Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

MESTRADO
DECISÃO ECONÓMICA E EMPRESARIAL

TRABALHO FINAL DE MESTRADO
DISSERTAÇÃO

SELEÇÃO DA CARTEIRA DE ATIVOS DE UMA SEGURADORA EM TEMPOS DE CRISE
O CRITÉRIO MINIMAX

PATRÍCIA FILIPA PEGAS DA SILVA

SETEMBRO 2012

Instituto Superior de Economia e Gestão
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
DESDE 1911

MESTRADO EM
DECISÃO ECONÓMICA E EMPRESARIAL

TRABALHO FINAL DE MESTRADO
DISSERTAÇÃO

SELEÇÃO DA CARTEIRA DE ATIVOS DE UMA SEGURADORA EM TEMPOS DE CRISE
O CRITÉRIO MINIMAX

PATRÍCIA FILIPA PEGAS DA SILVA

ORIENTAÇÃO: PROF. DOUTOR ONOFRE ALVES SIMÕES

SETEMBRO 2012

SELEÇÃO DA CARTEIRA DE ATIVOS DE UMA SEGURADORA EM TEMPOS DE CRISE: O CRITÉRIO MINIMAX

PATRÍCIA FILIPA PEGAS DA SILVA

ORIENTADOR: PROF. DOUTOR ONOFRE ALVES SIMÕES

MESTRADO EM: DECISÃO ECONÓMICA E EMPRESARIAL

RESUMO

A atual crise económica e financeira trouxe novos contornos ao problema da seleção de carteiras de ativos. No caso particular das companhias seguradoras, tradicionalmente pautadas por critérios prudenciais, a questão assume importância acrescida.

Neste trabalho, com base em Polak *et al.* (2010), apresenta-se a aplicação dos modelos Minimax na escolha da carteira ótima de uma seguradora, de modo a obter uma rentabilidade mínima, qualquer que seja o cenário razoavelmente previsível. São resolvidos três problemas, distintos mas interrelacionados, em certas condições.

Fazem-se duas extensões ao modelo original: a introdução de um conjunto muito mais alargado de estados da natureza, integrando de modo explícito os cenários de crise; a modelização das séries temporais das rentabilidades dos ativos elegíveis, para fins de previsão dos estados da natureza futuros. Em ambos os casos se obtêm resultados muito satisfatórios.

PALAVRAS-CHAVE: Portfólio ótimo; modelos Minimax; Séries temporais; Companhias seguradoras.

SELECTING THE ASSETS PORTFOLIO OF INSURANCE COMPANIES IN TIMES OF CRISIS: THE MINIMAX CRITERION

PATRÍCIA FILIPA PEGAS DA SILVA

SUPERVISOR: PROF. DOUTOR ONOFRE ALVES SIMÕES

MASTER IN: DECISÃO ECONÓMICA E EMPRESARIAL

ABSTRACT

The present economic and financial crisis brought new issues to the asset portfolio selection problem. As insurance companies are traditionally bound to prudential criteria, the topic is particularly important in their context.

In this work, inspired in Polak *et al.* (2010), we show how to apply Minimax models to select the optimum assets portfolio of an insurance company, in order to obtain a minimum yield, no matters which state (reasonably predicted) nature choses in the future. Three problems are solved.

Further, we make two extensions to the original model: the introduction of a much larger set of states of the nature, explicitly including crisis scenarios; modelling the time series with the eligible assets returns, to predict their future evolution. Both attempts produced very satisfactory results.

KEYWORDS: Optimum portfolio, Minimax models; Time series; Insurance companies.

Agradecimentos

Quero agradecer a todos os que me apoiaram, ao longo do meu percurso académico. Em especial, ao meu orientador, que acompanhou toda a minha dissertação, e aos professores, que me transmitiram os conhecimentos necessários. Também não posso deixar de agradecer a todos os meus colegas e amigos, aos meus pais e ao meu companheiro, que fizeram com que fosse possível chegar até aqui.

Índice

Índice de Ilustrações

Gráficos

Quadros

1. Introdução

1.1 Motivação

A crise económica mundial que se instalou em 2008 tem suscitado inúmeras questões, também (e sobretudo, por vezes) no que toca à eficiência dos modelos de decisão tradicionais em períodos de recessão. De facto, a crise afetou negativamente quase todos os setores, provocando um grande impacto na sociedade e também na perspetiva económica de muitos agentes.

Não restando dúvidas sobre a magnitude catastrófica dos efeitos produzidos, vários autores (por exemplo, Polak *et al.* (2010)) sugerem o emprego de novos modelos, ou um emprego mais cauteloso dos modelos usuais.

As aplicações em ativos financeiros são uma componente com significado nos rendimentos de muitos investidores particulares, pequenos e grandes, e de muitas empresas, em particular, das companhias seguradoras. As consequências devastadoras da crise sobre os mercados de capitais de todo o mundo, nomeadamente sobre os mercados bolsistas, que registaram quebras muito violentas, despertaram os decisores e supervisores para a necessidade de adotar atitudes mais prudentes.

A crescente aversão ao risco é fruto do legítimo desejo dos investidores de se precaverem contra a ocorrência de conjunturas mais adversas. Essa prudência acrescida traduz-se naturalmente na composição das respetivas carteiras de ativos.

É perante um enquadramento tão singular que se procura, com este trabalho final, dar um contributo metodológico para a determinação de carteiras ótimas de investimentos, mas de um modo tal que o próprio critério de otimalidade incorpore a cautela que os tempos presentes impõem. Devido à especificidade do setor segurador, sujeito a uma criteriosa supervisão no que aos seus investimentos se refere, ser-lhe-á dado um especial relevo.

1.2 Revisão de Literatura

Existe uma vasta literatura sobre estratégias para a escolha ótima de uma carteira de investimentos. No contexto da orientação dada ao trabalho são especialmente importantes os desenvolvimentos que, de alguma forma, envolvem o critério Minimax, Wald, A. (1945). Nos próximos parágrafos são referenciados os trabalhos mais influentes para o presente projeto.

Um dos autores iniludíveis quando se trata o problema da composição de uma carteira de investimentos é Markowitz (1951), que de uma forma basilar observou que o fundamental é ter em conta a média dos retornos dos ativos (rentabilidade) e a sua variância (risco). Mais ainda, quando o objetivo é maximizar os retornos, descontados a determinada taxa, não basta ter em consideração a diminuição da variância para obter uma carteira diversificada, é igualmente necessário evitar investir em ativos com covariâncias elevadas, como por exemplo os que pertencem à mesma indústria. Claramente, pode ser perigoso colocar todos os ovos no mesmo cesto. A solução obtida dependerá de cada investidor, conforme a aversão ao risco, existindo várias combinações para as médias dos retornos e a variabilidade da carteira. As soluções eficientes combinam maiores retornos esperados e menor variabilidade.

Com o passar dos anos, numerosas contribuições se sucederam. Vão referir-se apenas algumas, com ligação mais evidente à Investigação Operacional. Por exemplo, Mulvey *et al.* (1997) defendem uma incursão estocástica e multi-período ao problema, utilizando vários cenários e a otimização em redes. Recorrendo a simulações, obtêm a variedade de realizações possíveis, considerando diversos períodos temporais. Para a geração de cenários jogam com a incerteza dos retornos dos ativos. A estimação dos parâmetros a considerar é baseada em observações históricas.

Como protótipo das análises mais atuais, pode referir-se P. Beraldi *et al.* (2011), cuja proposta de resolução do problema assenta num sistema de suporte à decisão inspirado no paradigma da programação estocástica. Para isso, os autores associam técnicas de simulação, destinadas à previsão das incertas condições futuras do mercado, com modelos sofisticados de otimização. O sistema foi concebido para ser acessível via internet e tirar partido das potencialidades computacionais oferecidas por plataformas de elevado desempenho, o que, de acordo com P. Beraldi *et al.* (2011), representa uma apreciável vantagem, comparativamente às estratégias de otimização mais tradicionais.

Os trabalhos que se debruçam de forma explícita sobre o setor segurador não são tão frequentes, mas para além da já clássica resenha feita por von Lanzenauer, C. H. e Wright, D. D. (1991), pode referir-se Tzu-Yi Yu *et al.* (2010) que, na linha de Mulvey *et al.* (1997), também advogam um tratamento multi-período, propondo-se maximizar o valor atual dos investimentos de uma seguradora. Para isso consideram simulações de processos de Cox e de Movimentos Brownianos Geométricos, cobrindo vários períodos. Resolvem o problema assim construído com a aplicação de heurísticas melhorativas genéticas.

Hubert Dichtl e Wolfgang Drobetz (2011), ainda para resolver o problema da seleção da carteira de investimentos de uma seguradora, utilizam vários critérios e diferentes estratégias de investimento, tais como a *Stop-Loss Strategy*, a *Syntetic Put*

Strategy e a *Constant Proportion Strategy*. A análise assenta em simulações de Monte Carlo e na variabilidade dos diferentes parâmetros, de modo a obter um número suficiente de cenários.

Referiu-se acima que a crise instalada despertou a prudência e estimulou a aversão ao risco. Referiu-se também que neste trabalho será dado particular relevo ao critério Minimax. Os dois factos estão ligados. De um modo talvez pouco formal, pode dizer-se que os modelos Minimax, provenientes da Teoria dos Jogos, têm em consideração os piores casos que podem surgir, em cada situação. Em consequência, a definição da estratégia para encontrar a melhor solução tem sempre por base o pior que pode acontecer. Por exemplo, algo como uma crise com os contornos da atual.

Young (1998) aplica o critério Minimax para maximizar o retorno dos investimentos, o que quer dizer que considera o pior caso como medida de risco, em vez da tradicional variância dos retornos. Compara a 'sua' técnica com a de Markowitz (1951) e conclui que as duas abordagens são equivalentes naqueles casos em que os retornos são normalmente distribuídos. No entanto, defende que a *Mean-Variance Rule* de Markowitz mostra desvantagem para um investidor avesso ao risco, pois para isso é mais eficaz atender aos retornos baixos, como faz o critério Minimax, do que apenas penalizar as grandes variações.

Partindo igualmente de Markowitz (1951), Xiao-Tie Deng *et al.* (2005) utilizam o critério Minimax num problema em que a função objetivo, para além de ter em conta a média e a variância dos retornos, inclui ainda ponderações dependentes da aversão ao risco do investidor. As baixas rentabilidades e variâncias elevadas sofrem as penalizações mais pesadas, maximizando-se sob os piores casos.

Outros autores utilizam o critério Minimax de modo a minimizar o pior risco possível, como Xiaoqiang Cai *et al.* (2000), que recorrem aos modelos Minimax para a resolução de um problema explicitamente bi-critério, visando maximizar o retorno esperado e minimizar o risco, medido a partir do desvio absoluto esperado. Xiaoqiang Cai et al. (2004) escolhem a mesma função de risco, incluindo ponderadores, de modo a dar maior peso a maiores rentabilidades ou a menores variâncias.

Gülpinar e Rustem (2007) apresentam um modelo de otimização denominado *Multi-Period Min-Max Mean-Variance*. Neste modelo é criada uma árvore de cenários com realizações possíveis para vários períodos, com o intuito de maximizar o retorno esperado no horizonte temporal e minimizar o risco, período a período. Os autores aplicam o critério Minimax à árvore de cenários para identificar o pior caso, podendo fazê-lo a todos os nodos, ou apenas aos nodos relativos a cada período de tempo, ou mesmo a subárvores, convenientemente definidas.

A referência fundamental para os desenvolvimentos dos capítulos que se seguem é o recente trabalho de Polak *et al.* (2010), onde são apresentados modelos de decisão que se afiguram como razoavelmente adequados à situação que agora se atravessa. Os autores também optam pelos modelos Minimax para a escolha da carteira de investimentos, pois defendem que com a crise financeira mundial de 2008 é prudente ter uma visão mais conservadora, considerando as piores rentabilidades. Neste pressuposto, percorrendo todas as situações possíveis, determina-se a rentabilidade mínima que o investidor pode obter (qualquer que seja a realização futura, portanto). Polak *et al.* fazem aplicações do modelo ao problema da determinação da carteira ótima das seguradoras e apresentam uma extensão envolvendo rendas financeiras. O *tradeoff* entre a rentabilidade esperada e o nível de risco que se quer assumir é incluído nalgumas das formulações.

Para além de um ou outro complemento menor aos modelos descritos no artigo, o contributo mais significativo deste estudo reside essencialmente no facto de se tomar a realidade concreta das seguradoras portuguesas, numa tentativa de associar alguma utilidade prática às conclusões e resultados eventualmente obtidos. Vão usar-se dados reais, considerando ativos potenciais para investimentos de empresas a operar no nosso país.

Aos dados disponíveis, será também feita uma análise do risco e do retorno nos investimentos feitos, dada a carteira selecionada por meio do modelo.

O texto tem a seguinte estrutura: depois desta introdução, no Capítulo 2, descrevem-se rapidamente os rudimentos da Análise de Decisão em IO, com destaque para o critério Minimax e o critério Bayes, e as formalizações dos problemas a resolver. Faz-se ainda uma passagem breve pelos conceitos fundamentais das rendas financeiras. No Capítulo 3, introduzem-se todos os aspetos relacionados com os dados reais que vão ser trabalhados. No Capítulo 4 tem-se a aplicação propriamente dita, com a resolução daqueles problemas, recorrendo ao Solver do Excel e também ao EViews. No Capítulo 5, as conclusões mais relevantes e outras ideias finais.

2. Formalizações

2.1 A análise de decisão e o critério Minimax

Na resolução de muitos problemas, como sucede com aquele de que aqui se trata, as decisões devem ser tomadas em conjunturas sujeitas a forte incerteza. No âmbito da IO, compete à Análise de Decisão fornecer os procedimentos para que a tomada de decisões em ambiente casual se faça de uma forma racional. Para isso, apoia-se nos seguintes conceitos (cf., por exemplo, Hillier, F. S., Lieberman, G. J. (2010)).

1. O conjunto de todas as ações, $A=\{\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m\}$.
2. O conjunto dos estados da natureza, $\Theta=\{\ \theta_1,\ \theta_2,\ldots,\ \theta_n\}$. É o conjunto de todos os fatores aleatórios cuja ação determina a situação concreta que a decisão escolhida vai encontrar.
3. A função $l\left(a_i,\ \theta_k\right), a_i \in A, \theta_k \in \Theta,$ que indica o resultado (em termos de perda) produzido por cada ação, relativamente a cada estado.
4. Os critérios de decisão convenientes, que podem ser do tipo não probabilístico, ou do tipo probabilístico, quando a informação disponível sobre os estados da natureza se traduz numa distribuição de probabilidade.

De entre os critérios de decisão não probabilísticos, destaca-se o princípio de decisão Minimax, que tem como ponto de partida a hipótese de que, para cada possível ação, a natureza "escolherá" sempre o estado mais desfavorável – o que maximiza a perda do decisor. A decisão ótima será assim a que corresponde ao mínimo de todos os possíveis máximos, satisfazendo a condição:

$$\underset{1 \leq i \leq m}{Min} \left\{ \underset{1 \leq k \leq n}{Max} \left\{ l\left(a_i, \theta_k\right) \right\} \right\}.$$

Para além de proteger o decisor contra o pior caso, este critério afasta a possibilidade de perdas ruinosas e garante simultaneamente um ganho mínimo. Só se justifica a sua aplicação em situações de grande aversão ao risco.

De certa forma, na aplicação do critério Minimax para determinação da carteira ótima, está a admitir-se um jogo de soma nula entre dois jogadores, o investidor e o mercado: o ganho de um é a perda do outro.

2.2 Problema P1

Admita-se que o mercado coloca *p* ativos à disposição do investidor, e irá assumir um de *n* estados mutuamente exclusivos, cada um dos quais corresponde a um vetor com as rentabilidades obtidas pelos *p* investimentos. Com estes *n* vetores pode construir-se uma matriz de *payoffs* **R,** de elemento genérico $r_{ij}, i = 1, \dots, p \ e \ \ j = 1, \dots, n,$ que representa a rentabilidade do investimento *i*, no estado *j*,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & \cdots & r_{pn} \end{bmatrix}.$$

O decisor dispõe de uma unidade de capital para investir nas *p* aplicações e o problema a resolver consiste precisamente em determinar o quanto há de investir em cada uma delas. As variáveis de decisão do problema dão assim origem ao vetor $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \dots x_i \dots x_p \end{bmatrix}$, onde x_i representa a proporção da referida unidade a investir no *i*-ésimo ativo.

Polak *et al.* (2010) formulam o problema, designe-se por P1, da seguinte forma:

$$\text{Max } z = \xi \qquad (1)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} \xi \leq \sum_{i=1}^{p} r_{ij} x_i \,, j = 1, \dots, n & (2) \\ \sum_{i=1}^{p} x_i \leq 1 & (3) \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, p & (4) \end{cases}$$

Como se vê, trata-se de uma formulação engenhosa. Uma vez que o conjunto das ações é infinito não numerável, introduz-se o princípio Minimax na formalização tomando como objetivo a maximização de uma outra variável ξ, que pelas restrições (2) é na realidade o máximo das rentabilidades mínimas que é possível obter nos *n* estados,

Com efeito, cada uma destas *n* restrições – há uma para cada estado – impõe que todas as possíveis decisões de investimento nesse estado (todas as carteiras admissíveis com os *p* ativos) devem ter, pelo menos, rentabilidade ξ. Dado o princípio Minimax (neste caso, na sua versão Maximin, pois a matriz **R** é uma matriz de rentabilidades), a carteira ótima será assim a que permite obter uma rentabilidade mínima máxima: todas as carteiras admissíveis têm que ter uma rentabilidade mínima pelo menos igual a ξ e este valor será tão grande quanto possível. A restrição (3) e as restrições (4) não necessitam de qualquer explicação adicional.

Com o modelo P1 fica garantido que, uma vez determinada a carteira ótima e o correspondente valor de ξ, qualquer que seja o estado (o vetor das rentabilidades dos ativos) que se venha a concretizar, nunca se obterá com essa carteira uma rentabilidade inferior a ξ.

Na formalização anterior, os *n* diferentes estados não têm probabilidades de ocorrência explicitamente atribuídas, ou seja, são todos igualmente prováveis – o que traduz normalmente uma situação de desconhecimento. No entanto, há muitas vezes algum conhecimento sobre os valores dessas n probabilidades, o que permite probabilizar de certa forma o processo de tomada de decisão.

2.3 O Princípio de Decisão Bayes

Um critério de decisão diz-se probabilístico quando a informação disponível sobre os estados da natureza dá origem a uma distribuição de probabilidade, seja

$$h_\theta(k) = P(\theta = \theta_k), \theta_k \in \Theta.$$

O Princípio de Bayes consiste simplesmente em escolher a ação a_h que maximiza o ganho esperado (risco de Bayes), isto é, a_h satisfaz a condição

$$\underset{1 \le i \le p}{Max} \left\{ E\left[-l\left(a_i, \theta\right)\right] \right\} = \underset{1 \le i \le p}{Max} \left\{ -\sum_{k=1}^{n} h_\theta(k)\ l\left(a_i, \theta_k\right) \right\}.$$

2.4 Problema P2

Retome-se o problema P1, mas seja agora $\boldsymbol{\rho} = \left[\rho_1 \ldots \rho_i \ldots \rho_p\right]$ o vetor cujas componentes são as variáveis de decisão (as frações da unidade disponível, a investir nos p ativos), e seja $\boldsymbol{\pi} = \left[\pi_1 \ldots \pi_j \ldots \pi_n\right]$ o vetor cujas componentes correspondem às probabilidades de ocorrerem os diferentes estados. Nestas condições, o retorno esperado da carteira, que se tem por objetivo maximizar, é

$$E[\rho] = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} r_{ij} \times \pi_j \times \rho_i \qquad (5)$$

Também desta vez, a introdução do critério Minimax se faz de uma forma engenhosa. Seja T o valor do retorno mínimo aceitável para o decisor, isto é, qualquer que venha a ser o estado da natureza, o decisor não está disposto a aplicar a sua unidade de capital se esta não se valorizar, pelo menos, *T*. A formalização (P2) fica:

$$\text{Max } z = E[\rho] \qquad (6)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} \sum_{i=1}^{p} r_{ij}\rho_i \geq T, j = 1, \dots, n & (7) \\ \sum_{i=1}^{p} \rho_i \leq 1 & (8) \\ \rho_i \geq 0, i = 1, \dots, p & (9) \end{cases}$$

As restrições (7), como se vê claramente, estabelecem o nível de risco (aversão ou apetência) que o decisor está disposto a tomar. Em consequência, a sua fixação é o aspeto mais delicado do modelo, sendo fundamental analisar o que sucede para diferentes valores verosímeis. No caso de *T* ser negativo, é assumido um maior risco, e em alguns estados pode até haver perdas – mas se $E[\rho] < 0$ o decisor não investirá.

Quando o decisor diminui o valor de *T*, assumindo um maior risco, o retorno esperado poderá ser maior, pois a rentabilidade esperada é não decrescente em *T*: quanto menor *T*, maior o risco assumido; logo, o retorno esperado poderá ser maior.

É importante explorar a relação que existe entre P1 e P2. Notando que T é o valor mínimo de rentabilidade aceitável, para qualquer estado, não faz sentido escolher um valor superior ao valor ótimo obtido em P1 para ξ , seja ξ^*, que maximiza o pior caso, pois nesse caso P2 ficará impossível. Se $T = \xi^*$, P1 e P2 são equivalentes e os portfólios ótimos que se obtêm na resolução dos dois problemas coincidem.

2.5 Rendas financeiras

"Renda financeira é um conjunto de capitais (os seus termos) com vencimentos equidistantes" pode ver-se, por exemplo, em Broverman (2010). Mais ainda, quando todos os pagamentos têm probabilidade 1, a renda diz-se certa; quando os termos são iguais, diz-se de termos constantes; quando em número finito, diz-se temporária; quando se vencem nos finais dos períodos respetivos, diz-se postecipada; quando não há diferimento, diz-se imediata; quando não há fracionamento dos termos diz-se inteira.

Muitas companhias seguradoras vendem os mais variados tipos de rendas, normalmente incertas, pois os pagamentos estão dependentes da sobrevivência, ou da morte, da pessoa segura.

Para se poder determinar o preço de um tal produto, é necessário encontrar alguma forma de adicionar os valores dos termos em causa, pois em Matemática Financeira só se podem adicionar capitais referidos a um mesmo momento. Na verdade, é necessário calcular o valor atual esperado da renda (valor atuarial), o que obriga, entre outros aspetos, a definir uma taxa de juro para atualizar todos os pagamentos futuros ao momento presente. Esta taxa, represente-se por i, é chamada a taxa técnica de juro e, em princípio, é determinada pela taxa de retorno da carteira de investimentos que suporta o pagamento das rendas em questão.

Como mera exemplificação (ver Dickson, D. *et al.* (2009)), atente-se que o valor atuarial de uma renda perpétua, de termos constantes e unitários, imediata, postecipada e inteira, vendida a uma pessoa segura de idade x e cujo tempo de vida futura, em anos completos, é a v.a. K_x, é dado pela igualdade

$$a_x = \frac{1 - \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, P(K_x = k)}{d} - 1, \qquad v = \frac{1}{1+i}, \qquad d = \frac{i}{1+i}.$$

Nalguns casos, é conhecido o montante a investir na renda e, dadas as bases técnicas (mortalidade e taxa de juro), calculam-se os termos.

2.6 Problema P3

Admita-se agora que a seguradora vende rendas aos seus clientes e que a taxa técnica de juro usada para calcular os respetivos valores atuariais é

$$r = \mu_0 + \mu_1 \times \max(E[\rho] - \mu_0, 0), \qquad 0 < \mu_1 < 1, \qquad (10)$$

$\mu_0 =$ retorno mínimo garantido.

$\mu_1 \times \max(E[\rho] - \mu_0, 0) =$ fração da diferença entre o valor esperado da rentabilidade obtida com o portfólio da seguradora afeto ao pagamento dessas rendas, $E[\rho]$, e o retorno mínimo garantido, μ_0, quando $E[\rho] > \mu_0$.

Mais uma vez, o objetivo será escolher a composição da carteira de modo a maximizar a rentabilidade esperada da seguradora, depois de concedida a taxa aos compradores das rendas. Adicionalmente, só serão admissíveis carteiras que permitam obter uma rentabilidade, pelo menos, igual a $T + \mu_0$. Como antes, T é o nível de risco, fixado à partida.

O problema P3 formula-se de forma análoga a P1 e P2:

$$\text{Max } z = E[\rho] - \mu_0 - \mu_1 \times max(E[\rho] - \mu_0, 0) \qquad (11)$$

$$\text{s.a} \begin{cases} \sum_{i=1}^{p} r_{ij}\rho_i - \mu_0 \geq T, \;\; j = 1, \dots, n & (12) \\ \sum_{i=1}^{p} \rho_i \leq 1 & (13) \\ \rho_i \geq 0, i = 1, \dots, p & (14) \end{cases}$$

Não é um modelo linear, devido à função objetivo, questão que será tratada adiante. Com este tipo de rendas, manipulando μ_0 e μ_1, a instituição financeira pode tentar atrair investidores com os mais variados perfis de risco.

3. Dados

3.1 Os *p* ativos

A resolução dos três problemas apresentados no contexto da realidade das seguradoras portuguesas, que é a principal contribuição deste estudo, implica necessariamente o levantamento dessa mesma realidade. A primeira pergunta a necessitar de resposta é: Que ativos estão disponíveis para as seguradoras aplicarem os seus fundos? Para obter uma primeira resposta, fez-se o levantamento dos ativos em que atualmente as seguradoras aplicam os seus fundos. Os resultados figuram no Gráfico 1.

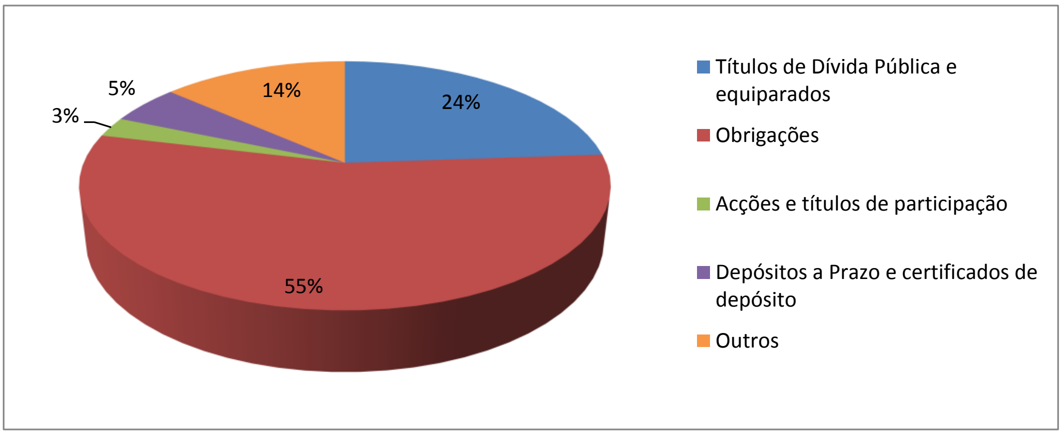


Gráfico 1 – Composição dos Ativos Representativos das Carteiras de Investimento de Seguradoras Portuguesas em 2010

Fonte: Instituto de Seguros de Portugal. (2011). *Relatório do Setor Segurador e dos Fundos de Pensões 2010*.

Sem surpresa, observa-se que as obrigações, públicas e privadas, são dominantes, com quase 80 por cento do total. Sem surpresa, porque a autoridade supervisora das seguradoras e fundos de pensões no nosso país, o Instituto de Seguros de Portugal (ISP), exerce uma vigilância cuidadosa sobre as políticas de investimento das empresas do ramo, estabelecendo limites para as aplicações nas diferentes classes de ativos. Para além da composição mostrada no gráfico anterior, pode acrescentar-se que 63,3% das aplicações são em títulos emitidos por entidades estrangeiras, 48,6% das quais sediadas na União Europeia. Com efeito, o principal tipo de ativo são as obrigações da União Europeia.

Feita a análise preliminar, passou-se à seleção dos ativos. Escolheram-se 21 aplicações (p = 21), representativas dos mercados obrigacionistas, dos mercados acionistas, dos mercados de *commodities* e dos mercados cambiais, como se pode ver no Quadro I.

PSI20	Índice de Ações da Bolsa Portuguesa
SX5E	Índice de Ações da Zona Euro
MXWO	Índice de Ações de Mercados Desenvolvidos
MXEF	Índice de Ações de Mercados Emergentes
SPX	Índice de Ações da Bolsa Americana
IBEX	Índice de Ações da Bolsa Espanhola
DAX	Índice de Ações da Bolsa Alemã
UKX	Índice de Ações da Bolsa do Reino Unido
AEX	Índice de Ações da Bolsa Holandesa
CAC	Índice de Ações da Bolsa Francesa
SX86P	Índice de Companhias Europeias do Sector Imobiliário
QW8K	Índice de Obrigações Portuguesas
IB8T	Índice de Obrigações Financeiras
IB8B	Índice de Obrigações Não Financeiras
QW1A	Índice de Obrigações Soberanas da Zona Euro
EUGATR	Índice da Ações Europeias
GOLDS	Ouro
COA	Petróleo
EURUSD	Cotação Euro Dólar
EURGBP	Cotação Euro Libra
EURCHF	Cotação Euro Franco Suíço

Quadro I – Os ativos

Deve ter-se em atenção que se decidiu não incluir depósitos a prazo (DP) no conjunto dos ativos, pois sendo o critério de otimização pautado pela prudência, as características próprias dos DP (cf. Anexo I) tornam-nos na aplicação mais desejável. A experiência foi feita e conduziu a uma carteira ótima integralmente constituída por este ativo.

A introdução de uma restrição na formulação com um limite máximo para a aplicação em DP pareceu inútil. Portanto, se as seguradoras decidirem aplicar parte dos seus fundos em depósitos a prazo essa é como que uma decisão prévia. O processo de otimização incidirá sobre os fundos remanescentes e sobre os restantes ativos.

3.2 Os *n* estados da natureza

Para estabelecer os estados da natureza e construir a correspondente matriz **R**, foram recolhidos dados históricos sobre as rentabilidades dos 21 ativos, cobrindo o que se considerou ser um ciclo económico (10 anos, de 2002 a 2011), com períodos de expansão e períodos de recessão – ver Gráfico 2.

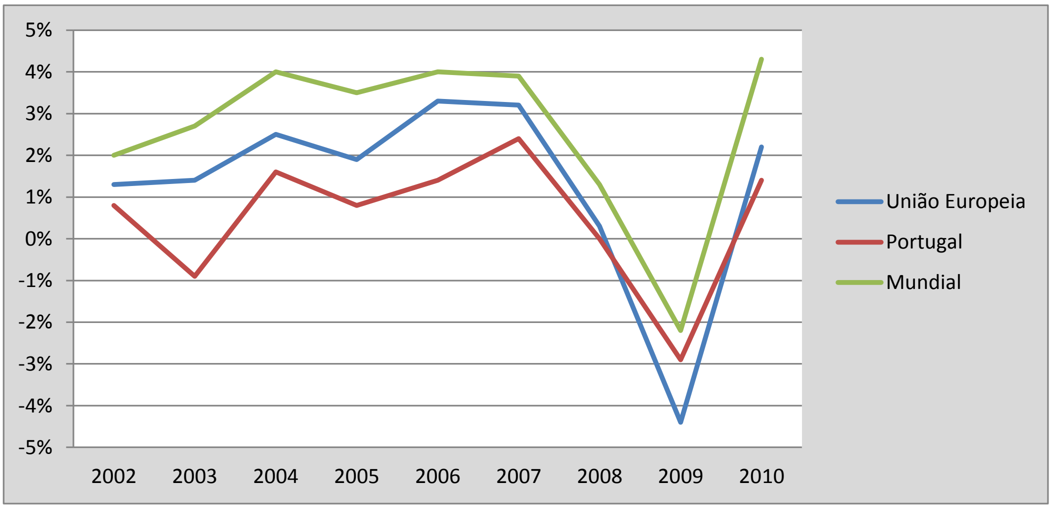


Gráfico 2 – Percentagem Anual de Crescimento do PIB de 2002 a 2010

Fonte: The World Bank (2012). *GDP growth (annual %)*.

Como é possível verificar, o PIB começou a decrescer significativamente em 2008, data de início da crise económica mundial. Outro ponto interessante de análise do Gráfico 2, é que a evolução do indicador em Portugal, na União Europeia e no Mundo apresenta grandes semelhanças.

Os dados recolhidos são de periocidade mensal, referentes aos preços dos ativos. A partir destes, calculam-se as rentabilidades anuais, que são as entradas da matriz **R**:

$$r_{ij} = \frac{p_{ij} - p_{i(j-12)}}{p_{i(j-12)}},$$

em que r_{ij} é a rentabilidade do ativo i no período j e p_{ij} é o correspondente preço ($i = 1, \dots, 21$, $j = 13, \dots, 120$). A matriz **R** vai assim ser do tipo 21×108, o que quer dizer que se conseguem observar 108 estados da natureza, ou seja, 108 vetores de rentabilidades anuais dos 21 ativos candidatos a fazer parte da carteira das seguradoras: de 31 de janeiro de 2002 a 31 de janeiro de 2003 ($\boldsymbol{\theta}_1$); de 28 de fevereiro de 2002 a 28 de fevereiro de 2003 ($\boldsymbol{\theta}_2$), …, de 31 de dezembro de 2010 a 31 de dezembro de 2011 ($\boldsymbol{\theta}_{108}$). No Quadro II, figuram o primeiro e o último dos 108 estados.

Ativo	$\boldsymbol{\theta}_1$	$\boldsymbol{\theta}_{108}$	**Ativo**	$\boldsymbol{\theta}_1$	$\boldsymbol{\theta}_{108}$	**Ativo**	$\boldsymbol{\theta}_1$	$\boldsymbol{\theta}_{108}$
PSI20	-26,4%	-27,6%	**UKX**	-30,9%	-5,6%	**QW1A**	10,4%	3,4%
SX5E	-38,7%	-17,1%	**AEX**	-41,1%	-11,9%	**EUGATR**	10,3%	1,5%
MXWO	-21,1%	-7,6%	**CAC**	-34,3%	-17,0%	**GOLDS**	30,3%	10,1%
MXEF	-11,4%	-20,4%	**SX86P**	-15,9%	-12,1%	**COA**	NA	11,5%
SPX	-24,3%	0,0%	**QW8K**	11,3%	-22,9%	**EURUSD**	25,3%	-3,2%
IBEX	-26,1%	-13,1%	**IB8T**	11,1%	2,3%	**EURGBP**	7,4%	-2,8%
DAX	-46,2%	-14,7%	**IB8B**	8,3%	4,1%	**EURCHF**	-0,6%	-2,7%

Quadro II – Primeiro e último dos 108 estados

Para testar outras possibilidades, foi decidido aplicar modelos apropriados aos dados existentes, para prever as rentabilidades nos próximos 12 meses. Se bem que haja um reconhecimento generalizado da dificuldade inerente ao processo (ver Atsalakis, G. e Valavanis, K. (2008; 2009)) entendeu-se ser de alguma forma razoável introduzir 12 estados da natureza adicionais, com a inclusão das previsões. Pode acrescentar-se que esta decisão, que implicou notáveis esforços, foi também estimulada pelo desejo de enriquecer o estudo com a aplicação de técnicas econométricas aprendidas no curso.

Pela natureza dos dados, concluiu-se ser conveniente modelar estas séries temporais com modelos ARMA (as estacionárias), ou ARIMA (as não estacionárias - efetuou-se o teste de Dickey-Fuller para decidir, cf. Anexo III).

A título ilustrativo, mostra-se no Anexo II um exemplo das autocorrelações e correlações parciais observadas de uma das séries usadas: o índice SX5E – Índice de Ações da Zona Euro. Vê-se que as autocorrelações do índice SX5E são significativas para os primeiros desfasamentos e também que existe correlação parcial para os primeiros desfasamentos.

Relativamente aos modelos ARIMA, foi ainda necessário estudar a existência de uma segunda raiz unitária. Os testes Dickey-Fuller apontaram para a não existência, pelo que na modelação serão utilizadas as primeiras diferenças. No entanto, observou-se nalguns casos a presença de padrões sazonais (frequentes em dados com periocidade), o que obrigou a recorrer aos modelos SARIMA (ver anexo IV).

Passando à estimação dos modelos, obtiveram-se os resultados do Quadro II. Em todos os casos foi garantida significância dos parâmetros escolhidos. Para ilustrar, apresentam-se no anexo V as autocorrelações e as correlações parciais da série SX5E – Índice de Ações da Zona Euro, bem como as do modelo teórico proposto. Para cada modelo, foram ainda avaliadas as condições de invertibilidade, verificando-se que todas as raízes estão dentro do círculo unitário. Adicionalmente, foram analisadas as autocorrelações e correlações parciais dos resíduos gerados pelo modelo estimado, concluindo-se que não são estatisticamente significativas.

Índices	Modelos
PSI20	ARMA(4,2)
SX5E	ARMA(2,1)
MXWO	ARMA(2,1)
MXEF	SARMA(2,1)(0,1)$_{12}$
SPX	ARMA(2,1)
IBEX	SARMA(1,0)(0,1)$_{12}$
DAX	ARMA(2,1)
UKX	SARMA(1,1)(0,1)$_{12}$
AEX	ARMA(2,1)
CAC	ARMA(2,1)
SX86P	SARIMA(1,1,0)(0,0,1)$_{12}$
QW8K	SARIMA(0,1,0)(1,1,1)$_{12}$
IB8T	SARIMA(0,1,0)(0,0,1)$_{12}$
IB8B	SARIMA(0,1,0)(1,0,1)$_{12}$
QW1A	SARIMA(0,1,0)(0,0,1)$_{12}$
EUGATR	SARIMA(0,1,0)(0,0,1)$_{12}$
GOLDS	SARMA(1,0)(0,1)$_{12}$
COA	ARMA(2,1)
EURUSD	SARMA(1,0)(0,1)$_{12}$
EURGBP	SARMA(1,0)(0,1)$_{12}$
EURCHF	SARIMA(0,1,0)(0,0,1)$_{12}$

Quadro III – Os modelos ajustados

Modeladas as séries, foi então feita a previsão para obter os estados da natureza "previsionais", anteriormente referidos. No Quadro IV mostra-se θ_{109}.

Ativo	θ_{109}	Ativo	θ_{109}	Ativo	θ_{109}	Ativo	θ_{109}
PSI20	-29,6%	**DAX**	-16,1%	**IB8T**	3,4%	**EURUSD**	-6,5%
SX5E	-16,5%	**UKX**	-9,0%	**IB8B**	5,9%	**EURGBP**	-3,1%
MXWO	-9,5%	**AEX**	-11,9%	**QW1A**	4,2%	**EURCHF**	-5,0%
MXEF	-21,7%	**CAC**	-15,6%	**EUGATR**	2,2%		
SPX	-2,4%	**SX86P**	-13,7%	**GOLDS**	17,5%		
IBEX	-20,2%	**QW8K**	-23,6%	**COA**	-5,7%		

Quadro IV – θ_{109} para cada ativo

4. Resolução dos Problemas

4.1 Resolução de P1

Os resultados obtidos na resolução do primeiro dos três problemas – ver (1) a (4) - mostram que a carteira ótima terá a seguinte composição:

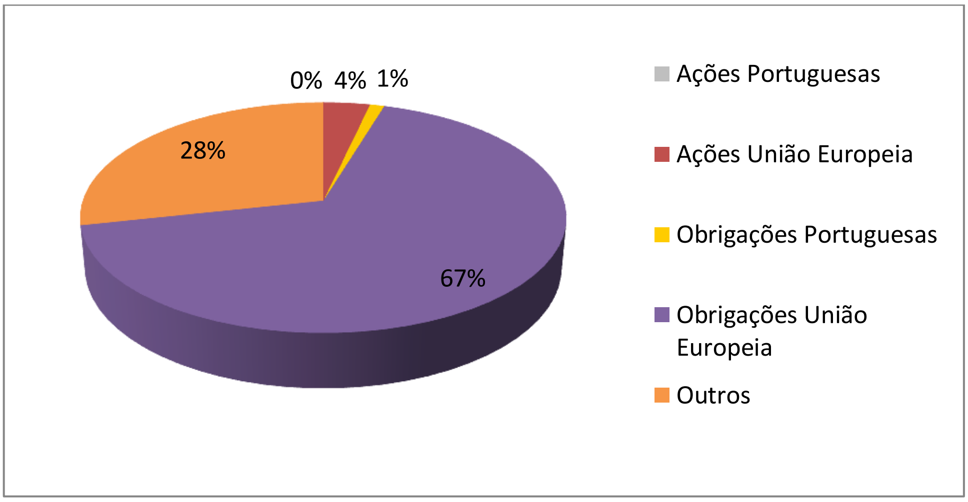


Gráfico 3 – Carteira Ótima Solução do Problema P1 (108 estados da natureza)

Com esta carteira consegue obter-se uma rentabilidade de 2,36%, qualquer que seja o estado da natureza. Ou seja, mesmo que as condições em 2012 sejam ao nível das piores observadas nos últimos 9 anos, esta rentabilidade mínima está garantida com esta carteira.

Como seria de esperar, existe uma grande incidência sobre investimentos em obrigações, principalmente em obrigações da União Europeia. Comparando com os investimentos das seguradoras portuguesas (ver Gráfico 1), vê-se que as carteiras são semelhantes pois incidem essencialmente em obrigações, principalmente da União

Europeia. Como referido anteriormente, as obrigações têm volatilidade menor do que as ações, logo apresentam menos risco, o que favorece a abordagem prudente adotada.

Resolvendo novamente o problema, incluindo os 12 estados adicionais que resultam das previsões feitas (a aplicação terá rentabilidades históricas de 2003 a 2011, e previsões referentes a 2012), obtém-se a carteira do Gráfico 4.

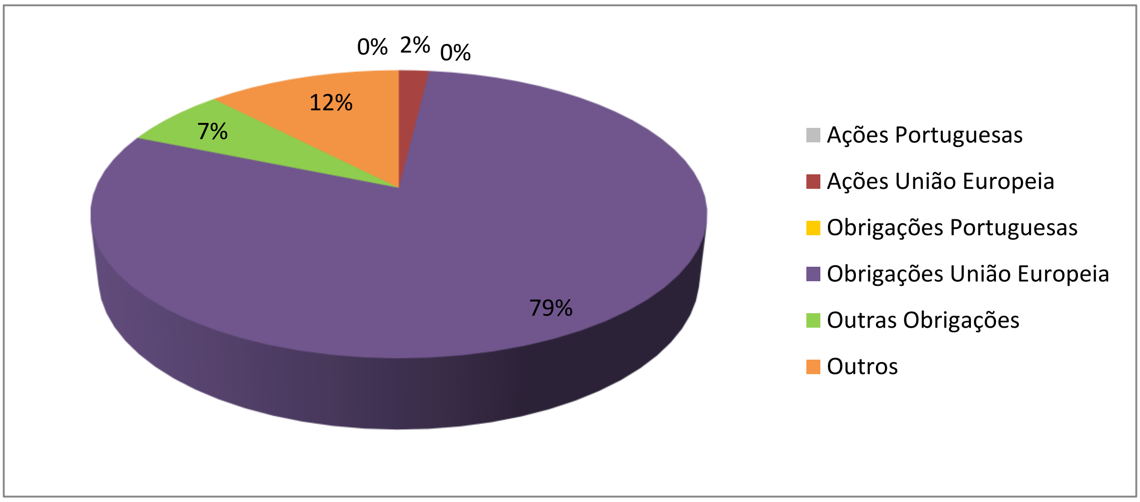


Gráfico 4 – Carteira Ótima Solução do Problema P1 (120 estados da natureza)

A inclusão dos novos 12 estados faz cair a rentabilidade mínima garantida para 1,84%, e também a composição da carteira se modificou.

Obviamente, dada a formalização do problema, a introdução de estados adicionais nunca pode fazer aumentar o valor da rentabilidade, mas é muito significativo que se observe efetivamente uma redução. Tal deve-se ao facto de os valores previstos para as rentabilidades serem bastante baixos, acompanhando a evolução dos últimos anos. Nestes tempos de crise, os 12 estados aumentaram a aderência do modelo à realidade.

Deve ainda salientar-se que na nova carteira ótima o investimento em obrigações aumenta 18%, correspondendo a quase 80% do investimento. Com estados da natureza mais contrários, a prudência reforça-se. No Gráfico 1, o peso das obrigações nas carteiras das seguradoras portuguesas é 80%.

4.2 Resolução de P2

A formalização de P2 – (6) a (9) – obriga o gestor a fixar T, o nível de risco que está disposto a tomar. Esta decisão exprime-se aqui pelo estabelecimento de um limite mínimo à rentabilidade, qualquer que seja o estado que ocorra.

Como se discutiu atrás, tudo o mais constante, a resolução de P1 fornece uma indicação importante sobre o valor de T, pois concluiu-se que a rentabilidade mínima garantida em qualquer estado é 2,36%.

Mais ainda, a função objetivo obriga a identificar uma distribuição de probabilidade que atribua a cada um dos possíveis estados da natureza a probabilidade da sua ocorrência. À semelhança de Polak *et al.* (2010), vai assumir-se uma distribuição uniforme, pois não há verdadeiramente nada que indique que algum dos estados tem probabilidade superior às dos outros.

Para analisar o impacto da escolha do nível de risco, resolveu-se o problema P2 para vários valores de T. No Gráfico 5 vê-se como a rentabilidade esperada aumenta com o risco, ou seja, com a relaxação crescente da restrição sobre a rentabilidade mínima.

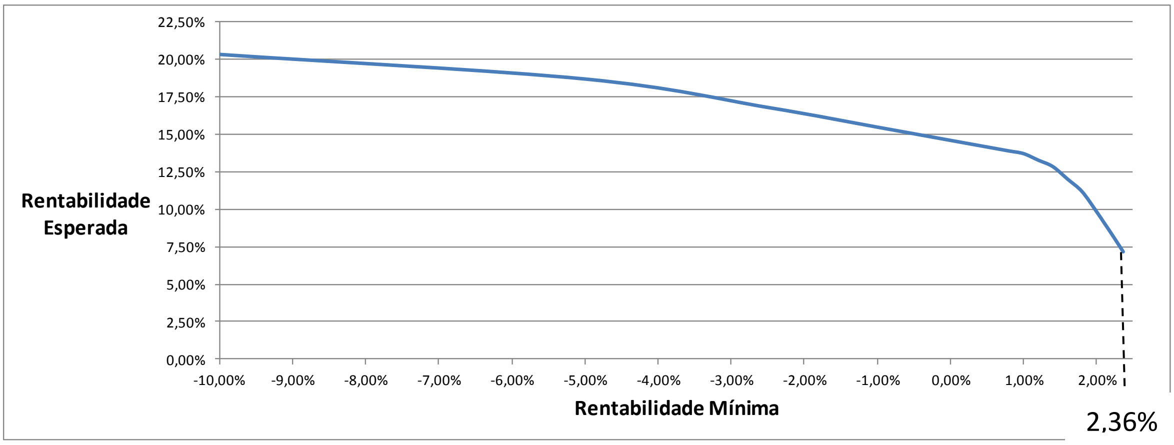


Gráfico 5 – Rentabilidade Esperada, em função de diferentes níveis de risco

É de salientar que o incremento de rentabilidade esperada quando se reduz a rentabilidade mínima de 2,36% para 1% é muito mais significativo do que quando se continua a reduzir, até para valores negativos. Este facto pode tentar os decisores mais corajosos a baixar os seus níveis de cautela, sem entrar em zonas perigosas. Para ilustrar, considere-se o Quadro V, onde se mostram alguns exemplos de aumentos de risco e o respetivo incremento de rentabilidade esperada.

Rentabilidade Mínima	2,00%	1,00%	0,00%
Rentabilidade Esperada	9,82%	13,71%	14,60%

3,89% 0,89%

Quadro V – Exemplo de Aumentos de Risco e o Respetivo Incremento de Rentabilidade Esperada

A observação do gráfico permite ainda concluir que para $T < -9{,}05\%$ não se conseguirá aumentar a rentabilidade esperada, pois esta parece estabilizar em $20{,}36\%$ e não aumentará com o incremento de risco.

Naturalmente, a composição da carteira não é semelhante para diferentes níveis de risco. Ao aumentar o risco, a rentabilidade esperada aumenta, e isso consegue-se investindo em componentes com altas rentabilidades, como é o caso das *commodities*, que são os ativos com rentabilidade média mais elevada. O Gráfico 6 apresenta as composições das carteiras em três casos diferentes.

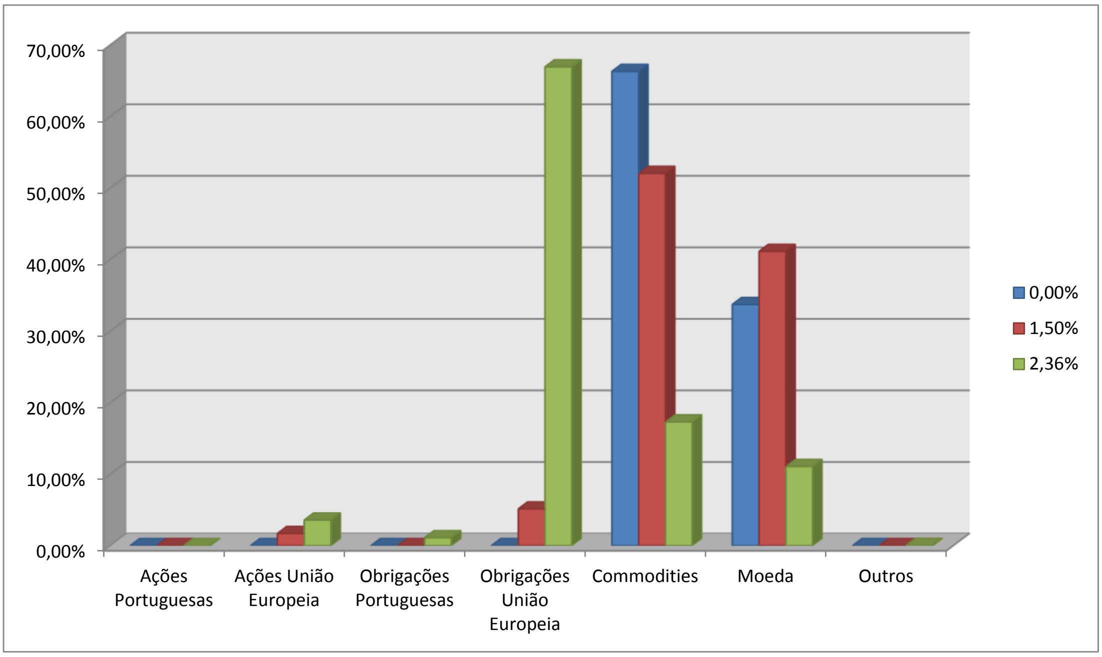


Gráfico 6 – Constituição dos Ativos da Carteira Ótima para Várias Rentabilidades Mínimas Admitidas

O problema P2 também foi resolvido para os 120 estados - rentabilidades históricas de 2003 a 2011, e previsões referentes a 2012, ver Gráfico 7.

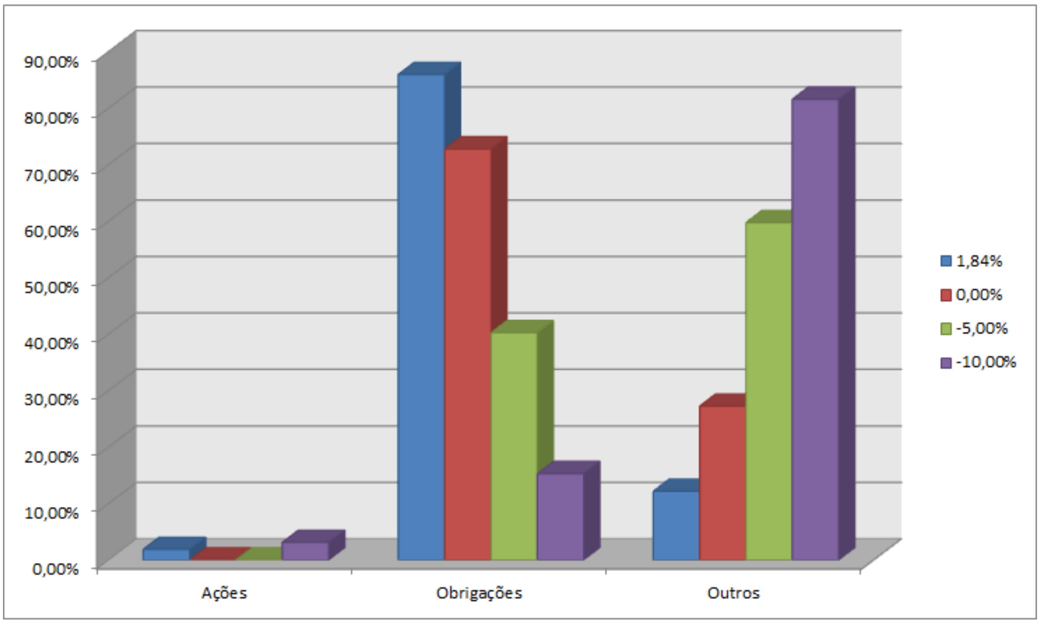


Gráfico 7 – Constituição da carteira ótima para várias rentabilidades mínimas admitidas, para o problema P2 (120 estados da natureza)

Comparando o Gráfico 6 com o Gráfico 7 verifica-se que no primeiro caso, mesmo com baixos níveis de risco, rapidamente se começava a investir de forma significativa em ativos que não as obrigações; no segundo, em que já se incluem mais estados "de crise", investe-se sobretudo nestes títulos. Mesmo para $T = 0\%$ o peso das obrigações é à volta de 70%.

A atribuição de probabilidades aos estados influencia, naturalmente, os resultados. Dado o número elevado de estados considerados, a probabilização torna-se mais complexa. Esta é uma questão para ser estudada em desenvolvimentos futuros.

Testou-se ainda um critério alternativo, no estabelecimento dos estados da natureza: considerar as rentabilidades nos nove anos civis completos (2003 a 2011), sendo portanto períodos anuais mutuamente disjuntos. Neste caso, tem-se apenas nove estados. Com tão reduzido número, obteve-se uma solução relativamente desinteressante, pois perdeu-se informação importante: a natureza tem pouco por onde escolher. A aplicação do critério Minimax fica prejudicada no seu propósito.

4.3 Resolução de P3

Na resolução do problema P3, o primeiro desafio é a não linearidade da função objetivo, que é no entanto facilmente ultrapassável.

De (5) e (12) resulta que $\mathrm{E}[\rho] - \mu_0 \geq T$; se $T \geq 0$, então a função objetivo fica $z = (1-\mu_1)\mathrm{E}[\rho] - (1-\mu_1)\mu_0$. Note-se que esta simplificação não levanta qualquer problema, pois o valor de T, represente-se por T_{P3}, é determinado pelo decisor, não é uma variável de decisão do problema. Pelas considerações anteriores sobre o significado deste parâmetro, vai admitir-se mesmo a hipótese adicional de que $T = T_{P3} > 0$.

Nestas condições, conclui-se que a função objetivo a otimizar é a função objetivo do problema P2, modificada por constantes aditivas e multiplicativas, pelo que a solução ótima para o problema P2 com o valor $T = T_{P2}$, será também ótima para o problema P3, fixando para este

$$T = T_{P3} = T_{P2} + \mu_0 \qquad (15)$$

Em síntese, se $0 < T_{P3} = T_{P2} + \mu_0$, a resolução de P3 reduz-se assim à resolução de P2 com $T = T_{P2}$.

Explorando a relação detetada atrás entre P1 e P2, que permitiu concluir que este só será possível se $T_{P2} \leq \xi^*$, e recorrendo à relação agora encontrada entre P2 e P3 e também a (15), é imediato que, tudo o mais constante, P3 só será possível se $0 < T_{P3} \leq \xi^* + \mu_0$.

Concretizando, dado que $\xi^* = 2{,}36\%$, e fixando $T_{P3} = 1{,}5\%$, P3 terá pelo menos uma solução admissível quando $\mu_0 \leq 0{,}86\%$. Relativamente a $\mu_1 \in]0{,}1[$, não há necessidade de considerar nenhuma outra restrição.

No Quadro VI, a seguir, um exemplo do que acabou de se expor.

μ_0	0,5%
μ_1	50%

	Problema P2	**Problema P3**
Valor T	2,0%	1,50%
Rentabilidade Esperada para a Instituição	E[ρ] 9,82%	$E[\rho]-\mu_0 + \mu_1\times(E[\rho]-\mu_0)$ 4,66%
Rentabilidade para os Investidores na Renda Financeira	-	$\mu_0 + \mu_1*(E[\rho]-\mu_0)$ 5,16%
Rentabilidade Esperada Total: E[ρ]	**9,82%**	**9,82%**

Quadro VI - Comparação entre um problema P2 e P3 semelhantes

Um aspeto crucial tem a ver com o facto de a rentabilidade esperada total vir partilhada pela instituição e pelo investidor. Agora o nível de risco assumido é dado por $\mathrm{T} + \mu_0 > 0$, a taxa mínima admitida pela entidade financeira em qualquer estado de ocorrência. Portanto, será conveniente que μ_0 seja o mais baixo possível (continuando a propor rendas financeiras atrativas), senão a rentabilidade esperada irá ser menor.

Outra análise interessante consiste em estudar como diferentes combinações de μ_0 e μ_1 poderão levar a rentabilidades esperadas semelhantes para os compradores da renda financeira, mas diferentes para a instituição financeira, e vice-versa. No Quadro VII tem-se uma ilustração.

	$(\mu_0;\mu_1)$=(0,5%;50%)	$(\mu_0;\mu_1)$=(0,85%;65%)
Valor T	1,50%	
Valor μ_0	0,50%	0,85%
Valor μ_1	50,00%	65,00%
Rentabilidade Esperada para a Instituição	4,66%	2,25%
Rentabilidade para os Investidores na Renda Financeira	5,16%	5,03%
Rentabilidade Esperada Total	**9,82%**	**7,28%**

Quadro VII – Comparação entre dois possíveis valores para os parâmetros do problema P3, e respetivos valores ótimos

A concluir este capítulo, saliente-se que as observações feitas, relativamente à composição da carteira resultante da resolução de P2, continuam agora inteiramente pertinentes.

5. Conclusões

Tendo como base Polak *et al.*(2010), e o objetivo de determinar carteiras de ativos otimizadas para as companhias seguradoras portuguesas, nestes tempos de crise, selecionaram-se 21 ativos representativos e aplicou-se o critério Minimax. Três situações distintas, mas interligadas sob certas condições, foram tratadas.

Na aplicação do problema P1, verifica-se que há na carteira ótima uma forte incidência em obrigações, o que também acontece nas carteiras reais de investimento das seguradoras portuguesas; como as obrigações têm menos volatilidade que outros tipos de investimentos, a prudente abordagem consubstanciada no modelo Minimax privilegia a sua escolha. Ou seja, a cautela obriga a uma abordagem avessa ao risco, de modo a garantir uma rentabilidade mínima, qualquer que seja o cenário admissível que se venha a concretizar.

Com a resolução do problema P2, ilustrou-se que quanto maior é o risco maior é a rentabilidade esperada. A análise de sensibilidade que se fez foi também reveladora, não só pelo facto de mostrar a evolução da rentabilidade esperada em função do risco assumido, mas também pela perceção que dá das diferentes composições da carteira de investimentos, nos vários casos. É notório que quando não se quer correr riscos predominam as obrigações na composição da carteira de investimentos, e que o peso daquelas vai diminuindo consoante a apetência pelo risco aumenta.

Na resolução do problema P3, dada a semelhança com o problema P2, resta apenas concluir que é necessário ter em conta a multiplicidade de valores que os novos parâmetros podem assumir, pelo papel que desempenham na captação dos investidores e na parcela da rentabilidade que remanesce para a companhia.

O trabalho desenvolvido, pelo simples facto de incorporar estados da natureza associáveis a períodos críticos, consegue completar os resultados obtidos por Polak, *et al.* (2010), onde só são utilizados dados até 2006. Com a crise económica e a queda bolsista, as rentabilidades mínimas a considerar e as rentabilidades esperadas são agora muito mais baixas do que as obtidas por esses autores. E a opção pelo critério Minimax fica ainda mais bem justificada.

Também o ajustamento de modelos às séries temporais, apesar das dificuldades teóricas e práticas que se conhecem, mostrou ser uma extensão interessante, permitindo a adição de 12 estados de ocorrência em plena crise. Os resultados obtidos mostraram-se muito úteis e consistentes com a realidade atual.

Uma abordagem alternativa seria procurar ajustar uma distribuição probabilística às rentabilidades dos 21 ativos e simular o comportamento da natureza usando o Método de Monte Carlo. Trata-se evidentemente de uma tarefa com elevada complexidade e resultados muito incertos, que extravasa muito os limites do trabalho.

Em aberto fica também a questão da periodicidade com que se deve proceder a ajustamentos na carteira, à medida que o tempo vai passando. Em princípio, os problemas podem ser resolvidos tantas vezes quantas se queira, introduzindo a informação mais recente sob a forma de novos estados da natureza, se assim se justificar, e os custos de transação.

O próprio critério de otimização pode ser modificado, muito embora o parâmetro T dê flexibilidade aos modelos Minimax. Restrições adicionais, como por exemplo limitar o peso de determinado ativo, ou impor um número mínimo de ativos na carteira, poderão ser consideradas.

Numa palavra final referir que, apesar da sua simplicidade, o Critério Minimax se afirma como um instrumento poderoso para a seleção de carteiras. Em tempos de crise e não só.

Bibliografia

Atsalakis, G., Valavanis , K. (2008). Surveying Stock Market Forecasting Techniques – Part I: Conventional Methods, *Journal of Computational Optimization in Economics and Finance* **2**(1), pp. 45-92.

Atsalakis, G., Valavanis , K. (2009). Surveying stock market forecasting techniques – Part II: Soft computing methods, *Expert Systems with Applications* 36, 5932–5941.

Broverman, S. A. (2010), *Mathematics of investment and credit*, 5th ed., Actex Publications, Winstead.

Cai, Xiaoqiang, Teo, Kok-Lay, and Zhou, Xun Yu (2000). Portfolio Optimization Under a Minimax Rule, *Management Science* **46** (7), 957-972.

Cai, Xiaoqiang, Teo, Kok-Lay, Yang, Xiaoqi and Zhou, Xun Yu (2004). Minimax portfolio optimization: empirical numerical study, *Journal of the Operational Research Society* **55**, 65-72.

Dichth, Hubert, and Drobetz, Wolfgang (2011). Portfolio insurance and prospect theory investors: Popularity and optimal design of capital protected financial products, *Journal of Banking & Finance* **35**, 1683-1697.

Dickson, D.C.M., Hardy, M.R. and Waters, H.R.(2009), *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Cambridge University Press.

Deng, Xiao-Tie, Li, Zhong-Fei, and Wang, Shou-yang (2005). A minimax portfolio selection strategy with equilibrium, *European Journal of*

Operational Research **166**, 478-292.

Gülpinar, Nalan, and Rustem, Berç (2007). Worst-case robust decision for multi-period mean-variance portfolio optimization, *European Journal of Operational Research* **183**, 481-1000.

Hillier, F. S., Lieberman, G. J. (2010). *Introduction to Operations Research* (ninth ed.). New York: McGraw-Hill International Edition.

Instituto de Seguros de Portugal. (2011). *Relatório do Setor Segurador e dos Fundos de Pensões 2010*. Disponível em: http://www.isp.pt/NR/rdonlyres/06B0C9C2-515B-47B8-9696-22F471AB9EE9/0/RSSFP_2010_AF.pdf.

Markowitz, Harry (1951). Portfolio Selection, *The Journal of Finance* **7**, 77–91.

Mulvey, J. M., Rosenbaum, D. P., and Shetty, B. (1997). Strategic financial risk management and operations research, *European Journal of Operational Research* **97**, 1-16.

P. Beraldi, A. Violi, F. De Simone (2011), A decision support system for strategic asset allocation, *Decision Support Systems* **51**, 549–561.

Polak, George G., Rogers, David F., and Sweeney, Dennis J. (2010). Risk management strategies via minimax portfolio optimization, *European Journal of Operational Research* **207**, 409–419.

The World Bank (2012). *GDP growth (annual %)*. Disponível em: http://data.worldbank.org.

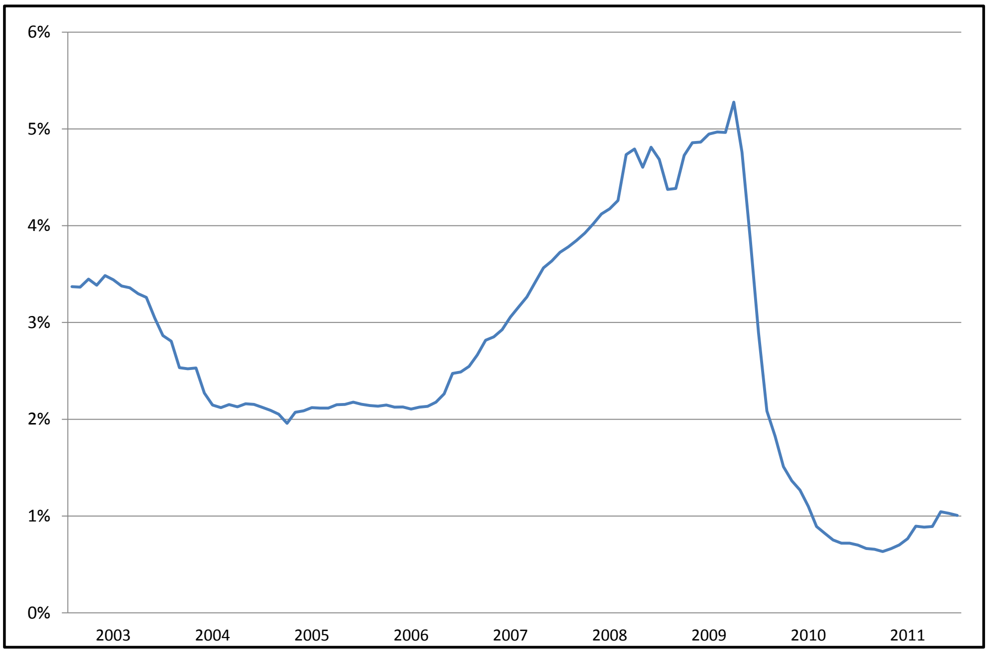
Von Lanzenauer, C. H. and Wright, D. D. (1991). Operational research and insurance, *European Journal of Operational Research* **55**, 1-13.

Wald, A. (1945).Statistical decision functions which minimize the maximum risk, *The Annals of Mathematics*, **46** (2), 265-280.

Young, Martin R. (1998). A minimax portfolio selection rule with linear programming solution, *Management Science* **44** (5), 673-683.

Yu, Tzu-Yi, Tsai, Chenghsien, and Huang, Hsiao-Tsu (2010). Applying simulation optimization to the asset allocation of a property-casualty insurer, *European Journal of Operational Research* **201**, 499-507.

Anexos



Anexo I – Rentabilidades Históricas Anuais da Euribor a 3 Meses

Fonte: Bloomberg

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
		1	0.923	0.923
		2	0.822	-0.208
		3	0.712	-0.088
		4	0.600	-0.071
		5	0.481	-0.117
		6	0.370	-0.006
		7	0.276	0.032
		8	0.186	-0.086
		9	0.103	-0.034
		10	0.022	-0.084
		11	-0.039	0.045
		12	-0.080	0.060
		13	-0.092	0.102
		14	-0.088	0.031
		15	-0.084	-0.095
		16	-0.102	-0.200
		17	-0.120	-0.003
		18	-0.129	0.063
		19	-0.140	-0.019
		20	-0.160	-0.080
		21	-0.163	0.070
		22	-0.148	0.048
		23	-0.135	-0.021
		24	-0.131	-0.023
		25	-0.125	0.021
		26	-0.125	-0.101
		27	-0.123	0.004
		28	-0.131	-0.135
		29	-0.134	0.038
		30	-0.139	-0.034
		31	-0.135	0.096
		32	-0.139	-0.093
		33	-0.140	0.023
		34	-0.159	-0.157
		35	-0.177	0.054
		36	-0.185	-0.022

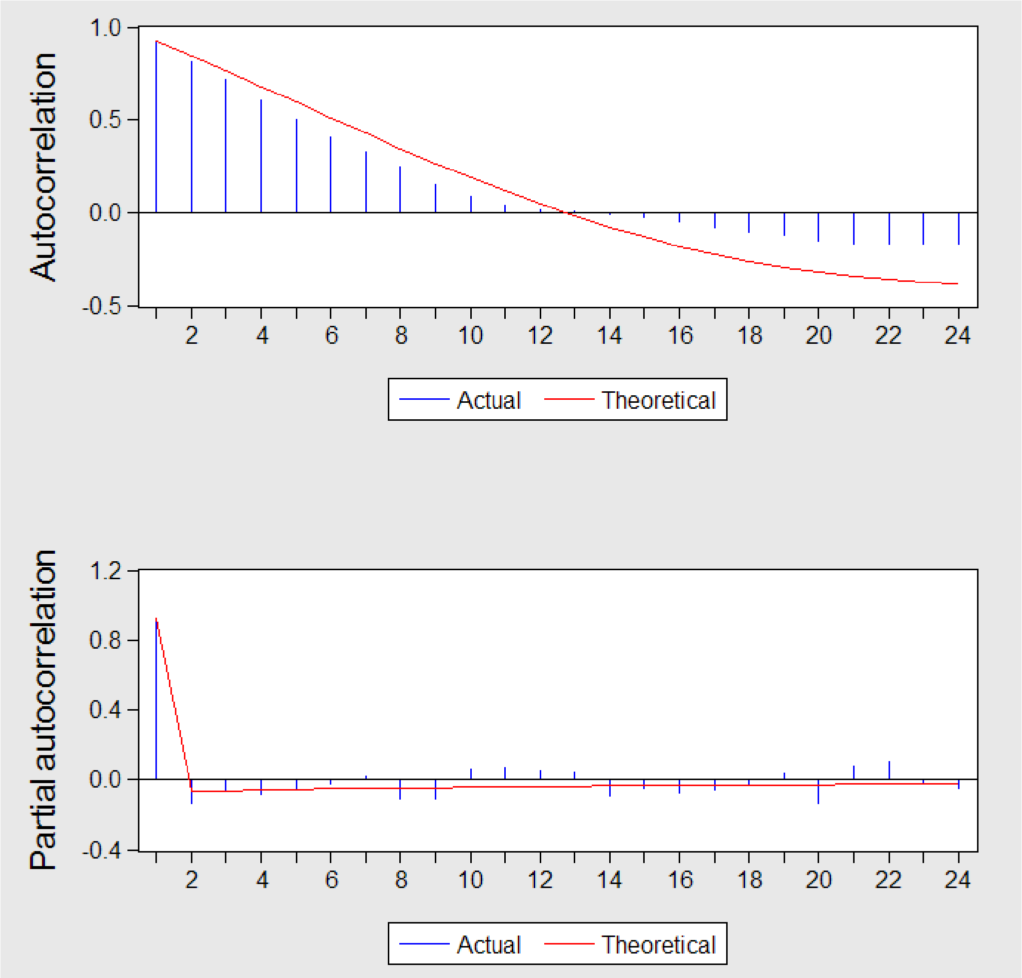
Anexo II – Autocorrelações e Correlações Parciais da Série SX5E – Índice de Ações da Zona Euro

			Modelização	
Índices	**Estatística de Teste**	**Valor-p**	**Série**	**Modelo**
PSI20	-2,29059	0,022	Original	ARMA
SX5E	-2,63771	0,009	Original	ARMA
MXWO	-2,51650	0,012	Original	ARMA
MXEF	-2,26228	0,024	Original	ARMA
SPX	-2,52173	0,012	Original	ARMA
IBEX	-2,37609	0,018	Original	ARMA
DAX	-2,10046	0,035	Original	ARMA
UKX	-2,53844	0,011	Original	ARMA
AEX	-2,62958	0,009	Original	ARMA
CAC	-2,54005	0,011	Original	ARMA
SX86P	-1,86202	0,060	Diferenças	ARIMA
QW8K	-0,27281	0,586	Diferenças	ARIMA
IB8T	-1,67832	0,088	Diferenças	ARIMA
IB8B	-1,36312	0,160	Diferenças	ARIMA
QW1A	-1,86896	0,059	Diferenças	ARIMA
EUGATR	-1,89416	0,056	Diferenças	ARIMA
GOLDS	-3,591833	0,0075	Original	ARMA
COA	-2,02354	0,042	Original	ARMA
EURUSD	-2,79326	0,006	Original	ARMA
EURGBP	-2,41135	0,016	Original	ARMA
EURCHF	-1,57651	0,108	Diferenças	ARIMA

Anexo III - Lista de Índices com Resultados do Teste de Dickey-Fuller, e o Modelo Correspondente a Utilizar

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
		1	0.068	0.068
		2	-0.155	-0.160
		3	0.104	0.131
		4	0.074	0.030
		5	-0.060	-0.034
		6	-0.076	-0.067
		7	0.062	0.050
		8	0.012	-0.013
		9	-0.010	0.029
		10	0.074	0.068
		11	0.032	0.011
		12	-0.369	-0.376
		13	-0.100	-0.040
		14	0.091	-0.015
		15	-0.042	0.026
		16	-0.007	0.082
		17	0.031	-0.003
		18	0.000	-0.082
		19	-0.098	-0.103
		20	-0.002	0.015
		21	-0.126	-0.158
		22	-0.040	0.078
		23	-0.012	-0.018
		24	-0.012	-0.154
		25	0.033	-0.030
		26	-0.011	-0.007
		27	0.019	0.003
		28	0.025	0.099
		29	-0.030	-0.009
		30	0.001	-0.036
		31	0.094	0.017
		32	-0.004	-0.013
		33	0.141	0.099
		34	-0.084	-0.155
		35	-0.147	-0.119
		36	-0.016	-0.173

Anexo IV – Autocorrelações e Correlações Parciais da Série das Diferenças de EUGATR – Índice de Ações Europeias



Anexo V – Autocorrelações e Correlações Parciais da Série SX5E – Índice de Ações da Zona Euro, e da Modelação Proposta