	F1	F2	F3	Total	F2	F3	Total	F2	F3	Total	F2	F3	Total	F2	F3	Total	F2	F3	Total
A1	0,11	0,21	0,25	0,56	0,20	0,18	0,49	0,23	0,13	0,47	0,30	0,34	0,75	0,17	0,13	0,41	0,24	0,27	0,62
A2	0,16	0,50	3,44	4,09	0,39	1,67	12,21	0,38	3,34	3,87	0,66	17,13	17,94	0,34	0,41	0,91	0,35	3,23	3,73
A3	92,63	4,67	3819,18	3916,48	4,50	3695,00	3792,13	4,77	3713,29	3810,69	6,71	3736,90	3836,24	4,54	3674,73	3771,90	4,60	3776,71	3873,94
A4	3634,82	17,23	3604,86	7256,91	25,24	3675,53	7335,59	19,03	3671,25	7325,10	31,31	3728,72	7394,85	18,67	3634,51	7288,00	21,66	3778,02	7434,50
A5	3638,56	126,76	3695,32	7460,64	138,92	3621,88	7399,36	137,44	3607,85	7383,85	165,36	3770,35	7574,27	127,54	3614,16	7380,26	140,65	3656,63	7435,84
B1	0,14	0,15	0,18	0,46	0,08	0,43	0,65	0,08	0,13	0,34	0,08	0,20	0,42	0,07	0,13	0,35	0,09	0,11	0,34
B2	0,21	0,18	4,66	5,05	0,18	1,25	1,64	0,17	0,90	1,29	0,31	0,48	1,00	0,18	0,21	0,60	0,15	0,44	0,80
B3	0,83	3,15	3605,70	3609,68	3,24	3674,65	3678,72	3,14	3607,52	3611,48	3,42	3764,25	3768,50	3,20	3627,72	3631,75	3,01	3690,45	3694,29
B4	39,44	15,44	3604,16	3659,04	15,82	3637,65	3692,91	13,46	3649,11	3702,01	14,46	3625,27	3679,17	15,40	3618,84	3673,67	13,81	3685,18	3738,42
B5	3634,29	72,18	3605,30	7311,77	77,92	3655,27	7367,48	84,47	3623,59	7342,35	76,18	3616,87	7327,34	71,65	3628,87	7334,81	88,95	3645,18	7368,42
C1	861,17	0,12	2,34	863,62	0,11	0,96	862,24	0,14	0,36	861,67	0,28	0,39	861,83	0,13	1,12	862,42	0,13	0,18	861,47
C2	3834,28	0,37	3643,12	7477,77	0,39	3669,44	7504,11	0,53	9,47	3844,28	0,40	3,48	3838,16	0,40	17,23	3851,91	0,40	2,79	3837,47
C3	3634,39	11,42	3613,52	7259,33	10,31	3640,46	7285,16	12,28	3645,62	7292,29	9,20	3618,08	7261,67	12,63	3639,71	7286,10	12,63	3652,00	7299,02
C4	3631,08	72,76	3606,95	7310,79	91,18	3666,89	7389,15	63,65	3639,44	7334,17	76,98	3649,57	7357,63	80,05	3611,75	7322,88	79,44	3653,31	7363,83
C5	3638,42	223,15	3610,83	7472,40	254,39	3812,87	7705,68	226,51	4064,22	7929,15	239,29	3616,87	7494,58	220,19	3639,98	7498,59	230,12	3667,94	7536,48

Nº instâncias com tempo de resolução > 1 hora	7	10	10	10	10	10	9	10	10	10	10	10	9	10	10	10	9	9	10
Máximo (minutos)					4,24		3,775			3,988			3,67						3,835

Instância	RR 7			RR 8			RR 9			RR 10			RR 11			RR 12			
	F1	F2	F3	Total	F2	F3	Total	F2	F3	Total	F2	F3	Total	F2	F3	Total	F2	F3	Total
A1	0,11	0,26	0,24	0,61	0,21	0,14	0,45	0,19	0,27	0,58	0,19	0,13	0,42	0,19	0,29	0,59	0,18	0,13	0,42
A2	0,16	0,46	0,38	0,99	0,60	1,65	2,40	0,36	3,98	4,49	0,39	2,47	3,02	0,49	2,07	2,71	0,44	0,62	1,21
A3	92,63	4,99	3644,71	3742,34	5,23	3688,93	3786,80	4,50	3637,55	3734,69	4,70	3708,87	3806,20	4,55	3689,19	3786,38	4,56	3756,89	3854,09
A4	3634,82	22,98	3638,35	7296,15	20,50	3736,73	7392,05	25,19	3648,54	7308,55	22,89	3899,66	7557,37	24,99	3687,16	7346,97	25,39	4026,63	7686,84
A5	3638,56	144,59	3824,17	7607,32	144,53	3832,68	7615,77	136,52	3653,86	7428,94	154,67	3626,63	7419,86	194,40	4351,30	8184,26	183,50	4208,82	8030,88
B1	0,14	0,06	0,31	0,52	0,06	0,14	0,34	0,10	0,14	0,38	0,06	0,12	0,33	0,10	0,19	0,43	0,07	0,15	0,36
B2	0,21	0,16	0,43	0,80	0,18	0,38	0,77	0,23	0,35	0,78	0,15	0,19	0,56	0,20	0,54	0,95	0,17	0,21	0,59
B3	0,83	3,46	3681,63	3685,92	3,46	3825,70	3829,98	3,30	3680,59	3684,71	3,21	148,08	152,12	5,41	242,30	248,55	3,56	234,38	238,77
B4	39,44	16,40	3880,03	3935,86	16,61	3719,55	3775,60	16,22	3800,77	3856,43	12,21	3667,62	3719,26	20,46	4191,35	4251,24	14,52	3714,58	3768,53
B5	3634,29	135,15	3968,89	7738,33	79,68	3897,92	7611,89	76,27	3654,74	7365,30	94,21	3666,76	7395,26	93,00	3654,95	7382,24	69,96	3627,40	7331,65
C1	861,17	0,24	0,34	861,75	0,11	0,20	861,47	0,11	0,23	861,51	0,25	0,34	861,75	0,14	0,32	861,63	0,10	0,26	861,52
C2	3834,28	1,13	3205,23	7040,64	0,37	8,48	3843,12	0,41	6,66	3841,35	0,60	0,73	3835,61	0,43	1,24	3835,95	0,34	0,78	3835,40
C3	3634,39	12,25	3646,06	7292,70	15,03	3781,08	7430,50	12,53	3623,39	7270,31	13,54	3706,85	7354,78	12,74	3694,75	7341,88	9,48	3677,53	7321,40
C4	3631,08	90,93	3663,26	7385,27	65,94	3844,59	7541,61	77,61	3632,08	7340,77	93,05	3721,95	7446,08	92,27	3676,20	7399,55	85,60	3705,27	7421,95
C5	3638,42	262,02	3673,04	7573,48	283,34	3703,74	7625,50	241,78	3614,95	7495,15	241,82	3696,68	7576,92	285,85	3639,50	7563,77	265,80	3680,30	7584,52

Nº instâncias com tempo de resolução > 1 hora	7	9	10	10	10	10	9	10	10	10	9	9	9	9	8	8	8	9	9
Máximo (minutos)					4,367		4,722		4,03			4,03			4,764				4,43

Tabela 11 - Tempos computacionais Ipr - RR

Anexo G: Tempos computacionais *lpr* -MR

Instância	MR 1			MR 2			MR 3			MR 4			MR 5			MR 6			MR 7			
	F1	F2	F3	Total	F2	F3	Total	F2	F3	Total	F2	F3	Total	F2	F3	Total	F2	F3	Total	F2	F3	Total
	A1	0.11	0.201	0.252	0.56	0.171	0.188	0.47	0.183	0.131	0.42	0.328	0.251	0.69	0.255	0.143	0.51	0.235	0.159	0.50	0.197	0.14
A2	0.16	0.347	3.247	3.75	0.343	1.131	1.81	0.576	1.384	1.02	0.576	1.384	1.458	0.536	0.871	1.56	0.369	0.39	0.92	0.342	0.521	1.02
A3	92.63	2.25	3697.08	3791.96	2.215	3939.07	4033.92	2.48	3678.64	3773.75	3.195	3694.55	3790.38	2.887	3713.86	3809.38	3.761	3763.94	3860.33	3.45	3770.04	3866.12
A4	3634.82	11.529	3603.42	7249.77	11.513	3606.2	7252.53	12.698	3709.75	7357.27	12.384	4037.5	7684.70	12.074	3640.55	7287.44	13.039	3695.68	7343.54	12.348	3721.95	7369.12
A5	3638.56	52.931	3629.75	7321.24	57.689	3605.28	7301.53	71.561	3609.43	7319.55	77.373	3608.75	7324.68	76.43	3751.52	7466.51	59.786	3733.28	7431.63	81.5	3654.41	7374.47
B1	0.14	0.088	0.281	0.51	0.102	0.329	0.57	0.127	0.118	0.45	0.109	0.139	0.39	0.075	0.143	0.36	0.061	0.154	0.36	0.082	0.143	0.37
B2	0.21	0.158	1.511	1.88	0.173	3.425	3.81	0.224	1.066	1.50	0.161	0.357	0.73	0.165	1.035	1.41	0.16	0.764	1.14	0.156	0.288	0.66
B3	0.83	1.821	3653.72	3656.37	1.715	3604.85	3607.39	2.066	3630	3632.89	1.826	3664.13	3666.78	1.814	3622.83	3625.47	2.507	3721.46	3724.80	1.804	3780.78	3783.41
B4	39.44	7.936	3668.85	3716.22	6.645	3604.27	3650.35	8.259	3618.08	3665.78	8.931	3627.42	3675.79	8.051	3613.94	3661.43	15.144	3794.08	3848.66	8.002	3736.7	3784.14
B5	3634.29	43.736	3657.19	7335.22	35.398	1315.23	4984.92	44.045	3621.98	7300.32	31.073	3611.92	7278.18	36.074	3611.05	7281.41	71.694	3796.47	7502.45	48.529	3668.84	7351.66
C1	861.17	0.147	2.306	863.62	0.16	0.866	862.19	0.207	0.247	861.62	0.079	0.391	861.64	0.134	0.13	861.43	0.124	0.25	861.54	0.09	0.153	861.41
C2	3834.28	0.307	3655.98	7490.57	0.299	3656.01	7490.59	0.477	72.748	3907.51	0.894	2.544	3837.72	0.303	0.701	3835.28	0.296	3.323	3837.90	0.256	1.697	3836.23
C3	3634.39	6.162	3636.51	7277.06	4.995	3627.88	7267.27	6.504	3632.19	7273.08	6.098	3659.56	7294.05	6.117	3629.3	7269.81	6.536	3609.99	7250.92	6.101	3663.32	7303.81
C4	3631.08	30.53	3650.53	7312.14	32.804	3607.37	7271.25	42.86	3619.21	7293.15	35.666	3687.62	7354.37	42.884	3613.1	7287.06	31.652	3608.41	7271.14	42.313	3695.81	7369.20
C5	3638.42	108.108	3636.31	7382.84	106.86	3610.98	7356.26	130	3651.03	7419.45	107.431	3672.87	7418.72	112.412	3645.42	7396.25	110.417	3616.4	7365.24	129.901	3756.52	7524.84

Nº instâncias com tempo de resolução > 1hora	7	10	10	9	10	9	10	9	10	10	9	10	10	9	10	10	9	10	10	9	10	10
Máximo(mínutos)		1.80			1.78			2.17		1.79			1.87		1.84		2.17					

Instância	MR 8			MR 9			MR 10			MR 11			MR 12			MR 13			
	F1	F2	F3	Total	F2	F3	Total	F2	F3	Total	F2	F3	Total	F2	F3	Total	F2	F3	Total
	A1	0.11	0.202	0.136	0.45	0.178	0.124	0.41	0.183	0.142	0.43	0.217	0.143	0.47	0.212	0.134	0.46	0.183	0.124
A2	0.16	0.373	0.348	0.88	0.353	0.367	0.88	0.589	0.405	1.15	0.42	0	0.94	0.367	0.345	0.87	0.386	0	0.92
A3	92.63	2.635	3710.61	3805.88	2.545	3942.42	4037.60	3.057	3726.27	3821.96	2.555	3.641	3735.83	2.615	3738.07	3833.32	2.515	3.650	3745.11
A4	3634.82	12.137	3750.47	7397.43	12.226	3731.16	7378.21	12.184	3663.98	7310.98	12.508	3866.4	7513.73	12.236	3680.47	7327.53	12.645	3664.79	7312.26
A5	3638.56	77.017	3721.18	7436.76	76.719	3708.54	7423.82	77.563	3747.88	7464.00	83.873	3767.19	7489.62	76.968	3696.69	7412.22	93.436	3767.82	7499.82
B1	0.14	0.069	0.163	0.37	0.067	0.138	0.35	0.078	0.124	0.34	0.058	0.128	0.33	0.133	0.14	0.41	0.069	0.188	0.40
B2	0.21	0.237	0.6	1.05	0.144	2.195	2.55	0.156	0.156	0.53	0.194	0	0.65	0.172	0.187	0.57	0.247	0	0.68
B3	0.83	1.885	3653.03	3655.74	1.939	3694.84	3697.61	1.935	3639.69	3642.45	1.862	3782.13	3784.82	1.972	3693.6	3696.40	1.943	3770.839	3773.61
B4	39.44	8.244	3668.66	3716.34	8.006	3875.28	3922.72	7.036	3708.44	3754.91	9.163	3655.9	3704.50	6.97	3696	3742.41	7.963	3700.85	3748.25
B5	3634.29	44.364	3759.71	7438.36	64.329	3821.41	7520.03	44.977	3778.91	7458.18	35.956	3788.5	7458.75	44.906	3668.99	7348.19	34.582	3656.9	7325.77
C1	861.17	0.103	0.139	861.41	0.14	0.125	861.43	0.113	0.87	862.15	0.133	0	0.861	0.146	0.156	861.47	0.096	0	861.39
C2	3834.28	0.321	0.93	3835.53	0.327	12.262	3846.87	0.358	2.506	3837.14	0.327	3	3837.55	0.32	2.039	3836.64	0.352	5	3839.43
C3	3634.39	6.326	3652.09	7292.81	6.349	3660.68	7301.42	6.369	3753.65	7394.41	6.542	3921.25	7562.18	6.282	3702.91	7343.58	6.917	3726.56	7367.87
C4	3631.08	42.863	3630.68	7304.62	42.463	3721.39	7394.93	43.663	3749.79	7424.53	43.45	3760.16	7434.69	43	3636.09	7310.13	44.109	3709.27	7384.46
C5	3638.42	110.559	3629.58	7378.54	129.87	3639.71	7408.00	121.233	3637.22	7396.87	130.798	3856.92	7626.14	110	3634.87	7383.15	112.079	3648.04	7398.54

Nº instâncias com tempo de resolução > 1hora	7		9	10	9	10	9	10	10	9	10	9	10	10	9	10	8	9
Máximo(mínutos)	1.84			2.16			2.02			2.18		1.83			1.87			

Tabela 12 - Tempos computacionais *lpr* - MR