MESTRADO

DECISÃO ECONÓMICA E EMPRESARIAL

TRABALHO FINAL DE MESTRADO

DISSERTAÇÃO

MODELOS DE OTIMIZAÇÃO PARA A GESTÃO DE ATIVOS E PASSIVOS NOS FUNDOS DE PENSÕES

RICARDO BRITO MELO

MARÇO DE 2015

MESTRADO

DECISÃO ECONÓMICA E EMPRESARIAL

TRABALHO FINAL DE MESTRADO

DISSERTAÇÃO

MODELOS DE OTIMIZAÇÃO PARA A GESTÃO DE ATIVOS E PASSIVOS NOS FUNDOS DE PENSÕES

RICARDO BRITO MELO

ORIENTAÇÃO: ONOFRE ALVES SIMÕES

MARÇO DE 2015

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Doutor Onofre Alves Simões, pelo apoio, paciência, motivação, perseverança e disponibilidade, sem o que não seria possível a concretização deste trabalho.

À Professora Doutora Margarida Pato, pelo acompanhamento e apoio ao longo de todo o mestrado.

Aos meus colegas e amigos, que sempre me apoiaram e contribuíram para a elaboração da presente dissertação, em especial ao João Mira, Luísa Inês, Pedro Lima e Ana Teresa, pelas preciosas ajudas na exposição das ideias e na breve revisão do texto.

A toda a minha família, em especial à minha irmã e aos meus pais, pela oportunidade e apoio incondicional durante a realização de todo o programa.

MODELOS DE OTIMIZAÇÃO PARA A GESTÃO DE ATIVOS E PASSIVOS NOS FUNDOS DE PENSÕES

RICARDO BRITO MELO

ORIENTADOR: ONOFRE ALVES SIMÕES

MESTRADO EM: DECISÃO ECONÓMICA E EMPRESARIAL

RESUMO

No futuro teme-se que as pensões de reforma por velhice possam estar subfinanciadas, devido ao envelhecimento da população e também ao início tardio da vida laboral. É possível que, para tentar contornar esta situação, seja necessário um aumento significativo no nível das contribuições feitas pelos empregadores e empregados. Uma forma de procurar minimizar esse aumento é o recurso a modelos de otimização, que serão aplicados precisamente à gestão dos ativos e passivos associados a fundos e planos de pensões.

Este trabalho, que é essencialmente um estudo teórico, está dividido em duas partes. Na primeira, apresentam-se os aspetos essenciais dos planos e fundos de pensões e também os conceitos fundamentais na gestão de ativos e passivos (*Assets and Liabilities Management* - ALM), pois não são temas tratados na parte curricular do mestrado, nem na licenciatura. Na segunda, depois de uma análise bastante exaustiva da volumosa literatura existente sobre o tema, apresentam-se oito trabalhos que foram selecionados atendendo ao propósito de procurar dar a conhecer, tanto quanto as restrições de dimensão do texto o possibilitam, as diferentes abordagens para a resolução do importante problema em causa.

PALAVRAS-CHAVE: PLANOS E FUNDOS DE PENSÕES, ALM, MODELOS DE OTIMIZAÇÃO, PDE.

Optimization Models for the Management of Assets and Liabilities in Pension Funds

Ricardo Brito Melo
Supervisor: Onofre Alves Simões
Master in: Economic and Business Decision

Abstract

Retirement pensions may be at risk in a future not so far, because of aged populations and late start of working life. This means that an increase of contributions by the sponsors, employers and employees, may be required. Another way to mitigate the risk of this happening is to apply optimization models in the management of the assets and liabilities for pension funds and pension plans.

This document is essentially a theoretical text, in two parts. The first part presents the main features about pension funds and pension plans and fundamental concepts regarding assets and liabilities management (ALM), because these are 'new' topics, in the sense that there is no course in the Masters program (or in the Bachelors program) in which they are covered. The second part gives the possible review of the existing extensive literature; a particular detail is given to eight contributions that give very interesting different approaches to solve the ALM problem for pension funds.

Keywords: Pension Plans and Pension Funds, ALM, Optimisation Models, SDP.

Índice

Índice de Siglas

ALM – Asset-Liability Management

AMPL – A Mathematical Programming Language

ASF – Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões

BD – Benefícios Definidos

CD – Contribuições Definidas

CRRA – Constant Relative Risk Aversion

EUA – Estados Unidos da América

PD – Programação Dinâmica

PDE – Programação Dinâmica e Estocástica

PE – Programação Estocástica

PM – Programação por Metas

RU – Reino Unido

UE – União Europeia

ISP – Instituto de Seguros de Pensões

1. Introdução

O tema desta dissertação surgiu do desejo de tentar aplicar os conhecimentos adquiridos na parte curricular do mestrado a um problema decorrente da atividade profissional do autor, exercida no centro de serviços, de cálculo de responsabilidades, de uma consultora. O problema tratado consiste na otimização da gestão de ativos e passivos de fundos de pensões, com a finalidade de maximizar o benefício ou de minimizar as contribuições. Esta questão torna-se cada vez mais atual, devido às dificuldades crescentes sentidas pela Segurança Social e que se prendem sobretudo com fatores demográficos, o que tendencialmente fará aumentar o peso dos planos privados no financiamento da reforma.

Como se lê em Garcia e Simões (2010), os fundos de pensões constituem um património autónomo destinado à concretização e realização de um ou mais planos de pensões e de planos de benefícios diferidos associados, como a saúde. Isto significa que os fundos de pensões são instituídos para conceder benefícios e é essencial que tenham a solidez para que isso aconteça, o que obriga a dispor de um suporte técnico e atuarial efetivo e de um adequado enquadramento legal e fiscal. A estes requisitos está inerente uma otimizada gestão de ativos e passivos.

Numa primeira fase do trabalho, o objetivo era escolher um modelo de gestão de ativos e passivos (*Assets and Liabilities Management* - ALM) que parecesse mais adequado, entre os existentes na literatura, passando-se depois a desenvolver uma aplicação prática, numa tentativa de conciliar teoria e prática. O modelo foi escolhido, mas a impossibilidade de obter dados reais, devido aos vários acordos de confidencialidade, acabou por interditar esta via e a ideia de concretizar um contributo académico, na otimização da gestão de ativos e passivos de um fundo de pensões particular, teve que ser abandonada.

Restou então a abordagem que aqui se apresenta: aprofundar a revisão bibliográfica anterior e apresentar como que o *current state-of-the-art* no tratamento do tema. Depois de uma primeira triagem com 19 trabalhos (Consigli e Dempster (1998), Dutta, Kapur e Orszag (2000), Boender (2006), Cairns, Blake e Dowd (2006), Hilli, Koivu, Pennanen e Ranne (2007), Josa-Fombellida e Rincón-Zapatero (2006, 2008, 2010), Geyer e Ziemba (2008), Dupacová e Polívka (2009), Iyengar e Ka Chun Ma (2010), Lim e Wong (2010), Hana e Hung (2012), Li e Li (2012), Yu, Huang, Chen e Lin (2012), Gulpinar e Pachamanova (2013), Aouni, Colapinto e La Torre (2014), Guan e Liang (2014), Homem-de-Mello e Bayraksan (2014)), escolheram-se oito modelos que se afiguram como os mais representativos daquilo que os diferentes autores têm oferecido ao longo do tempo sobre o assunto.

Esta opção acabou por se revelar muito enriquecedora, pois o leque de alternativas é muito variado na forma de tratamento do problema e, ao mesmo tempo, vai de encontro às conclusões a que os diversos contributos chegam.

O texto está dividido em quatro capítulos: introdução, um capítulo sobre conceitos fundamentais (Capítulo 2), os modelos selecionados para apresentação (Capítulo 3) e as conclusões (Capítulo 4). O Capítulo 2, por sua vez, divide-se em duas grandes secções: na primeira, descreve-se brevemente a importância dos fundos de pensões, ilustrando os diferentes tipos de planos e os métodos de custo e de financiamento; a segunda contém noções básicas de ALM e a sua relevância extrema no domínio dos fundos de pensões. O Capítulo 3 também se encontra dividido em duas secções: na primeira são sucessivamente introduzidos quatro modelos que recorrem à programação dinâmica; na segunda, incluem-se quatro modelos que usam outras metodologias[1].

Naturalmente, o texto não pode deixar de refletir as diferenças formais que os trabalhos originais evidenciam, o que de algum modo lhe pode tirar unidade, mas este é um risco inevitável num trabalho com estas características. Apesar disso, espera-se que o resultado obtido possa servir como 'guia' sobre o conhecimento do trinómio Modelos de Otimização, ALM e Fundos de Pensões.

Uma revisão da bibliografia existente é necessariamente incompleta, uma vez que o espaço é bastante limitado. Tal limitação impediu por vezes uma análise mais profunda das diferentes formulações, nomeadamente, a discussão em torno dos parâmetros escolhidos em cada caso. No entanto, confia-se que este contributo seja útil na forma como relaciona assuntos tão variados como otimização, fundos de pensões, gestão de ativos e passivos, mercados financeiros, programação dinâmica e estocástica e programação não dinâmica. Espera-se também que seja uma rampa para trabalhos futuros, onde se alie o cálculo atuarial em fundos de pensões à matemática financeira e à otimização da gestão.

[1] A teoria básica e exemplos de aplicações da programação dinâmica e estocástica, que é a metodologia mais natural na resolução do problema, podem ver-se em Ross (1983).

2. Planos e Fundos de Pensões e Gestão de Ativos e Passivos

2.1 Planos e fundos de pensões

2.1.1 Noções básicas

As noções básicas sobre planos e fundos de pensões podem encontrar-se, por exemplo, em Brown e Schieber (2005) ou Garcia e Simões (2010). Nesta subsecção faz-se apenas uma síntese breve dos aspetos essenciais.

Planos de pensões são programas (conjuntos de regras) com a finalidade de estabelecer as condições necessárias à constituição do direito ao recebimento de uma pensão. A pensão pode ser recebida a título de reforma por velhice, reforma antecipada, pré-reforma, reforma por invalidez ou ainda por sobrevivência.

Os planos de pensões são vantajosos para as empresas (permitem aumentos na produtividade, atraem e retêm pessoas chave, obtêm incentivos fiscais) e para os trabalhadores (a incerteza relativamente à Segurança Social aumenta e a necessidade de ser o setor privado a providenciar rendimentos na reforma é cada vez mais evidente). Podem ser *contributivos*, se o trabalhador financia o plano conjuntamente com a empresa, ou *não contributivos*, se essa repartição das responsabilidades de financiamento não acontece.

Existem essencialmente dois tipos de planos de pensões: os planos de benefício definido (BD – ver 2.1.2) e os planos de contribuição definida (CD – ver 2.1.3). Há ainda planos híbridos, mais recentes, que conjugam os dois tipos anteriores. Encontram-se sobretudo no RU e nos EUA (ver Hill T, Pang G, Warshawsky M (2010)).

Um fundo de pensões é uma entidade autónoma, que recebe as contribuições periódicas previstas no plano, e vai constituindo um património que é utilizado exclusivamente para financiamento das pensões naquele previstas. Os fundos de pensões são um poderoso instrumento financeiro e, em princípio, o modo mais seguro de financiar um plano de pensões. O comportamento dos investimentos dos fundos é da maior importância para o controlo dos riscos e para a segurança dos benefícios, razão pela qual a política de investimentos deve ser estabelecida e controlada pelos principais interessados.

Os intervenientes num fundo de pensões são as entidades gestoras (seguradoras que exploram o ramo vida e sociedades gestoras de fundos de pensões), os associados (pessoas coletivas que contribuem para o fundo), os participantes (pessoas singulares, em função das quais se definem os direitos subjacentes ao plano), os beneficiários (pessoas que têm o direito a receber as pensões), o depositário (instituição de crédito onde se deposita o fundo) e a Autoridade de Supervisão de Seguros e Fundos de Pensões (ASF, antigo ISP – Instituto de Seguros de Portugal).

Os fundos de pensões podem ser fechados ou abertos. Os fundos de pensões fechados são constituídos por iniciativa de qualquer empresa, associação ou grupo de empresas. A adesão a este tipo de fundos obriga a um vínculo laboral ou social entre os participantes, sendo necessária a concordância destes para a inclusão de qualquer novo associado. A constituição dos fundos de pensões abertos é feita por iniciativa de qualquer entidade autorizada a geri-los. A adesão coletiva e individual faz-se sem exigências de ligação entre os aderentes, dependendo unicamente da aceitação por parte da entidade gestora. O seu património é dividido em unidades de participação e consideram-se constituídos no dia da entrega da primeira contribuição, efetuada nos termos do respetivo regulamento de gestão.

2.1.2 Planos de benefício definido

Nos planos BD o benefício que será atribuído ao trabalhador na reforma está pré-definido, sendo calculado de acordo com uma fórmula. Esta pode variar, mas tem normalmente em conta três fatores essenciais: o salário, a idade e os anos de serviço.

Os planos BD dizem-se *independentes* quando os benefícios garantidos não dependem da pensão da Segurança Social, *complementares integrados*, quando são um complemento à pensão da Segurança Social, ou *complementares não integrados*, quando o benefício total tem um limite que integra a pensão da Segurança Social.

Os trabalhadores conhecem o benefício e não estão expostos ao risco de investimento, mas pode haver dificuldade na portabilidade dos benefícios. Quanto às empresas, existe incerteza em relação ao custo do plano, à exposição ao risco de investimento, à exigência de um nível de financiamento e à necessidade de avaliações atuariais periódicas.

2.1.2.1 Fatores de custo atuarial

É essencial que os responsáveis pela política de investimentos atendam à relação entre as responsabilidades do plano e os ativos a este afetos, bem como ao impacto que os resultados dos investimentos têm sobre as contribuições a fazer. Para definir a política de financiamento, tem assim que se fazer a chamada ‘avaliação atuarial’.

A avaliação atuarial tem vários objetivos: estimar o custo a longo prazo do plano de pensões; indicar as contribuições necessárias para o fundo, dado o conjunto de benefícios; preparar relatórios atuariais; calcular a responsabilidade para com os membros que mudam de plano.

Regra geral, a população de um plano é constituída por quatro grupos: ativos, Ex ativos, reformados e beneficiários. As características que afetam o custo são o número de participantes, género, idade atual, anos de serviço e idade de entrada no plano. É crucial saber se a população está a crescer, diminuir ou constante, através dos decrementos de saída, invalidez, reforma e morte. Os atuais acréscimos na longevidade, bem como a distribuição salarial são outros aspetos fundamentais.

Um importante passo da avaliação é a determinação do valor esperado atualizado (valor atuarial) dos benefícios acumulados ou projetados para cada tipo de benefício e para cada pessoa. As bases usadas são demográficas, relacionadas com a população, e económicas, relacionadas com as taxas de retorno, salário e inflação. É ainda necessário ter em consideração as despesas associadas aos planos de pensões (de desenvolvimento, administrativas e com os pagamentos).

2.1.2.2 Métodos de custo atuarial

Contribuição Normal é o valor do custo, atuarialmente calculado para cada ano, para responder às responsabilidades do fundo, através de um método de financiamento. Responsabilidade Atuarial é o valor (atuarial) das despesas futuras com os benefícios do plano. Depende do método de avaliação, do financiamento e dos parâmetros usados.

Ganhos e Perdas Atuariais acontecem frequentemente, visto que as responsabilidades variam se existirem alterações na população, salários, benefícios ou pressupostos atuariais. As previsões dos valores das contribuições e das responsabilidades normalmente não se concretizam e é necessário identificar a causa dos possíveis ganhos e perdas atuariais.

2.1.2.3 Métodos de financiamento em planos de benefício definido

Os métodos de financiamento têm como objetivo formar provisões suficientes para que o fundo possa cumprir o plano estabelecido no tempo previsto e sem contribuições extraordinárias. Há vários métodos para avaliar as responsabilidades: *Unit Credit* projectado, não projectado e corrigido, *Aggregate cost method*, *Entry Age* e *Attained Age*, entre outros.

– *Unit Credit* projetado, não projetado e corrigido

Calcula as contribuições considerando a divisão do valor da responsabilidade com a pensão em tantas partes quantos os anos de serviço. Se o benefício final pode ser estimado, poder-se-á obter a unidade de pensão em cada ano de serviço, de modo que toda a pensão seja assegurada quando chegar a reforma. Assim, no *Unit Credit* projetado, em cada ano é financiada uma parte da pensão a adquirir, tendo como base a projeção salarial para a idade normal de reforma. É o método consagrado na atual legislação para cálculo das contribuições.

Na variante não projetado, o método não tem em consideração possíveis crescimentos salariais. Na versão não projetado corrigido prevê-se a entrega ao fundo dos montantes necessários, sempre que se verifiquem aumentos salariais; não há uma projeção anterior, mas há um acerto posterior, quando necessário.

– *Aggregate cost method*

Agrega as responsabilidades, não permitindo a separação entre as atribuíveis a serviços passados e as atribuíveis a serviços futuros. Tem por objetivo a fixação de uma contribuição regular, por vezes uma percentagem fixa da massa salarial. A contribuição resulta do quociente entre o valor atuarial total das responsabilidades para a população ao abrigo do plano e o valor atuarial da massa salarial futura correspondente. Permanece constante se não houver variações populacionais e todos os valores considerados, benefícios ou salários, forem projetados para a data normal de reforma.

– *Entry Age*

Neste método a contribuição normal é a correspondente à contribuição nivelada de um participante recém-entrado no plano. Assim, a contribuição aumenta com o aumento da idade de admissão. A contribuição necessária para o financiamento do plano é expressa em percentagem do salário, aplicando-se a toda a massa salarial da população. A contribuição normal pode, por considerar uma idade média de entrada, ser insuficiente para cobrir o custo dos benefícios futuros.

– *Attained Age*

É uma união entre o *Unit Credit* projetado e o *Aggregate cost*. Os custos totais dos benefícios são separados em serviços passados e futuros. A contribuição obtém-se nivelando os custos atuariais relativos ao serviço futuro dos atuais participantes ativos. O fundo normal é igual ao do *Unit Credit* projetado, correspondendo à responsabilidade por serviços passados dos participantes. Não tem em consideração novas entradas para o plano, pelo que, se as houver, a contribuição terá de ser ajustada. Como a idade das novas entradas tende a diminuir, a taxa de contribuição requerida pode diminuir. A vantagem do método está no conhecimento do encargo médio futuro, expresso em percentagem dos salários, caso se verifiquem as hipóteses atuariais assumidas.

Naturalmente, a opção por um particular método vai ter grande influência no nível de financiamento requerido e no valor das contribuições normais que serão necessárias, aspetos muito importantes quando se considera o lado do passivo num estudo de ALM.

2.1.2.4 Previsões

A dinâmica dos planos de pensões e as características de longo prazo dos vários métodos de custo atuarial podem ser simuladas em sucessivas gerações de participantes, com apropriados pressupostos sobre experiências futuras. Tais simulações do plano atuarial podem dar ao associado informações preciosas sobre o potencial do custo normal, responsabilidade atuarial, fluxos de caixa e acumulação de ativos, em diferentes cenários. Também pode indicar as futuras consequências financeiras de qualquer mudança no plano. Os associados de grandes planos de pensões têm interesse em fazer previsões do custo das pensões e dos fluxos de caixa, mas a dificuldade em prever a muito longo prazo torna os resultados imprecisos.

2.1.3 Planos de contribuição definida

Nos planos CD é a contribuição que está pré-definida, sendo normalmente uma percentagem do salário pensionável. Cada trabalhador tem uma conta individual, onde são creditadas as contribuições e os rendimentos gerados pelos ativos afetos ao plano, sendo informado regularmente sobre o saldo. Na data da reforma, os valores acumulados nas contas individuais são usados para a aquisição de uma renda. A pensão a receber depende assim não só do valor que se acumulou durante o período ativo, mas também das condições existentes a nível do mercado das anuidades na data da reforma.

Do ponto de vista da empresa, a grande vantagem é a reduzida volatilidade dos custos, que igualam as contribuições efetuadas, e estas são pré-definidas. Para os trabalhadores, é a existência de direitos adquiridos e portabilidade, mas o risco do investimento fica do seu lado. Estes planos não garantem um valor do benefício, que depende dos montantes e *timing* das contribuições entregues e dos rendimentos gerados pelas aplicações financeiras. O participante tem pouco controlo sobre o desempenho do fundo e o nível de risco envolvido. Consequentemente, e contrastando com os planos BD, a percentagem de benefício que se pretende alcançar é um objetivo que pode não ser alcançado.

2.2 Gestão de ativos e passivos

2.2.1 Noções básicas

O tópico da gestão de ativos e passivos (em Inglês, *Assets and Liabilities Management*-ALM) pode encontrar-se, por exemplo, em Zenios SA, Ziemba WT (2006 e 2007) e em Society of Actuaries (2003). Segue-se um resumo breve dos principais aspetos.

ALM é a prática de gestão onde as decisões são tomadas levando em linha de conta a coordenação entre ativos e passivos. Pode assim ser definida como um processo contínuo de definição, implementação, monitorização e revisão das estratégias relativas a ativos e passivos, para se alcançarem os objetivos estabelecidos. É particularmente importante na gestão de bancos, seguros de saúde e de vida e no contexto dos planos e fundos de pensões. Inicialmente orientada para o risco de taxa de juro, abarca agora muitos outros tipos de risco, nomeadamente, os riscos de liquidez, cambial e soberano.

O primeiro passo do método tradicional de ALM é o levantamento da estrutura e dimensão das responsabilidades (e sua exigibilidade) e das principais classes de ativos a considerar. O segundo passo, iterativo, é a definição da afetação estratégica, ou seja, estabelecer um limite para cada tipo de ativo, no sentido da otimização desejada. Define-se uma estratégia inicial, que se monitoriza ao longo do tempo, por forma a otimizar os objetivos em termos de retornos, segurança e liquidez, mantendo ao mesmo tempo o risco em níveis aceitáveis.

2.2.2 A carteira

A principal responsabilidade de um gestor de carteira é calcular os valores das aplicações nos diferentes ativos, olhando os retornos e os riscos, mas o gestor de um fundo de pensões não se pode limitar a tentar maximizar a carteira de ativos, usando por exemplo a técnica tradicional da fronteira eficiente: deve procurar fazer o *matching* entre o encaixe financeiro dos juros, dos dividendos, das transações de ativos e os pagamentos das responsabilidades assumidas, num prazo que às vezes é muito longo.

Aos associados de um fundo de pensões de benefício definido interessa que os retornos e as contribuições tenham pouca volatilidade. Aos beneficiários e autoridades de controlo interessa que o fundo tenha ativos suficientes para respeitar os compromissos.

Muitas organizações estabelecem contas de ativos e passivos e fazem corresponder grupos de ativos a específicos grupos de passivos. A gestão ALM deve seguir certos princípios metodológicos:

- Identificar todos os riscos envolvidos, medir o impacto que provocam nas carteiras e geri-los, antes ou *a posteriori*, com eficiência.
- Estar organizada de modo a vigorar uma política de prevenção, deteção e tratamento eficaz de riscos, com procedimentos e responsabilidades atribuídas a todos os níveis da hierarquia.
- Assegurar que os sistemas de controlo e os capitais envolvidos se ajustam à natureza e à complexidade dos riscos.

2.2.3 ALM em planos e fundos de pensões

Como os planos e fundos de pensões estão sujeitos a um conjunto vasto de normas legais vindas da ASF[2], para se obter uma ALM otimizada há sempre a necessidade de conciliar diferentes objetivos e restrições. Um associado preocupado com as consequências de eventuais perdas nos investimentos terá um modelo de ALM diferente de um outro que se preocupe sobretudo com o aumento das responsabilidades. É importante identificar o risco mais significativo para cada organização.

Em planos de contribuição definida interessa aos participantes o que vão receber à idade de reforma, em troca das contribuições entregues ao fundo. Tais contribuições são uma percentagem do salário e antes da reforma não se sabe qual a taxa de substituição. É uma variável aleatória, função das contribuições, do aumento salarial, dos retornos dos ativos e do custo de vida, elementos que constam dos modelos usados em ALM. A aplicação destes modelos aos fundos de pensões ajuda o associado a estabelecer a política de seleção de ativos, de modo a aumentar o valor do fundo no longo prazo com os retornos obtidos e procurando controlar os riscos de curto e longo prazo.

A concluir, uma referência às simulações de Monte Carlo, de que a ALM em fundos de pensões se socorre amiúde, sendo variáveis chave a inflação, o crescimento salarial, as taxas de juros, as *yields* de obrigações de longo prazo e o retorno de investimentos para toda a classe de ativos. Os modelos devem incluir dinâmicas de longo prazo das variáveis económicas e dos mercados de capital: correlação entre variáveis, reversão à média, padrões de correlação e volatilidade (ver Korn, Korn e Kroisandt (2010)).

[2] ver http://www.asf.com.pt/NR/exeres/8861CD79-800C-4A2A-802B-32774623CF16.htm.

3. Os Modelos de Otimização – Seleção e Revisão

3.1 Modelos de Programação Dinâmica

A vasta literatura sobre a otimização da gestão dos fundos de pensões, citada ao longo do capítulo, evidencia que a natureza do problema conduz naturalmente ao recurso à programação dinâmica (PD), nomeadamente à programação dinâmica estocástica (PDE), pelo que um grande número de trabalhos faz uso desta ferramenta para a sua resolução. Optou-se assim por se lhes dar relevo neste *survey*, começando-se por uma breve explicação do essencial da PD e da PDE.

3.1.1 Programação dinâmica e programação dinâmica estocástica

Nos parágrafos que se seguem, acompanha-se mais de perto Ross (1983), mas também, por exemplo, Cooper e Cooper (1981) e Taha HA (2011), sendo estes referências úteis.

A PD é uma técnica matemática de enumeração usada para resolver problemas complexos, em que é necessário tomar decisões sequenciais que não são independentes umas das outras, pois encontram-se interrelacionadas. Num esforço de simplificação, pode dizer-se que permite desenvolver um processo recursivo que possibilita a determinação de uma solução otimizada por enumeração explícita de um número de soluções (relativamente) reduzido.

Aparentemente, a PD pode ser aplicada a problemas com muito poucas semelhanças, mas a realidade é que todos compartilham as seguintes características: (1) podem ser subdivididos em etapas, devendo ser tomada uma decisão em cada uma delas; (2) no início de cada etapa, o sistema subjacente ao problema pode estar num certo número ou infinito de estados possíveis; (3) a decisão tomada em cada etapa conduz o sistema a um dos estados possíveis na etapa seguinte; (4) o processo de solução consiste em determinar uma política ótima para o problema global, o que passa por encontrar a decisão ótima em cada etapa, dado o respetivo estado do sistema; (5) para um qualquer estado do sistema, a política ótima nas fases seguintes é independente das decisões tomadas nas etapas anteriores, de acordo com o chamado princípio de otimalidade de Bellman (a decisão ótima depende apenas do estado corrente e não de como este foi alcançado, Bellman (1952)); (6) é possível definir uma fórmula de recorrência que identifica a política ótima numa determinada fase, dada a política ótima na fase seguinte (normalmente, o processo de resolução é regressivo – *backwards*).

Relativamente a este último aspeto, se N é o número de etapas, n é a etapa corrente ($n = 1,2, \dots, N$), s_n é o estado corrente na etapa n, x_n é a variável de decisão na etapa n, x_n^* é o valor ótimo de x_n, dado o estado s_n, e $f_n(s_n, x_n^*)$ é a contribuição das fases $\geq n$ para a função objetivo (admitindo que na etapa n o sistema se encontra no estado s_n, é tomada a decisão x_n e se segue a política ótima nas etapas seguintes), a fórmula de recorrência vem

$$f_n^*(s_n) = f_n(s_n, x_n^*) = \underbrace{max}_{x_n} (min)\{f_n(s_n, x_n)\}.$$

É uma fórmula de recorrência porque $f_n(s_n, x_n)$ é escrita a partir de $f_{n+1}^*(s_{n+1})$ e também da contribuição de x_n para a função objetivo.

Nos problemas de PDE, o contributo do período corrente para a função objetivo ou o estado na etapa seguinte não são conhecidos com certeza, ou seja, são variáveis aleatórias, com uma determinada distribuição de probabilidade.

De seguida, introduzem-se então os quatro modelos selecionados (por parecerem mais significativos, tendo em conta o fim deste trabalho).

3.1.2 Modelo multiperíodo para otimização do portfólio num quadro de ALM com controlo da insolvência – Li e Li (2012)

Este estudo trata o problema complexo de otimização de um portfólio de ativos ao longo do tempo, no quadro mais alargado da gestão de ativos e passivos, e de modo a controlar a probabilidade de insolvência no horizonte considerado, situação típica em muitos fundos de pensões. Constitui assim um contributo de contornos muito amplos.

O problema é formalizado como um modelo de média-variância, segundo o clássico binómio de Markowitz (1952) para a seleção de portfólios (ver também Elton, Gruber, Bown and Goetzmann (2010)), incluindo ainda o controlo de insolvência período a período. Li e Li (2012) recorrem aos multiplicadores de Lagrange, ver Bazaraa e Shetty (1979), e à PD para a sua resolução.

Admita-se que em $t = 0$ o fundo tem disponibilidades x_0 e responsabilidades de valor l_0. No mercado existem dois ativos com risco, um dos quais pode tender a ativo sem risco. O gestor deve decidir sobre como repartir x_0 entre os dois ativos em $t = 0$, e como reajustar essa primeira afetação no início de cada um dos períodos seguintes, até se atingir o momento final da análise, $t = T$. Para orientar a determinação dessa estratégia dinâmica de seleção do portfólio tem por objetivo maximizar uma função que depende da média e da variância do valor do fundo em $t = T$, bem como da sua aversão ao risco. As restrições resultam da necessidade de respeitar simultaneamente as dinâmicas do valor do fundo e do valor das responsabilidades, ao longo do tempo. Adicionalmente, os autores introduzem um controlo de insolvência, que consiste em atuar sobre a probabilidade de o valor do fundo no fim de cada um dos T períodos ser inferior ao que designam por 'barreira do desastre'. As 'barreiras do desastre' são previamente estabelecidas e o parâmetro que controla a probabilidade de insolvência também.

Notação:

$r_t^0,\ \tilde{r}_t,\ q_t$: taxas de retorno dos três instrumentos (ativo 1, ativo 2 e responsabilidades) no período $t+1$, que decorre entre os momentos t e $t+1, t = 0,1, \dots T-1$

x_t: valor disponível para aplicação nos dois ativos no momento t

l_t: valor das responsabilidades no momento t (supostas exógenas, não dependem do portfólio)

$s_t = x_t - l_t$: valor do fundo no momento t, depois de liquidadas s responsabilidades (*surplus*)

$\omega_T > 0$: fator de aversão ao risco do gestor do fundo

b_t: 'barreira do desastre' no momento t

$\alpha_t \in (0,1)$: fator de controlo do risco de falência no momento t

$u = \{u_0, \dots, u_{T-1}\}$: estratégia do portfólio dinâmico (u_t é o montante investido no ativo 2 no momento t); são as variáveis de decisão

Formalmente, tem-se o seguinte modelo média-variância generalizado, $GMV(\omega_T, \alpha)$:

$$\begin{cases} \max\limits_{u} E[s_T] - \omega_T Var(s_T) & & \\ \quad sujeito\ a: & Var(s_t) \leq \alpha_t (E[s_t] - b_t)^2, t = 0,1, \dots T-1 & \\ & x_{t+1} = r_t^0(x_t - u_t) + \tilde{r}_t u_t = r_t^0 x_t + \underbrace{r_t^1}_{\tilde{r}_t - r_t^0}\ u_t, & t = 0,1, \dots T-1 \ \ (1) \\ & l_{t+1} = q_t l_t, t = 0,1, \dots T-1 \ \ (2) & \end{cases}$$

O primeiro conjunto de restrições exprime o controlo da probabilidade de insolvência, o que é feito de forma engenhosa com o recurso à conhecida desigualdade de Chebychev, (1) exprime a dinâmica dos ativos e (2) exprime a dinâmica das responsabilidades. Estabelecidas as convenientes hipóteses de independência entre os retornos, o problema é resolvido recorrendo à abordagem indireta da Lagrangeana dual, o que obriga a resolver primeiro um problema auxiliar e a recorrer depois ao método primal-dual. Restrições de espaço obrigam a remeter o leitor para o artigo original, relativamente às questões técnicas, mas apresenta-se de seguida o procedimento que permite obter a estratégia dinâmica $u = \{u_0, \dots, u_{T-1}\}$ ótima.

O problema Lagrangeano é construído introduzindo os multiplicadores de Lagrange $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{T-1}) \geq 0$ associados às restrições sobre a insolvência e incluindo estas na função objetivo, como é habitual. Vem $L(\omega, \omega_T, \alpha)$:

$$\begin{cases} \max_u E[s_T] - \omega_T Var(s_T) - \sum_{t=1}^{T-1} \omega_t [Var(s_t) - \alpha_t (E[s_t] - b_t)^2] \\ \qquad\qquad sujeito\ \ a\ \ (1)\, e\, (2) \end{cases}$$

Uma vez que $L(\omega, \omega_T, \alpha)$ não é separável no sentido da PD, é necessário passar ainda a um problema auxiliar, $A(\lambda, \omega, \omega_T)$, propositadamente construído para "abrir caminho":

$$\begin{cases} \max_u E\left[\sum_{t=1}^{T-1} (\lambda_t s_t - \omega_t (s_t)^2)\right], \\ \qquad sujeito\ \ a\ \ (1)\, e\, (2) \end{cases}$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_T)$ é um vetor de parâmetros auxiliares. Os autores mostram que aplicando a PD a $A(\lambda, \omega, \omega_T)$ se consegue obter a seguinte solução (Teorema 3.1):

$$u_t^*(\lambda, \omega) = \frac{1}{2} \frac{E[e_1' A_t' F_{t+1}]}{E[e_1' A_t' \bar{D}_{t+1} \bar{D}_{t+1}' A_t e_1]} - \frac{E[e_1' A_t' \bar{D}_{t+1} \bar{D}_{t+1}' B_t z_t]}{E[e_1' A_t' \bar{D}_{t+1} \bar{D}_{t+1}' A_t e_1]}, t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (3)$$

onde $'$ indica a operação de transposição de matrizes e

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_t = \begin{pmatrix} r_t^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F_t = \begin{pmatrix} \sum_{s=t+1}^T \bar{r}_t^{s-t-1} \lambda_s + \lambda_t \\ -\sum_{s=t+1}^T \bar{q}_t^{s-t-1} \lambda_s - \lambda_s \end{pmatrix},$$

$$\bar{D}_t = \begin{pmatrix} \omega_T^{\frac{1}{2}} \bar{B}_t^{T-t-1} e, & \dots, & \omega_s^{\frac{1}{2}} \bar{B}_t^{s-t-1} e, & \dots, & \omega_{t+1}^{\frac{1}{2}} \bar{B}_t^0 e, & \omega_t^{\frac{1}{2}} e \end{pmatrix},$$

$$\bar{B}_t^0 = \begin{pmatrix} \bar{r}_t^0 & 0 \\ 0 & \bar{q}_t^0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_t^i = \begin{pmatrix} \bar{r}_t^i & 0 \\ 0 & \bar{q}_t^i \end{pmatrix},$$

$$\bar{r}_t^0 = r_t^0 - r_t^1 \frac{E[r_t^1 r_t^0]}{E[(r_t^1)^2]}, \quad \bar{r}_t^i = r_t^0 \bar{r}_{t+1}^{i-1} - r_t^1 \bar{r}_{t+1}^{i-1} \frac{E[r_t^1 r_t^0]}{E[(r_t^1)^2]},$$

$$\bar{q}_t^0 = q_t - r_t^1 \frac{E[r_t^1 q_t]}{E[(r_t^1)^2]} \frac{E[\sum_{s=t+2}^T \bar{r}_{t+1}^{s-t-2} \bar{q}_{t+1}^{s-t-2}\, \omega_s + \omega_{t+1}]}{E[\sum_{s=t+2}^T (\bar{r}_{t+1}^{s-t-2})^2 \omega_s + \omega_{t+1}]},$$

$$\bar{q}_t^i = q_t \bar{q}_{t+1}^{i-1} - r_t^1 \bar{r}_{t+1}^{i-1} \frac{E[r_t^1 q_t]}{E[(r_t^1)^2]} \frac{E[\sum_{s=t+2}^T \bar{r}_{t+1}^{s-t-2} \bar{q}_{t+1}^{s-t-2} \omega_s + \omega_{t+1}]}{E[\sum_{s=t+2}^T (\bar{r}_{t+1}^{s-t-2})^2\, \omega_s + \omega_{t+1}]}$$

$$B_t = \begin{pmatrix} r_t^0 & 0 \\ 0 & q_t \end{pmatrix}, \qquad z_t = \begin{pmatrix} x_t \\ l_t \end{pmatrix}.$$

Acontece porém que a solução u^* fornecida por (3) é independente do vetor de parâmetros auxiliares, o que torna necessário determinar o particular λ^* para o qual uma solução ótima de $A(\lambda^*, \omega, \omega_T)$ é também solução ótima do problema $L(\omega, \omega_T, \alpha)$ – e daqui se chegar, finalmente, à solução ótima de $GMV(\omega_T, \alpha)$.

Li e Li (2012) mostram que, sob certas condições, dada u^*, λ^* é a solução do sistema linear

$$(\Lambda-\Psi^{-1})\begin{pmatrix}\lambda_1^*\\ \lambda_2^*\\ \vdots\\ \lambda_T^*\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}E\left[e'^{\bar{B}_0^0 z_0}\right]\\ \vdots\\ E\left[e'^{\bar{B}_0^{T-1} z_0}\right]\end{pmatrix}-\Psi^{-1}\begin{pmatrix}-2\omega_1\alpha_1 b_1\\ \vdots\\ -2\omega_{T-1}\alpha_{T-1}b_{T-1}\\ 1\end{pmatrix},$$

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\frac{\delta}{\delta\lambda_1}E[s_1] & \cdots & \frac{\delta}{\delta\lambda_T}E[s_1]\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\delta}{\delta\lambda_T}E[s_T] & \cdots & \frac{\delta}{\delta\lambda_T}E[s_T]\end{pmatrix}, \Psi=\mathrm{diag}(2\omega_1(1+\alpha_1),\cdots,2\omega_{T-1}(1+\alpha_{T-1}),2\omega_T), e_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

Obtido λ^*, substitui-se em (3) para se determinar a estratégia ótima em $L(\omega,\omega_T,\alpha)$. Posto isto, falta apenas encontrar o vetor ω^* de forma a que a solução ótima de $GMV(\omega_T,\alpha)$ possa ser obtida a partir da solução ótima do problema Lagrangeano. Com esse propósito, os autores recorrem ao método primal-dual. Considerando agora o problema $LD(\omega_T,\alpha)$:

$$\min_{\omega\geq 0} H(\omega)=\max_u E[s_T]-\omega_T Var(s_T)-\sum_{t=1}^{T-1}\omega_t[Var(s_t)-\alpha_t(E[s_t]-b_t)^2]$$

e o resultado (Teorema 6.1): Se $\bar{\omega}$ é solução ótima de $LD(\omega_T,\alpha)$ e $\bar{u}(\bar{\omega})$ é solução ótima de $L(\bar{\omega},\omega_T,\alpha)$, então $\bar{u}(\bar{\omega})$ é solução ótima de $GMV(\omega_T,\alpha)$, assim dão resposta à questão. Para isso, usam ainda as funções

$$g_t(\bar{\omega};\bar{u})=\begin{cases}[Var(s_t)-\alpha_t(E[s_t]-b_t)^2]|_{\bar{u}(\bar{\omega})}, & \bar{\omega}_t>0,\\ \max\{0,[Var(s_t)-\alpha_t(E[s_t]-b_t)^2]|_{\bar{u}(\bar{\omega})}\}, & \bar{\omega}_t=0\end{cases}, t=1,\dots,T-1,$$

onde o vetor $\omega=\bar{\omega}$ é dado e se admite que $\bar{u}=\bar{\omega}$ é estratégia ótima para $L(\bar{\omega},\omega_T,\alpha)$. O algoritmo seguinte agrega todo este elaborado processo.

Passo 0. Seja $k=0$. Escolher um ponto inicial $\omega^k\geq 0$ e um valor $\varepsilon>0$, arbitrariamente pequeno;

Passo 1. Resolver o problema $L(\omega,\omega_T,\alpha)$, via $A(\lambda,\omega,\omega_T)$. Seja $u^k(\omega^k)$ a estratégia ótima obtida. Se $|g_t(\omega^k;u^k)|\leq\varepsilon, t=1,\dots,T-1$, parar e considerar que ω^k é solução ótima de $LD(\omega_T,\alpha)$ e $u^k(\omega^k)$ é solução ótima de $L(\omega^k,\omega_T,\alpha)$ e de $GMV(\omega_T,\alpha)$. Caso contrário, ir para o Passo 2;

Passo 2. Resolver o problema

$$\begin{cases}\min_{\delta\geq 0} H(\omega^k+\delta g(\omega^k;u^k))\\ sujeito\ a\ \omega^k+\delta g(\omega^k;u^k)\geq 0\end{cases}, \quad g(\omega^k;u^k)=(g_1(\omega^k;u^k),\dots,g_{T-1}(\omega^k;u^k)).$$

Seja δ^k a solução. Fazer $\omega^{k+1}=\omega^k+\delta^k g(\omega^k;u^k)$, fazer $k=k+1$ e voltar ao Passo 1.

Li e Li (2012) apresentam um exemplo numérico onde fica claro que o controlo da insolvência tem um impacto importante sobre a estratégia ótima de investimentos. O recurso à desigualdade de Chebychev como *proxy* do mecanismo desse controlo obriga o decisor a optar por estratégias muito mais conservadoras do que as que adotaria se aquele não existisse. Concluem com a sugestão de que seria interessante passar de uma ALM em tempo discreto para uma abordagem em tempo contínuo.

3.1.3 Otimização da carteira de ativos de planos de pensões CD com inflação em todo o horizonte temporal – Han e Hung (2012)

Estes autores tratam especificamente os planos CD, onde não existem responsabilidades como as dos planos BD, mesmo quando há a garantia de um benefício mínimo. No entanto, uma vez que os benefícios dependem do desempenho do portfólio do fundo, que se traduz no saldo da conta do participante no momento T da reforma, todos os esforços devem ser desenvolvidos para que este desempenho seja ótimo.

Assim sendo, Han e Hung (2012) centram-se na gestão dos ativos. Admitem que existe um benefício mínimo e que está previsto um mecanismo de proteção contra o risco da inflação ao longo do tempo, uma questão que em situações de muito longo prazo, como as dos fundos de pensões, é determinante. Mais ainda, a inflação é considerada não só durante a fase de acumulação do fundo, mas também durante o período da reforma. Assumem ainda que os participantes contribuem durante a vida ativa (a fase de acumulação) e que as contribuições são investidas em obrigações de cupão zero, todas com sucessivas maturidades τ_1, ações, obrigações indexadas à inflação e ainda no mercado monetário, em proporções que dependem do perfil de risco. As *inflation protected bonds* (cf. Broverman (2010)) destinam-se a possibilitar que o investidor faça o *hedging* do risco de inflação a longo prazo.

O problema de otimização que se coloca é a determinação do portfólio, ao longo do tempo, de modo a maximizar a utilidade esperada do saldo real final na conta, para além do mínimo garantido. No modelo proposto, muito geral, praticamente todas as variáveis são associadas a processos estocásticos. No essencial (a exposição dos detalhes remete-se para o artigo), tem-se

$$\max_{\{X_{t,0\leq t\leq T}\}} \mathbb{E}\left[\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{W_T-G_T}{P_T}\right)^{1-\gamma}\right]$$

sujeito a

$$dW_t = W_t(X_t^T\Gamma\Lambda + R_t)dt + C_t dt + W_t X^T \Gamma \mathrm{d}Z_t,$$

$$X_t = \begin{pmatrix} X_{Bt} \\ X_{St} \\ X_{It} \end{pmatrix};\ \Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_B(\tau_1) & 0 & 0 \\ \sigma_{S1}\sqrt{R_t} & \sigma_{S2} & 0 \\ \sigma_{I1}(\tau_2) & \sigma_{I2} & \sigma_{I3} \end{pmatrix};\ \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_R\sqrt{R_t} \\ \lambda_S \\ \lambda_P \end{pmatrix} \text{ e } dZ_t = \begin{pmatrix} dZ_{1t} \\ dZ_{2t} \\ dZ_{3t} \end{pmatrix},$$

onde:

X_t é o vetor com a composição do portfólio no momento t, indicando X_{Bt} o peso das obrigações de cupão zero, X_{St} o peso das ações e X_{It} o peso das obrigações indexadas à inflação; o restante é investido no mercado monetário. São as variáveis de decisão.

As preferências do participante são representadas pela função de utilidade CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*), da forma $u(x) = -\frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, onde γ é o coeficiente de aversão relativa constante ao risco.

W_t é o saldo na conta do participante no momento t, $0 \leq t \leq T$.

G_T é o valor da garantia mínima.

P_T é o preço de um cabaz de bens e serviços a que o benefício final (real) deve dar acesso.

Γ é a matriz de cargas resultantes das dinâmicas dos retornos dos três tipos de investimento com risco.

Λ é o vetor com as remunerações que o mercado requer pelos riscos inerentes às aplicações.

R_t é a força de juro sem risco, que remunera a aplicação no mercado monetário.

C_t é a taxa instantânea das contribuições no momento.

Z_t é um vetor cujas componentes são movimentos Brownianos standard, ligados às dinâmicas dos processos introduzidos.

Uma vez que se trata de um modelo complexo de PDE em tempo contínuo, Han e Hung (2012) introduzem um 'processo do excedente', $Y_t = W_t - G_t$, e passam a um problema auxiliar de mais fácil resolução, aplicando os métodos próprios da PDE. Vem

$$\max_{\hat{X}} \mathbb{E}\left[\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{Y_T}{P_T}\right)^{1-\gamma}\right]$$

sujeito a

$$dY_t = W_t\left(\hat{X}_t^T \Gamma\Lambda + R_t\right)dt + Y_t \hat{X}_t^T \Gamma \mathrm{d}Z_t,$$

onde $\hat{X}_t = \frac{W_t X_t + F_t\left(\Gamma^T\right)^{-1}\sigma_F(t) - G_t\left(\Gamma^T\right)^{-1}\sigma_G(t)}{Y_t}$ e F_t é o processo do valor atual de todas as contribuições futuras, a partir do momento t, com retornos cuja dinâmica depende de σ_F.

Depois de cálculos muito pouco triviais, obtém-se a solução deste segundo problema, $\hat{X}_t^*$ (ver equações (58) e (59) do artigo), de onde se passa à solução do problema em estudo, apresentada aqui na sua forma condensada, de fácil interpretação:

$$X_t^* = \frac{Y_t}{W_t}\begin{pmatrix}\hat{x}_{Bt}^*\\ \hat{x}_{St}^*\\ \hat{x}_{It}^*\end{pmatrix} - \frac{F_t}{W_t}\begin{pmatrix}x_{Bt}^F\\ x_{St}^F\\ x_{It}^F\end{pmatrix} + \frac{G_t}{W_t}\begin{pmatrix}x_{Bt}^G\\ x_{St}^G\\ x_{It}^G\end{pmatrix}$$

Verifica-se que o portfólio ótimo em cada momento acaba por ser a soma ponderada de três portfólios: o portfólio solução do problema auxiliar, o portfólio que faz a replicação do valor atual das contribuições ao longo do tempo (ver equações (40) - (42)) e o portfólio que faz a replicação do valor atual da garantia final (ver equações (47) - (49)).
Os autores terminam com uma ilustração numérica e concluem que, quando o tempo se aproxima da data de reforma, o participante tende a privilegiar os ativos com menos risco, ao contrário do que sucede no início da fase de acumulação, em que investe fortemente nesses ativos: as proporções investidas em ações e obrigações de cupão zero são inicialmente altas e diminuem com o passar do tempo e as investidas em obrigações indexadas e no ativo sem risco apresentam a evolução oposta. Também, quando a aversão ao risco é alta, o investimento especulativo diminui, fazendo decrescer a procura por ações. A aplicação numérica ilustra assim que a dinâmica do portfólio ótimo fornecida pelo modelo é consistente com o conhecimento convencional, o que é sempre importante.

3.1.4 Gestão ótima de um plano de pensões CD com taxa de juro e volatilidade estocásticas – Guan e Liang (2014)

Neste trabalho, de algum modo semelhante ao anterior, procura-se uma estratégia de investimento ótima (combinando liquidez, obrigações e ações), no quadro da gestão de um plano de pensões CD, como fazem Han e Hung (2012). A maior complexidade, relativamente a outros trabalhos, resulta da consideração de uma taxa de juro estocástica e de que não só as contribuições dos participantes são incertas como ainda os retornos das ações têm volatilidade estocástica, o que introduz níveis de risco mais difíceis de controlar e torna a resolução do problema mais desafiante. Como o valor final do fundo deve exceder o montante necessário para pagar pensões vitalícias garantidas aos participantes, a partir do momento em que estes se reformam, é igualmente necessário modelar a mortalidade. O objetivo é maximizar a utilidade esperada do valor excedente do fundo (depois de paga a garantia), para o que é mais uma vez escolhida a função de utilidade CRRA (ver 3.1.3). Guan e Liang (2014) recorrem à programação estocástica para resolver o problema.

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ um espaço de probabilidade filtrado, onde $\mathcal{F}_t$ representa a informação disponível no mercado, antes do momento t. O fundo de pensões surge no momento 0 e a data de reforma é T. É assumido que todos os processos introduzidos a seguir serão todos bem definidos e adaptados à filtração $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

O mercado financeiro oferece aplicações em liquidez, obrigações e ações. Adotando opções de modelização de outros autores, que citam, e a muitos conceitos e modelos próprios da abordagem estocástica à matemática financeira (ver Bjork T (2009), Guan e Liang (2014)) estabelecem que: (i) a dinâmica da taxa de juro instantânea é dada pela equação diferencial estocástica $dr(t) = \big(a - br(t)\big)dt - \sqrt{k_1 r(t) + k_2}\,dW_r(t)$, $r(0) = r_0$, onde a, b, k_1 , e k_2 são constantes positivas e $W_r(t)$ é um movimento browniano standard no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P})$; (ii) o ativo sem risco satisfaz a equação $\frac{dS_0(t)}{S_0(t)} = r(t)dt,\ S(0) = S_0$; (iii) o preço das obrigações satisfaz a equação

$\frac{dB_k(t)}{B_k(t)} = r(t)dt + h(K)\sqrt{k_1 r(t) + k_2}\left(\lambda_r\sqrt{k_1 r(t) + k_2}\,dt + dW_r(t)\right)$, sendo

$h(t) = \frac{2(e^{mt}-1)}{m-(b-k_1\lambda_r)+e^{mt}(m+b-\lambda_r k_1)}, m = \sqrt{(b - k_1\lambda_r)^2 + 2k_1}$ e $\lambda_r\sqrt{k_1 r(t) + k_2}$ o preço de mercado do risco associado a $W_r(t)$.

Quanto às ações, tem-se

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{S(t)} = r(t)dt + \sigma_S\sqrt{k_1 r(t) + k_2}\left(\lambda_r\sqrt{k_1 r(t) + k_2}\,dt + dW_r(t)\right) + \upsilon L(t)dt + \sqrt{L(t)}\,dW_S(t) \\ dL(t) = \alpha\big(\delta - L(t)\big)dt + \sigma_L\sqrt{L(t)}\,dW_L(t) \end{cases},$$

onde σ_Sé a volatilidade estocástica, $\upsilon, \alpha, \delta, \sigma_L$ são constantes positivas e $W_S(t)$ e $W_L(t)$ são movimentos brownianos, independentes de $W_r(t)$, com $Cov\big(W_S(t), W_L(t)\big) = \rho_{SL}t$. $\upsilon\sqrt{L(t)}$ é o preço de mercado do risco associado ao processo $W_S(t)$ e o preço de mercado do risco associado a $W_L(t)$ pode ser arbitrado.

Para o processo de pagamento das contribuições assume-se a dinâmica

$\frac{dC(t)}{C(t)} = \mu dt + \sigma_{C_1}\sqrt{k_1 r(t) + k_2}\left(\lambda_r\sqrt{k_1 r(t) + k_2}\,dt + dW_r(t)\right) + \sigma_{C_2}\left(\upsilon L(t)dt + \sqrt{L(t)}\,dW_S(t)\right)$,

que é convenientemente similar à dinâmica do retorno das ações.

O benefício garantido é expresso pela função $G(T) = \int_T^{\omega} g(s)B(T,s)\,{}_{s-T}p_T\,ds$, onde $g(s) = g(T)e^{g(s-T)}$ introduz a inflação, ω é a idade máxima de sobrevivência e ${}_{s-T}p_T = e^{-\int_T^s \lambda(u)du} = e^{-\int_T^s \frac{\omega}{\omega-u}du} = \frac{\omega-s}{\omega-T}$ é a probabilidade de o contribuinte sobreviver até s, dado que está vivo em T, usando $\lambda(t) = \frac{\omega}{\omega-t}$ do modelo clássico de De Moivre.

Postos todos os fatores, pode então estabelecer-se que o valor do fundo ao longo do tempo tem dinâmica

$$\begin{cases} dX(t) = u_0(t)X(t)\dfrac{dS_0(t)}{S_0(t)} + u_B(t)X(t)\dfrac{dB_K(t)}{B_K(t)} + u_s(t)X(t)\dfrac{dS(t)}{S(t)} + C(t)dt, \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

$u_0(t), u_B(t)$ e $u_s(t)$ representando os pesos das aplicações em liquidez, obrigações e ações, respetivamente.

Se se recordar que o objetivo é maximizar a utilidade esperada do valor excedente terminal do fundo depois de paga a garantia, usando a função de utilidade CRRA, vem

$$\begin{cases} \max_{u(t)\in\Pi} E\{U\big(X(T) - G(T)\big)\} \\ sujeito\ a\ X(T) \geq G(T) \end{cases};$$

$u(t) = \big(u_B(t), u_s(t)\big)$ é a variável de decisão, a estratégia ótima de investimentos, a determinar, e Π é o conjunto das estratégias admissíveis, face às especificidades dos processos em presença. Os autores recorrem aos resultados das finanças estocásticas para transformar o problema num problema equivalente de investimento único, resolúvel pelo método de programação dinâmica. Depois de um laborioso processo chegam à conclusão de que a estratégia ótima de investimentos deve satisfazer as seguintes dinâmicas:

$$\begin{cases} u_0^*(t) = 1 - u_B^*(t) - u_S^*(t), \\ u_B^*(t) = \dfrac{Y^*(t)}{X^*(t)}u_B^{Y^*}(t) - \dfrac{F(t,T)}{X^*(t)}u_B^F(t) + \dfrac{G(t)}{X^*(t)}u_B^G(t), \\ u_S^*(t) = \dfrac{Y^*(t)}{X^*(t)}u_S^{Y^*}(t) - \dfrac{F(t,T)}{X^*(t)}u_S^F(t). \end{cases}$$

Guan e Liang (2014) finalizam com uma simulação de Monte Carlo, visando ilustrar a sensibilidade do modelo aos valores dos parâmetros. Concluem que a abordagem aparenta ser robusta, pois em geral nos diferentes cenários, mesmo os mais extremos, fornece soluções que são consensuais com a prática estabelecida.

3.1.5 O Modelo InnoALM de ALM para fundos de pensões austríacos - Geyer e Ziemba (2008)

Geyer e Ziemba (2008) optam por uma aplicação real e dão a conhecer o modelo de programação linear estocástica InnoALM, usado desde 2000 na gestão do fundo de pensões Siemens Áustria (o maior fundo privado do país) e posteriormente estendido a outros fundos. O plano Siemens é um plano CD com contribuições fixas.

A aplicação dispõe de um interface que possibilita uma interação fácil com o utilizador e está preparado para avaliar os efeitos das alterações em todos os *inputs*. Também fornece *outputs* detalhados com bastante rapidez, agilizando assim o processo de tomada de decisão com efeitos muito positivos no desempenho do fundo.

Na opinião dos autores, a maior utilidade do InnoALM resulta da facilidade com que acomoda restrições e objetivos numa multiplicidade de cenários, o que permite identificar trajetórias para os ativos e passivos do fundo e uma avaliação do risco em cada cenário. O modelo prevê correlações variáveis entre os retornos dos ativos, de forma a poder reagir a acontecimentos extremos de forma atempada. A inclusão à partida de correlações dependentes do estado levam a portfólios que se adaptam melhor a cenários extremos e têm bom desempenho também em cenários mais prováveis.

Concretamente, trata-se de um modelo linear estocástico multiperíodo (os momentos de decisão vão de $t = 0$ até $t = T - 1$) para determinar as compras e vendas ótimas de cada ativo $i = 1, \ldots, N$ (ações emitidas nos EUA, Pacífico, Europa e países emergentes e obrigações emitidas nos EUA, RU, Japão, Europa…). Socorre-se de uma função de utilidade para introduzir a aversão ao risco e tem como objetivo maximizar a riqueza esperada final, líquida dos custos. Para cada ativo *i* e cada momento *t*, as variáveis de decisão (não negativas) são: valor aplicado $\widetilde{W}_{it}$, compras $\tilde{P}_{it}$ e vendas $\tilde{S}_{it}$. O valor investido no ativo *i* ao longo do tempo é dado pela dinâmica:

$$W_{i0} = W_i^{init} + P_{i0} - S_{i0}$$

$$\widetilde{W}_{i1} = \tilde{R}_{i1} W_{i,0} + \tilde{P}_{i1} - \tilde{S}_{i1}$$

$$\widetilde{W}_{it} = \tilde{R}_{it} \widetilde{W}_{i,t-1} + \tilde{P}_{it} - \tilde{S}_{it}, \quad t = 2, \ldots, T-1$$

$$\widetilde{W}_{iT} = \tilde{R}_{iT} \widetilde{W}_{i,T-1},$$

onde $\tilde{R}_{it}$ é a taxa de retorno (aleatório) da aplicação em *i* no intervalo de tempo *t*.

A restrição orçamental é

$$\sum_{i=1}^{N} \tilde{P}_{it}(1 + tcp_i) = \sum_{i=1}^{N} \tilde{S}_{it}(1 - tcs_i) + C_t\,, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1,$$

onde tcp_i e tcs_i são os custos de transação para cada compra e venda do ativo i e C_t é o *cash flow* líquido sendo introduzido no modelo com um valor fixo não aleatório[3].

---

[3] Se $t = 0$, o ~ é suprimido, pois no momento inicial as compras e vendas não dependem do cenário.

As restrições de portfólio indicam as combinações admissíveis, de acordo com as imposições existentes, relativamente a algumas classes de ativos:

$$\sum_{i \in U} \widetilde{W}_{it} - \theta_U \sum_{i=1}^{N} \widetilde{W}_{it} \leq 0 \quad e \quad -\sum_{i \in L} \widetilde{W}_{it} + \theta_L \sum_{i=1}^{N} \widetilde{W}_{it} \leq 0, \quad t = 1, \dots, T-1,$$

sendo θ_U o peso máximo admissível da classe de ativos U e θ_L o peso mínimo admissível da classe de ativos L.

O modelo comporta ainda restrições que impõem montantes $\overline{W}_t$ para o valor do fundo no fim de cada período:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\widetilde{W}_{it} - \tilde{P}_{it} + \tilde{S}_{it} \right) + \widetilde{M}_t^W \geq \overline{W}_t, \quad t = 1, \dots, T;$$

$\widetilde{M}_t^W$ é o desvio relativamente ao valor fixado.

O modelo permite também a definição de objetivos estocásticos, que dependem do cenário e se representam por $\tilde{B}_t$, dando origem às restrições

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\widetilde{W}_{it} - \tilde{P}_{it} + \tilde{S}_{it} \right) + \widetilde{M}_t^B \geq \tilde{B}_t, \quad t = 1, \dots, T;$$

$\widetilde{M}_t^B$ é o desvio relativamente ao estabelecido.

Finalmente, a função objetivo determina a maximização do valor esperado atual da riqueza final, líquida dos custos esperados, também atualizados. Usa-se uma medida de risco convexa $c_k(.)$, que será linearizada por troços. Vem

$$Max\ E\left[d_T \sum_{i=1}^{N} \widetilde{W}_{iT} - \lambda \sum_{t=1}^{T} d_t w_t \left(\sum_{k \in \{W,B\}} v_k c_k\left(\widetilde{M}_t^k\right) \right) \right].$$

d_t são os fatores de atualização, v_k são pesos convenientes afetos à riqueza e w_t são pesos convenientes afetos aos desvios, relativamente aos limites fixados . O parâmetro λ é o peso designado para medir o risco em termos de variância. A função objetivo apenas penaliza os desvios atrás referidos, o que é traduzido pelo conjunto $\{W, B\}$. W é o conjunto de restrições introduzidas no que diz respeito à carteira de aplicações e B é o conjunto de restrições referentes a *Benchmark*.

Os autores explicam que os cenários em InnoALM são definidos em termos da distribuição dos retornos de ativos. Para cada ativo, o usuário pode escolher entre a normal, t-student, ou uma distribuição empírica. Devido à dificuldade associada com a escolha apropriada da distribuição paramétrica, pode também usar-se uma aproximação não paramétrica para gerar amostras aleatórias refletindo a forma da distribuição do retorno histórico. InnoALM usa três matrizes de correlação diferentes e correspondentes conjuntos de desvios padrão.

Geyer e Ziemba (2008) implementam uma aplicação com quatro ativos (ações e obrigações da Europa e dos EUA) e cinco períodos (seis estados). Os períodos 1 e 2 são anuais, os períodos 3 e 4 cobrem dois anos cada e o período 5 corresponde a quatro anos (dez anos no total). Procurando sempre refletir práticas de investimento real, criam múltiplos cenários, distribuições não normais e diferentes volatilidades e regimes de correlação. Concluem que o modelo providência de uma forma sistemática para estimar antecipadamente os resultados prováveis de uma alteração de política e dos retornos de ativos. Alertam ainda que a acuidade nos *inputs* dos cenários e, especialmente, nos pressupostos dos retornos é crucial para o bom desempenho de todo este pesado modelo. Se assim for, a sua utilização certamente proverá os decisores com a capacidade de ajustar a estratégia de investimentos no sentido pretendido (e sempre presente em planos CD com contribuições fixas) da maximização dos benefícios proporcionados pelo fundo.

3.2 Outros Modelos

3.2.1 Introdução

Apesar de parecer tão natural o uso da PD no âmbito da gestão otimizada dos fundos de pensões, a vasta literatura sobre o tema também é abundante em outras abordagens, nomeadamente a programação estocástica não dinâmica, modelos de média-variância, a programação por metas e a simulação. De um modo geral, a distinção maior é que a programação não dinâmica procura dividir o problema principal em subproblemas independentes entre si, sem o uso de uma equação recursiva de *backward* ou *forward*. Em cada passo consideram-se as soluções ótimas e admissíveis.

3.2.2 Otimização de portfólios com programação por metas - Aouni, Colapinto e La Torre (2014)

Aouni, Colapinto e La Torre (2014) apresentam o estado da arte no que se refere ao uso da programação por metas (PM, que os autores declaram ser o modelo mais popular no campo da programação multiobjetivo), na gestão otimizada de portfólios. Exploram 92 contribuições surgidas desde os anos 70 e indicam um vasto conjunto de situações concretas onde a abordagem se aplica, nomeadamente, a gestão de fundos de pensões.

O trabalho começa por revisitar o incontornável modelo da média-variância (Markowitz (1952)), enquadrando-o num modelo com dois objetivos conflituantes, a maximização do retorno do investimento e a minimização do risco relacionado com as perdas financeiras. O portfólio ótimo deve atender a ambos, fazendo um *trade-off* de modo a alcançar um equilíbrio global entre risco e retorno. Mas porque este modelo bicritério não reflete a complexidade e multidimensionalidade do processo de decisão na seleção de portfólios financeiros, muitos outros contributos seguiram-se ao longo dos anos. Neste esforço, a PM tem sido amplamente usada, pois agrega múltiplos objetivos e permite determinar portfólios que minimizam os desvios entre o que se consegue obter e o que se tem como meta a alcançar, sendo um processo progressivo e evolutivo, fácil de entender e aplicar.

Sem resolver propriamente qualquer problema prático, Aouni, Colapinto e La Torre (2014) resumem de uma forma muito útil as diferentes formalizações que é possível considerar, quando se quer determinar um portfólio ótimo (e recorde-se que no portfólio, quando conveniente, se podem incluir tanto os instrumentos ativos como os passivos, à semelhança do que fazem Li e Li (2012)). Aproveitando o seu esforço, apresentam-se aqui as variantes mais significativas no contexto deste trabalho.

1. PM Lexicográfica (Hierarquizada)

Baseia-se na otimização dos objetivos, de acordo com a sua importância relativa para o decisor. O objetivo mais importante tem prioridade máxima e o menos importante tem prioridade mínima. Deste modo, os desvios obtidos a níveis de prioridade mais elevados vão sendo introduzidos como restrições nos modelos seguintes, para minimização dos desvios relativos a objetivos com prioridades mais baixas – que têm assim importância cada vez mais marginal para o processo de decisão. O modelo é

$$Lex\ Min\ L = \left[l_1(\delta^-, \delta^+), l_2(\delta^-, \delta^+), \dots, l_q(\delta^-, \delta^+)\right]$$

sujeito a:

$$f_i(x) + \delta_i^- - \delta_i^+ = g_i, \quad i = 1,2, \dots, p$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$x \in F,\ \ \delta_i^-, \delta_i^+ \geq 0, \qquad i = 1,2, \dots, p.$$

L é um vetor ordenado dos desvios δ^- e δ^+ não desejados, q indica os diferentes níveis de prioridade, $f_1, f_2, \dots, f_p$ são os objetivos conflituantes, x_j é a proporção a investir no ativo $j, j = 1,2, \dots, n$, $g_1, g_2, \dots, g_p$ são as metas estabelecidas para os p objetivos e F é o conjunto das soluções admissíveis.

2. PM com ponderadores

Neste modelo, o decisor não hierarquiza os objetivos, mas atribui ponderadores w_i^+ e w_i^- aos diferentes desvios, pesando assim a importância que lhes atribui para a determinação da solução. O modelo é

$$Min. Z = \sum_{i=1}^{p} (w_i^+ \delta_i^+ + w_i^- \delta_i^-)$$

sujeito a:

$$f_i(x) + \delta_i^- - \delta_i^+ = g_i, \qquad i = 1,2, \dots, p$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

$$x \in F, \ \ \delta_i^-, \delta_i^+ \geq 0, \quad i = 1,2, \dots, p.$$

3. PM polinomial

Os retornos dos ativos não têm reconhecidamente distribuição normal e apresentam muitas vezes assimetria acentuada, aspeto que não pode ser ignorado pelo decisor. Para introduzir a assimetria recorre-se então à PM polinomial, obtendo-se o seguinte modelo, com dois objetivos para a determinação do portfólio ótimo.

$$Min\ Z = [(d_1)^{p1} + (d_3)^{p3}]$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j E_j + d_1 = E^*$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(r_j - E_j\right)^3 + d_3 = S^*$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j x_k \sigma_{jk} = 1$$

$$\sum_{j} x_j = 1$$

$$x \in F, d_1\ e\ d_3 \geq 0.$$

p_1 e p_3 são os parâmetros de preferência, o primeiro relativamente ao valor esperado do retorno e o segundo relativamente à assimetria, E^*é a meta estabelecida para o valor esperado do retorno e S^* a meta definida para a assimetria, σ_{jk} é a covariância entre os retornos dos ativos j e k. A preferência por assimetrias positivas está relacionada com o facto de esta ser observada nos melhores mercados, e assim também nos melhores portfólios. A terceira restrição mantém o risco controlado.

4. PM Estocástica

Consiste basicamente em assumir que as metas estabelecidas são bem representadas por variáveis aleatórias, com uma dada distribuição, em vez de se estar a fixar exatamente uma certa quantidade. É uma forma de incluir a incerteza inerente ao processo de tomada de decisão. Se se admitir que a distribuição em causa é a normal, o modelo geral é da forma seguinte, podendo depois ser adaptado a cada caso particular:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{p} \left(\tilde{\delta}_i^+ + \tilde{\delta}_i^-\right)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \tilde{\delta}_i^- - \tilde{\delta}_i^+ = \tilde{g}_i, \quad i = 1,2,\dots,p$$

$$\sum_j x_j = 1$$

$$x \in F$$

$$\tilde{\delta}_i^+, \tilde{\delta}_i^- \geq 0, \quad i = 1,2,\dots,p.$$

$$\tilde{g}_i \sim N(\mu_i; \sigma_i^2).$$

5. PM Difusa

Abordagem desenvolvida para as situações em que o decisor não consegue mais do que fixar “aspirações vagas e imprecisas”.

$$Max\ Z = \lambda$$

sujeito a:

$$\frac{f_i(x)}{\Delta_i} + \delta_i^- - \delta_i^+ = \frac{g_i}{\Delta_i}, \quad i = 1,\dots,p$$

$$\lambda + \delta_i^- + \delta_i^+ \leq 1, \quad i = 1,\dots,p$$

$$\sum_j x_j = 1$$

$$x \in F$$

$$\lambda, \delta_i^- \text{ e } \delta_i^+ \geq 0, \quad i = 1,\dots,p.$$

Δ_i é a chamada constante de desvio do nível de aspiração g_i, estabelecida pelo decisor, fazendo uso de toda a sua experiência, intuição e discernimento.

Os autores concluem salientando que a PM, como se pode ver pelos trabalhos que a descrevem, tem como grandes vantagens a flexibilidade para incorporar as preferências do decisor nos mais diversos casos e a tolerável exigência computacional requerida na maior parte das situações. Apoiando-se na formulação que faz do problema, aquele deve escolher os *trade-offs* que lhe proporcionam o melhor portfólio, sendo todo o processo extremamente desafiante e exigindo um elevado grau de *expertise*.

3.2.3 Programação estocástica para a ALM de fundos de pensões na Finlândia – Hilli, Koivu, Pennanen e Ranne (2007)

Para Hilli *et al.* (2007) a programação estocástica é uma abordagem muito eficiente na determinação de estratégias otimizadas, no que se refere à gestão de ativos e passivos, pois permite tratar a complexidade inerente à dinâmica e às restrições existentes neste tipo de problemas. Referem muitos trabalhos anteriores e a originalidade do seu contributo resulta de ser um *case study* de uma sociedade gestora sedeada na Finlândia, com grandes fundos e um enorme número de participantes a atingir a idade de reforma até 2020. Propõem-se resolver um problema dinâmico de seleção dos investimentos (liquidez, obrigações, ações, imobiliário e concessão de empréstimos aos participantes), de modo a cobrir as responsabilidades nos momentos em que estas ocorrem. Incluem a questão do pagamento de bónus ótimos e também restrições sobre a composição dos portfólios e os tipos de transações, algumas das quais provêm do "intricado sistema de pensões na Finlândia". Particular atenção é dada aos fatores incertos, nomeadamente, aos retornos dos investimentos e às provisões técnicas, pois é óbvio que a solução de um problema com programação estocástica depende muito de como são modelados os fatores estocásticos.

Na formalização do problema, os momentos de decisão têm índice $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ e os ativos têm índice $j \in J = \{caixa, obrigações, ações, imobiliário, empréstimos\}$.

As variáveis de decisão são p_{tj}, o montante a investir em t na compra do ativo j, s_{tj}, o montante a realizar em t com a venda do ativo j, h_{tj}, o valor em carteira do ativo j no período $[t, t+1]$ e H_t, o montante aprovisionado para bónus no período $[t, t+1]$.

As restrições de inventário descrevem a dinâmica da composição da carteira: $h_{0j} = h_j^0 + p_{0j} - s_{0j}$, onde h_j^0 é o valor em carteira do ativo j em $t = 0$ e $h_{1 \leq t \leq T-1, j} = R_{tj} h_{t-1,j} + p_{tj} - s_{tj}$, onde $R_{t,j}$ é a valorização do investimento no ativo j no período $[t-1, t]$ (no momento final T não é forçoso reequilibrar o portfólio).

As restrições orçamentais garantem que no período t, de amplitude τ_t, a despesa não ultrapassa a receita: $\sum_{j \in J}(1 + c_j^p)\, p_{0j} + H_{-1} \leq \sum_{j \in J}\big(1 + c_j^s\big)s_{0j} + F_0$, onde c_j^p e c_j^s são os custos com a compra e venda do ativo j, H_{-1} é a provisão para bónus no ano anterior a $t = 0$ e F_0 é o *cash flow* nesse mesmo ano; $\sum_j(1 + c_j^p)\, p_{1 \leq t \leq T-1,j} + \tau_t H_{t-1} \leq \sum_j\big(1 + c_j^s\big)s_{tj} + \sum_{j \in J} D_{tj}h_{t-1j} + F_t$, onde D_{tj} são os dividendos pagos pelo ativo j no período $[t-1, t]$ e F_t é a liquidez em $[t-1, t]$.

As restrições de portfólio delimitam os pesos dos ativos na carteira, obedecendo às imposições legais: $l_j w_t \leq h_{tj} \leq u_j w_t$, onde $w_t = \sum_{j \in J} h_{tj}$ é o valor da carteira em t, l_j são os limites inferiores e u_j são os limites superiores do peso do ativo j na carteira. Uma vez que no fim do horizonte não se reequilibra o portfólio, tem-se $w_T = \sum_{j \in J}(R_{Tj} + D_{Tj})h_{T-1,j} + F_T - \tau_T H_{T-1}$.

As restrições de transação obrigam as compras e vendas, por período de cada ativo a respeitar certas proporções, estabelecidas estrategicamente: $p_{0 \leq t \leq T-1,j} \leq \tau_t b_j^p w_t$; $s_{0 \leq t \leq T-1,j} \leq \tau_t b_j^s w_t$, onde b_j^p são os limites superiores para as compras definidos para um ano e b_j^s são os limites superiores para as vendas definidos para um ano e τ_t é o tamanho do período considerado.

O governo finlandês impõe uma restrição de solvência que força os ativos da companhia a cobrir as provisões técnicas L_t, que correspondem ao valor atual das pensões futuras, descontadas com a taxa técnica de juro definida. Os fundos, além do total de investimento ω_t, comportam um montante residual líquido, com outros débitos e créditos. Esse montante é calculado como sendo uma proporção fixa c^G das provisões técnicas. A restrição de solvência obriga o chamado capital de solvência, C_t, a ser positivo: $C_t = \omega_t + c^G L_t - L_t = \omega_t - (1 - c^G)L_t > 0$. Se nalgum momento se observa $C_t \leq 0$, a companhia é obrigada a declarar falência. Note-se que os planos de pensões em causa são maioritariamente de benefício definido, de modo que os *cash flows* e a provisão técnica dependem dos salários dos participantes e da dinâmica da população, que se assume serem independentes.

O regulador criou também patamares para diagnosticar as diferentes zonas em que as companhias se podem encontrar, atendendo ao nível da margem de solvência, dada por $\tilde{B}_t = \big(a\sum_{j \in J} m_j h_{tj} + b\sqrt{\sum_{j,k \in J} \sigma_{jk} h_{tj} h_{tk}}\big)\frac{(L_t + H_{t)}}{w_t}$, onde $a = -0.00972, b = 0.01782$ e m e σ são as médias e as covariâncias dos ativos: se $\frac{C_t}{\tilde{B}_t} \in [2, \infty)$, a companhia está em zona segura; se $\frac{C_t}{\tilde{B}_t} \in [1,2)$, está um pouco abaixo do desejável; se $\frac{C_t}{\tilde{B}_t} \in [0,1)$, está em crise; se $\frac{C_t}{\tilde{B}_t} \in [-\infty, 0)$, é a bancarrota.

O governo impôs ainda uma fórmula para limitar o bónus anual, que depende do capital e do limite de solvência: $\widetilde{H}_t^{max} = \phi(C_t/\tilde{B}_t)(C_t - \tilde{B}_t)$, onde $\phi(z)$ é uma função linear por troços em que o valor mínimo é 0 se $z \leq 1$ e o máximo é 0,04 se $z \geq 4$. $\tilde{B}_t$ e H_t^{max} são funções não convexas, o que leva os autores a recorrerem a aproximações convexas para obterem uma solução. A margem de solvência é substituída por $B_t = a\sum_j m_j h_{tj} + b\sqrt{\sum_{j,k\epsilon J} \sigma_{jk} h_{tj} h_{tk}}$ e $\widetilde{H}_t^{max}$ é substituída por $H_t^{max} = 0.03\, max\{C_t - B_t, 0\}$, que se baseia na média histórica de $\phi(z)$ ($\approx 0{,}03$).

A construção da função objetivo exige a definição adicional de três variáveis de défice (*shortfall*), por período: $SF_{1\leq t\leq T-1,1} \geq 2B_t - C_t$, $SF_{1\leq t\leq T-1,2} \geq B_t - C_t + \frac{H_t}{0.03}$ e $SF_{1\leq t\leq T,3} \geq -C_t$, em que cada uma indica o montante pelo qual as diferentes zonas de solvência não foram atingidas. Estes montantes serão subtraídos na função objetivo. A desigualdade para $SF_{t,2}$ incorpora a restrição $H_t \leq H_t^{max}$ para transferências de bónus. A penalidade para $SF_{t,2}$ será definida de forma a garantir que no ótimo o limite superior é atingido. O estado da companhia é dado pela função de utilidade $u(C_t, B_t, H_t, L_t) = C_t/L_t - \sum_{z=1}^{3} \gamma_z SF_{tz}/L_t + u^b\left(\frac{H_t}{L_t}\right), t = 0, \ldots, T-1$, e por $u_T(C_T, L_T) = C_T/L_T - \gamma_3 SF_{T,3}/L_T$. Finalmente, os autores estabelecem que o objetivo deste complexo modelo é maximizar o valor esperado atualizado da utilidade, ou seja, maximizar, tendo em atenção todas as restrições indicadas, $E^P\{\sum_{t=1}^{T-1} d_t u(C_t, B_t, H_t, L_t) + d_T u_T(C_T, L_T)\}$, onde P é a distribuição de probabilidade e d_t é o fator de atualização em *t*. Neste sentido, as restrições serão satisfeitas, quase certamente, em relação a *P*. O conjunto de estratégias disponíveis em cada período vai depender apenas das observações nesse período dos fatores aleatórios. Trata-se de um problema de otimização convexa não linear na função objetivo e nas restrições.

A distribuição *P* é de importância crucial e obtém-se exprimindo os fatores estocásticos em função de sete variáveis económicas facilmente observáveis (taxa de juro de curto prazo, taxa de juro das obrigações de longo prazo, índice de preços das ações, índice de dividendos, índice de preços do imobiliário, índice de valores das rendas de casa e índice de salários), que são elas próprias modelizadas recorrendo aos modelos de séries temporais. Como os autores optam por uma distribuição contínua, o problema fica com dimensão infinita, o que obriga a pesquisar as soluções numericamente.

Começa-se então por recorrer a técnicas de discretização que consistem essencialmente em aproximar a distribuição contínua por meio de uma distribuição discreta, o que origina um problema estocástico finito onde a incerteza é abordada com uma árvore de cenários. O gerador dos cenários é escrito em C e toma como *inputs* o período e os modelos de séries temporais ajustados para os fatores estocásticos. Em seguida é gerado o cenário para os ativos e as responsabilidades. O modelo de otimização e os cenários são então processados usando a linguagem AMPL *"A Mathematical Programming Language"* e toda a estrutura e tratada pelo programa MOSEK[4], que procura soluções interiores de problemas convexos não lineares e pode ser usado na maior parte das plataformas Unix e Windows.

No final do artigo Hilli *et al.* (2007) entregam-se a múltiplas experimentações do procedimento e concluem, de forma talvez um pouco sucinta, que os resultados numéricos obtidos indicam tratar-se de um modelo robusto e que pode fornecer estratégias com resultados superiores aos que seriam obtidos com a gestão mais tradicional dos ativos e passivos. Observam que a política ótima investe mais fortemente em ações quando o nível de solvência da companhia é bom, ou quase só em obrigações quando há sinais de perigo, reduzindo a exposição ao risco, o que é apropriado na gestão de um fundo de pensões.

3.2.4 ALM de planos CD: otimização com recurso à simulação - Yu, Huang, Chen e Lin (2012)

Yu *et al.* (2012) retomam o incontornável problema da seleção do portfólio, no quadro dos investimentos a longo prazo próprios dos fundos de pensões, tendo em consideração a taxa de substituição (entre salários e pensões) em planos de contribuição definida.

Os autores constatam que pode ser difícil aplicar a programação dinâmica a problemas reais porque normalmente obriga a introduzir hipóteses muito fortes, se o que se pretende é obter uma solução fechada. Assim sendo, optam por recorrer à simulação, que permite incluir todo o tipo de restrições existentes nos problemas reais, e ajudam a tomar decisões adequadas nas mais diversas situações, se bem que não fornecem propriamente soluções, mas resultados. Acrescentam que, sendo os modelos de

[4] https://mosek.com/

simulação bastante complexos no caso dos planos e fundos de pensões, os métodos de otimização têm que ser escolhidos e aplicados com cuidado, pois só assim serão úteis ao processo de decisão.

Yu *et al.* (2012) desenvolvem um modelo de simulação multiperíodo em tempo discreto para os ativos e passivos, no qual integram um algoritmo evolucionário (ver Costa (2003)) para a estratégia de investimentos, com o fim de garantir que os planos de pensões CD conseguem cobrir as responsabilidades e manter o risco de grandes perdas controlado, ao longo do tempo. Sendo:

P_{tj}: Proporção adquirida do ativo j no ano $t, j = 1,2,3,4, t = 1, \ldots, n$ (os quatro ativos escolhidos são obrigações de curto prazo, obrigações a prazos mais longos, obrigações indexadas e ações); $A(0)$: valor total inicial de ativos; $A(t)$: valor total de ativos no ano t; $c\%$: taxa de contribuição salarial; S_1: salário inicial; S_t: salário no ano t; $r_j(t)$: retorno do investimento do ativo j no ano t, o valor total dos ativos na maturidade é

$$A(n) = \sum_{t=1}^{n} c\% \times S_t \prod_{i=t}^{n} \left[\sum_{j=1}^{4} P_{ij} \times \left(1 + r_j(i)\right)\right].$$

Assumindo que a taxa de substituição pretendida é igual a 80%, a responsabilidade à data de reforma é $L(n) = 80\% \times S_x \times \ddot{a}_x$, onde S_x é o salário na idade de reforma x e $\ddot{a}_x$ é o valor atuarial de uma perpetuidade antecipada de valor 1 paga a partir da idade x (ver Garcia e Simões (2010)). Assumindo ainda que o retorno dos investimentos de cada ano t não pode ser inferior a 5% nem à taxa de inflação rpi_t, a responsabilidade desse ano vem $L(t) = [L(t-1) + c\% \times S_{t-1}] \times max\{1.05, rpi_t\}$; $L(0) = 0,\ t = 1, \ldots, n-1$. Tomando períodos de cinco anos para a restruturação do portfólio (*This is because if the proportions are changed every year, the number of variables considered in the model increases significantly and optimally solving the simulation model will become computationally intractable (...)* Yu *et al.* (2012), p. 2686), pode então definir-se a função objetivo

$$Min\ \theta \times E\left[\left(A(n) - L(n)\right)^2\right] - \sum_{k=1}^{k=\frac{n}{5}-1} E[A(T_{5\times k}) - L(T_{5\times k})].$$

onde θ é um ponderador que exprime a importância dada ao *matching* entre ativos e responsabilidades no momento da reforma. As variáveis de decisão na aplicação são a taxa de contribuição e as proporções dos quatro ativos nos sucessivos portfólios.

Para determinar a estratégia de evolução da composição do portfólio, que cai então no domínio dos algoritmos evolucionários, os autores começam por usar o modelo clássico de investimento de Wilkie (Wilkie (1995)), na simulação de um conjunto de 4000 cenários para os retornos dos ativos nos próximos 40 anos, tentando assim captar todas as possíveis situações. O modelo vai ter que ajudar a decidir sobre a taxa de contribuição necessária na fase de acumulação e sobre a composição do portfólio ao longo do tempo (com ajustamentos quinquenais).

As conclusões obtidas para otimização com as múltiplas simulações são, também neste caso, as esperadas: os investimentos de maior risco vão aumentar a rendibilidade média anual e diminuir a taxa de contribuição, mas também são responsáveis pelas maiores perdas. Assim, é preferível investir em ações nos primeiros anos e ir substituindo este tipo de aplicações por aplicações com riscos menores, à medida que o tempo vai passando e o momento da reforma se avizinha. Portanto, também este é um modelo razoável, no sentido em que mostra que as estratégias de investimento geradas em condições diferentes constituem informação válida para apoiar o processo de decisão dos gestores dos fundos de pensões.

3.2.5 Modelo média-variância no financiamento das pensões - Duttaa, Kapurb e Orszagb (2000)

O binómio média-variância (Markowitz (1952)) é clássico, quando se trata de avaliação de investimentos com retornos aleatórios, ver por exemplo ainda McNeil, Frey e Embrechts (2005). Tal como Li e Li (2012) também Duttaa, Kapurb e Orszagb (2000) o utilizam no particular contexto das pensões. O modelo que apresentam, muito embora incidindo sobre os fundos de pensões públicos e a discussão repartição/capitalização, que lhes está sempre inerente, tem bastante interesse no contexto deste trabalho, por chamar a atenção para fatores que são igualmente essenciais nos fundos privados, sobretudo porque regularmente se discute se será melhor permanecer no sistema público ou optar por desviar parte das contribuições para fundos privados – onde, por sua vez, há a discussão benefício definido/contribuição definida. Por se tratar de um contributo que apresenta esta diversidade de perspetivas, foi escolhido para fechar o capítulo.

Os autores referem que o argumento maior em defesa dos sistemas de pensões em regime de repartição se baseia na possibilidade de ineficiência dinâmica de Paul Samuelson e também que este regime constitui um método direto de redistribuição do consumo através de gerações. Explicam também que a evolução recente que favorece os sistemas de capitalização se apoia na hipótese de que a taxa de retorno dos investimentos (ativos) excede a taxa de crescimento das pensões (passivos) o que, na ausência de efeitos na oferta de trabalho e na tributação, dá origem a pensões superiores às do regime de repartição. Este argumento é forte em países com envelhecimento populacional, em que o custo de pensões não financiadas cai assimetricamente sobre jovens trabalhadores, mas é claro que nos sistemas de pensões com maiores taxas médias de retorno o risco é sempre maior e, para além da média, especial atenção deve ser dada à variância.

Duttaa, Kapurb e Orszagb (2000) abordam a questão em duas fases, a partir da análise da média e da variância dos retornos obtidos com as contribuições (por outras palavras, com as pensões que serão obtidas a partir destas).

Seja r a taxa de retorno obtida pelas contribuições dos pensionistas num fundo de capitalização e seja g o retorno obtido num fundo de repartição, g igual à taxa de crescimento do rendimento nacional. Claro que estas duas taxas são variáveis aleatórias (v.a.). Seja $w, 0 \leq w \leq 1,$ a fração das contribuições que é encaminhada para o fundo de capitalização. Então, a pensão total, por unidade monetária de contribuição, é também uma v.a., seja $P = 1 + wr + (1 - w)g$. Introduzindo uma função de utilidade U e calculando o valor esperado, obtém-se a utilidade esperada da pensão, $E[U(1 + wr + (1 - w)g])$. O objetivo é calcular w, de modo a maximizar este valor esperado.

Se não existe aversão ao risco é muito fácil provar que é ótimo investir num sistema de capitalização sempre que $E[r] > E[g]$, isto é, a decisão ótima é *opt out* e entregar todas as contribuições num fundo privado $w = 1$. Havendo aversão ao risco, pode ser melhor fazer o *hedging* com uma política mista.

Introduzindo uma nova função de utilidade esperada, também dependente da variância, seja

$$E[U(P)] = E[P] - \frac{\gamma}{2}\mathrm{Var}(P),$$

onde γ é o parâmetro da aversão ao risco, vai obter-se a solução $w = \frac{E[r] - E[g] + \gamma(\mathrm{Var}(g) - \mathrm{Cov}(r,g))}{\gamma\,\mathrm{Var}(r-g)}$.

Calculada a fração w, e numa segunda fase, os autores abordam o problema do fundo que tem que decidir como aplicar a contribuição que lhe foi confiada. Admitindo que os gestores podem investir em ações, que providenciarão o retorno r, mas têm maior risco, ou em obrigações soberanas, que normalmente têm menos risco e retorno r , $r_b < g$, o problema agora consiste em determinar a fração a a aplicar em ações. Notando que agora cada unidade de contribuição resulta numa pensão de valor $P = 1 + war + w(1 - a)r_b + (1 - w)g$, e usando dados de cinco países (EUA, RU, França, Alemanha e Japão) , é possível concluir que as obrigações apresentam considerável variância, apesar dos baixos retornos, pelo que a longo prazo toda a fração w deve ser aplicada em ações.

A principal conclusão acaba assim por ser que a melhor estratégia, a nível pessoal, é contribuir para a Segurança Social e também para fundos privados e que estes devem aplicar as contribuições praticamente só em ações – o que as legislações geralmente não permitem. Segundo os autores, que não deixam de salientar que o modelo é talvez demasiado simplista, assim se consegue diversificar o risco e também fazer a sua cobertura.

4. Ideias Finais

Nestas ideias finais, procura-se fazer uma apreciação dos modelos anteriores, referindo brevemente os aspetos mais essenciais de cada um, de modo a fazer como que uma síntese conclusiva do trabalho.

Li e Li (2012) tratam o problema de otimização de um portfólio de ativos ao longo do tempo, no quadro da gestão de ativos e passivos, de modo a controlar a probabilidade de insolvência no horizonte considerado, sendo este o aspeto mais original do seu contributo.

É um modelo de média-variância, segundo o trabalho pioneiro de Markowitz (1952), e recorrem à Desigualdade de Chebychev, aos multiplicadores de Lagrange e à PD para a sua resolução. Concebem um algoritmo complexo e a aplicação numérica que desenvolvem evidencia que o controlo da insolvência tem um impacto importante sobre a estratégia ótima de investimentos. Verificam que o recurso à desigualdade de Chebychev, como *proxy* do mecanismo desse controlo, obriga o decisor a optar por estratégias muito mais conservadoras do que as que adotaria se aquele não existisse. Terminam com a sugestão de que seria interessante passar de uma ALM em tempo discreto para uma abordagem em tempo contínuo.

Han e Hung (2012) tratam os planos CD e, portanto, centram-se na gestão dos ativos. Admitem que existe um benefício mínimo e que está previsto um mecanismo de proteção contra o risco da inflação ao longo do tempo, não só durante a fase de acumulação do fundo, mas também durante o período da reforma, uma questão determinante. Introduzem a função de utilidade CRRA para orientar o processo de decisão. Uma ilustração numérica mostra que, quando o tempo se aproxima da data de reforma, o participante tende a privilegiar os ativos com menos risco, ao contrário do que sucede no início da fase de acumulação, em que investe fortemente nesses ativos. A aplicação numérica ilustra assim que a dinâmica do portfólio ótimo fornecida pelo modelo é consistente com o conhecimento convencional, o que é sempre importante.

Guan e Liang (2014) procuram uma estratégia de investimento ótima também no quadro da gestão de um plano de pensões CD, também com um benefício mínimo garantido. A maior complexidade resulta da consideração de uma taxa de juro estocástica e de que não só as contribuições dos participantes são incertas como ainda os retornos das ações têm volatilidade estocástica. É também necessário modelar a mortalidade. Para maximizar a utilidade esperada do valor excedente do fundo (depois de paga a garantia), recorrem à PE. Terminam com uma simulação de Monte Carlo e concluem que a abordagem é robusta, pois mesmo nos cenários mais extremados fornece soluções consensuais com a prática estabelecida.

Geyer e Ziemba (2008) optam por uma aplicação real e dão a conhecer o modelo de programação linear estocástica InnoALM, usado para definir a composição do portfólio dos ativos em planos CD com contribuições fixas. Na sua opinião, a maior utilidade do InnoALM resulta da facilidade com que acomoda restrições e objetivos numa multiplicidade de cenários, o que permite identificar trajetórias para os ativos e passivos do fundo e uma avaliação do risco em cada cenário. O modelo socorre-se de uma função de utilidade para introduzir a aversão ao risco e procura maximizar a riqueza esperada final, líquida dos custos. Geyer e Ziemba (2008) implementam uma aplicação com uma multiplicidade de cenários baseados nas práticas reais de investimento. Concluem que o modelo ajuda a estimar antecipadamente os resultados prováveis de uma alteração de política e dos retornos de ativos, o que é útil para ajustar a estratégia de investimentos no sentido da maximização dos benefícios proporcionados pelo fundo.

Para Aouni, Colapinto e La Torre (2014) a programação por metas é a abordagem mais adequada para a gestão otimizada de portfólios, pois agrega múltiplos objetivos e permite determinar portfólios que minimizam os desvios entre o que se consegue obter e o que se tem como meta a alcançar, sendo um processo evolutivo, fácil de aplicar. Havendo dois objetivos conflituantes, a maximização do retorno do investimento e a minimização do risco relacionado com as perdas financeiras, o portfólio ótimo deve fazer um *trade-off*, de modo a alcançar um equilíbrio global entre risco e retorno. Sem resolver qualquer problema prático, Aouni, Colapinto e La Torre (2014) resumem as diferentes formalizações que é possível considerar e salientam que a PM tem flexibilidade para incorporar as preferências do decisor nos mais diversos casos.

Já Hilli *et al.* (2006) preferem a programação estocástica como sendo uma abordagem eficiente à gestão otimizada de ativos e passivos, pois permite tratar a complexidade inerente à dinâmica e às restrições existentes neste tipo de problemas. A originalidade do seu contributo resulta de ser um *case study* para a determinação do portfólio ótimo de uma sociedade gestora sedeada na Finlândia, incluindo o pagamento de bónus (ótimos) e também restrições sobre a composição dos portfólios e os tipos de transações, algumas das quais provêm do “intricado sistema de pensões na Finlândia”. Particular atenção é dada aos fatores incertos. Após múltiplas experimentações do modelo, concluem que este pode fornecer estratégias com resultados superiores aos que seriam obtidos com a gestão mais tradicional dos ativos e passivos. Observam que a política ótima investe mais em ações quando o nível de solvência da companhia é bom, ou quase só em obrigações no caso contrário, o que é apropriado na gestão de um fundo de pensões.

Por seu turno, Yu *et al.* (2012) optam por recorrer à simulação, que permite incluir todo o tipo de restrições existentes nos problemas reais, se bem que não forneça propriamente soluções, mas resultados. Esta opção resulta de constatarem que pode ser difícil aplicar a programação dinâmica a problemas reais, porque normalmente obriga a introduzir hipóteses muito fortes. Desenvolvem um modelo de simulação multiperíodo em tempo discreto para os ativos e passivos, no qual integram um algoritmo para a estratégia de investimentos, com o fim de garantir que os planos de pensões CD conseguem cobrir as responsabilidades e manter o risco de grandes perdas controlado ao longo do tempo. As conclusões obtidas com as simulações são as esperadas: os investimentos de maior risco vão aumentar a rendibilidade média anual e diminuir a taxa de contribuição, mas também são responsáveis pelas maiores perdas. Assim, é preferível investir em ações nos primeiros anos e ir substituindo este tipo de aplicações por aplicações com riscos menores, à medida que o momento da reforma se avizinha.

No último dos contributos, Duttaa, Kapurb e Orszagb (2000) apresentam um modelo que, muito embora incidindo sobre os fundos de pensões públicos e a discussão repartição/capitalização, que lhes está inerente, tem bastante interesse no contexto deste trabalho, pois chama a atenção para fatores também essenciais nos fundos privados, numa altura em que se discute se será melhor permanecer no sistema público ou optar por desviar parte das contribuições para fundos privados. Concluem que a melhor estratégia, a nível pessoal, é contribuir para a Segurança Social e também para fundos privados e que estes devem aplicar as contribuições praticamente só em ações.

Em suma, verifica-se que as mais variadas abordagens e os mais complexos modelos confirmam que, na prática, os gestores de fundos de pensões tendem a adotar estratégias otimizadas na gestão de ativos e passivos dos fundos a seu cargo. Nos planos BD, muitas vezes, e no fim de contas, tomam as suas decisões apoiados na simples constatação da necessidade de fazer o *matching* entre ativos e passivos, com base essencialmente nas respetivas durações e convexidades (cf. Rebelo (2009), por exemplo). Apesar disso, verifica-se que chegam a estratégias que estão em conformidade com as soluções e ilustrações descritas nos modelos vistos, substancialmente mais sofisticados. Já nos planos CD, também há concordância em que é preferível investir em ativos com maior risco nos primeiros anos e ir substituindo este tipo de aplicações por aplicações com riscos menores, à medida que o tempo vai passando e o momento da reforma se avizinha. Parece, assim, haver um bom entendimento entre a teoria e a prática e é natural que a monitorização frequente do fundo com base neste ou naquele modelo permita efetivamente obter ganhos adicionais ou evitar perdas inesperadas.

A finalizar, só a indicação de que o modelo primitivamente escolhido para apoiar este trabalho é o de Hilli *et al.* (2007). Se algum dia os dados ficarem disponíveis será um bom trabalho futuro tentar a sua implementação no mercado português.

Referências Bibliográficas

Aouni B, Colapinto C, La Torre D (2014), Financial Portfolio Management through the Goal Programming Model: Current State-of-the-Art in European Journal of Operational Research, 234, 536-545;

Bazaraa MS, Shetty CM, Mokhtar S (1979), Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, Wiley;

Bellman R (1952), On the Theory of Dynamic Programming, Proceedings of the National Academy of Sciences, 38, 716-719;

Bjork T (2009), Arbitrage Theory in Continuous Time, 3rd Edition, Oxford Finance Series, Oxford University Press;

Boender GCE (1997), A hybrid simulation/optimisation scenario model for asset/liability management, European Journal of Operational Research, 99, 126-135;

Broverman SA (2010), Mathematics of Investment and Credit, 5th Edition, Actex Academic Series;

Cairns AJG, Blake D, Dowd K (2006), Stochastic life styling: Optimal dynamic asset allocation for defined contribution pension plans; Journal of Economic Dynamics & Control, 30, 843–877;

Consigli G, Dempster MAH (1998), Dynamic stochastic programming for asset – liability management, Annals of Operations Research, 81, 131 – 161;

Cooper L, Cooper MW (1981), Introduction to Dynamic Programming, Oxford Pergamon;

Costa L (2003), Algoritmos evolucionários em otimização uni e multi-objetivo, Tese de Doutoramento, Universidade do Minho;

Dupacová J, Polívka J (2009), Asset-liability management for Czech pension funds using stochastic programming, Annals of Operations Research, 165, 5–28;

Dutta J, Kapur S, Orszag JM (2000), A Portfolio Approach to the Optimal Funding of Pensions, Economics Letters, 69, 201–206;

Elton EJ, Gruber MJ, Bown SJ, Goetzmann WN (2010), Modern Portfolio Theory and Investment Analysis , 8th Edition, John Wiley and Sons, Inc;

Garcia JA, Simões OA (2010), Matemática Atuarial Vida e Pensões, Edições Almedina;

Geyer A, Ziemba WT, (2008), The Innovest Austrian Pension Fund Financial Planning Model InnoALM, Operations Research, Vol. 56, No. 4, 797–810;

Guan G, Liang Z (2014), Optimal management of DC pension plan in a stochastic interest rate and stochastic volatility framework, Insurance: Mathematics and Economics, 57, 58–66;

Gulpinar N, Pachamanova D (2013), A robust optimization approach to asset-liability management under time-varying investment opportunities, Journal of Banking & Finance 37, 2031–2041;

Han N-W, Hung M-W (2012), Optimal asset allocation for DC pension plans under inflation, Insurance: Mathematics and Economics, 51, 172–181;

Hill T, Pang G, Warshawsky M (2010), Hybrid Pension Plans: A Comprehensive Look at Their History, Economics and Features, Towers Watson Perspectives Report;

Hilli P, Koivu M, Pennanen T, Ranne A (2007), A stochastic programming model for asset liability management of a Finnish pension insurance company, Annals of Operations Research: Special issue on 'Financial Modeling', 152, 115-139;

Homem-de-Mello T, Bayraksan G (2014), Monte Carlo sampling-based methods for stochastic optimization, Surveys in Operations Research and Management Science, 19, 56–85;

Iyengar G, Chun Ma AK (2010), A robust optimization approach to pension fund management, Journal of Asset Management, 11, 163–177;

Josa-Fombellida R, Rincón-Zapatero JP (2006), Optimal investment decisions with a liability: The case of defined benefit pension plans, Insurance Mathematics and Economics, 39, 81–98;

Josa-Fombellida R, Rincón-Zapatero JP (2008), Mean–variance portfolio and contribution selection in stochastic pension funding, European Journal of Operational Research, 187, 120–137;

Josa-Fombellida R, Rincón-Zapatero JP (2010), Optimal asset allocation for aggregated defined benefit pension funds with stochastic interest rates, European Journal of Operational Research, 201, 211–221;

Korn R, Korn E, Kroisandt G (2010), Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series;

Li C, Li Z (2012), Multi-period portfolio optimization for asset–liability management with bankrupt control, Applied Mathematics and Computation, 218, 11196–11208;

Lim AEB, Wong B (2010), A benchmarking approach to optimal asset allocation for insurers and pension funds, Insurance: Mathematics and Economics, 46, 317-327;

Markowitz H (1952), Portfolio Selection, The Journal of Finance, Vol. 7, Num. 1, 77-91;

Mc Gill DM, Brown KN, Haley JJ, Schieber SJ (2005), Fundamentals Private Pensions; Oxford University Press; 8th Edition;

McNeil AJ, Frey R, Embrechts P (2005), Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools, Princeton Series in Finance, Princeton University Press;

Ross SM (1983), Introduction to Stochastic Dynamic Programming, Academic Press;

Society of Actuaries (2003), Professional Actuarial Specialty Guide, Asset Liability Management;

Taha HA (2011), Operations Research: an Introduction, 9th Edition, Pearson Prentice Hall;

Wilkie AD (1995), More on a stochastic asset model for actuarial use, British Actuarial Journal, 1, 777–964;

Yu T-Y, Huang H-C, Chen C-L, Lin Q-T (2012), Generating effective defined-contribution pension plan using simulation optimization approach, Expert Systems with Applications, 39, 2684–2689;

Zenios SA, Ziemba WT (2006), Handbook of Asset and Liability Management: Applications and Case Studies, vol. 1. Elsevier;

Zenios SA, Ziemba WT (2007), Handbook of Asset and Liability Management: Applications and Case Studies, vol. 2. Elsevier.

Anexo

Modelos	Modelo Média-Variância no financiamento das pensões	ALM de Planos CD: Otimização com Recurso à Simulação	Programação Estocástica para a ALM de Fundos de Pensões na Finlândia	Otimização de Portfólios com Programação por Metas	O Modelo InnoALM de ALM para fundos de pensões austríacos	Gestão ótima de um plano de pensões CD com taxa de juro e volatilidade estocásticas	Otimização da carteira de ativos de planos de pensões CD com inflação em todo o horizonte temporal	Modelo multiperíodo para otimização do portfólio num quadro de ALM com controlo da insolvência
Variáveis	Taxa de retorno de capitalização; Taxa de retorno de repartição;	Proporção adquirida do ativo num ano; taxa de contribuição salarial.	Montante a investir; Valor em carteira; Montante a realizar com venda; Bónus; Total riqueza; Capital e Limite solvência; Défice.	Desvios não desejados; Proporção a investir no ativo; Metas estabelecidas.	Valor aplicado de investimento, compras e vendas para cada ativo; Taxa de retorno aleatório da aplicação.	Taxa de juro estocástica; Retorno de ações; Preço de obrigações; Contribuições; Ativo sem risco; Volatilidade.	Contribuições em obrigações cupão zero e indexadas e ações; Saldo inicial; Preço do cabaz bens e serviços; Taxa das contribuições.	Barreira do desastre; valor das responsabilidades; valor para aplicação dos três ativos; taxas de retorno dos três instrumentos.
Parâmetros	Parâmetro de aversão ao risco;	Taxa de substituição; Valor atuarial; Taxa de inflação; Ponderador de importância do matching;	Catorze Parâmetros Determinísticos e Quatro Estocásticos.	Ponderadores dos diferentes desvios; Parâmetros de preferência; Covariância entre os retornos dos ativos.	Fatores de atualização; Pesos dos desvios, da riqueza e do risco em termos de variância.	Aversão ao risco relativo.	Coeficiente de aversão relativa constante ao risco; Movimento Browniano Standard.	Fator de aversão ao risco; fator de controlo do risco de falência; parâmetro auxiliar.
Metodologia	Função de Utilidade; Análise da média e variância dos retornos obtidos com as contribuições;	Modelo investimento de Wilkie; Algoritmos Evolucionários: Estratégias de Evolução	Modelos de fatores estocásticos; Discretização; Aproximações convexas.	PM Lexicográfica, com ponderadores, Polinomial, Estocástica, Difusa; Modelo Markowitz; Programação multiobjetivo.	Distribuição t-student, normal e empírica; Três matrizes correlação; Modelo linear estocástico multiplicativo;	Utilidade CRRA; PDE; Modelação da mortalidade; Transformação num problema equivalente de investimento único.	Função utilidade CRRA; Processo auxiliar excedente; Soma ponderada de três portfólios.	Lagrangeano multiplicativo; Dualidade de Lagrange; Problema Auxiliar; Desigualdade de Chebychev.
Função Objetivo	Máxima Utilidade esperada da pensão	Mínimo da Função de 5 em 5 anos para a restruturação de portfólio; Função anual da suficiência do fundo de pensões.	Máximo do Valor esperado atualizado da utilidade.	Mínimo do Vetor ordenado dos desvios.	Máx. Valor esperad atual da riqueza final líquida dos custos esperados, com medida de risco convexo linear por troços.	Máximo da Utilidade esperada do valor excedente do fundo depois de paga a garantia.	Máximo da Função de utilidade esperada do saldo real final da conta	Máximo da Função do Modelo de Média-Variância Generalizada.
Solução	w= fração das contribuições encaminhada para o fundo de capitalização; a = fração aplicada em ações.	Taxa de contribuição; Proporção de alocação de ativos.	Arvore cenário para ativos e passivos	Trade-off que proporcionam melhor portfólio que minimizam desvios.	Estima resultados prováveis de alterações de politica e retornos de ativos com outputs detalhados.	Estratégia ótima de investimento com peso das aplicações em liquidez, obrigações e ações.	X* = Portfólio ótimo; F = valor atual das contribuições; G = Garantia mínima; Y = Solução auxiliar.	u* = Estratégia de Portfólio Ótimo