



Lisbon School  
of Economics  
& Management  
Universidade de Lisboa

**MESTRADO EM**  
**MÉTODOS QUANTITATIVOS PARA A DECISÃO**  
**ECONÓMICA E EMPRESARIAL**

**TRABALHO FINAL DE MESTRADO**

PROJETO ELABORADO PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

**UM PROBLEMA DE ALOCAÇÃO DE NAVIOS NUM**  
**PORTO ADMITINDO A SUA DESLOCAÇÃO**

ALESSIA LOPES MADEIRA

**ORIENTAÇÃO:**

PROFESSOR DOUTOR FILIPE MANUEL GONÇALVES RODRIGUES

OUTUBRO-2024

# Agradecimentos

Antes de mais, gostava de agradecer ao Professor Doutor Filipe Rodrigues, por toda a disponibilidade, infelizmente quase sempre fora de horas, por todo o apoio e por toda a paciência.

Aos meus pais e irmãos, o maior obrigado por nunca duvidarem de que seria capaz e pela compreensão relativamente à minha ausência. Aos meus sobrinhos, um agradecimento especial por tornarem os dias mais complicados sempre muito mais leves, foi fulcral para o término deste projeto.

Aos meus excelentes amigos, Afonso, Carol, Inês e Margarida, obrigada por não levarem a mal o adiamento de todos os planos para após a entrega. À minha Beatriz, obrigada pelo apoio incondicional, desde o início até ao fim desta fase, tal como todas as outras.

Por fim, ao meu Chico, quero agradecer por toda a paciência, pela constante repetição de “falta pouco” e “tu consegues”, e por acalmar sempre o meu nervosismo.

# Resumo

A alocação de navios nas secções de um porto é um problema muito importante na gestão portuária, uma vez que impacta diretamente todas as outras atividades. Este problema é denominado *Berth Allocation Problem* e é habitualmente estudado sem que seja considerada a possibilidade de alterar a posição dos navios durante o tempo em que se encontram no cais. O foco deste Trabalho Final de Mestrado é a aplicação da possibilidade de deslocação de navios entre secções, durante a sua carga ou descarga, de modo a criar espaço para o atraque de outros navios que estejam à espera para atracar.

Inicialmente são apresentadas três formulações em programação linear inteira mista: uma sem a possibilidade de deslocação e duas com essa possibilidade. Como o problema em questão não pode ser resolvido em tempo útil através de métodos exatos devido à sua complexidade, foram desenvolvidas heurísticas baseadas na heurística *Bottom-Left*. São apresentadas três heurísticas, uma das quais sem possibilidade de deslocação, mas que serve como base para a criação das restantes.

De modo a retirar conclusões relativamente à utilização da deslocação no problema em questão, foram utilizados três conjuntos de instâncias, variando na taxa de chegada dos navios e na dimensão. As formulações desenvolvidas apenas foram aplicadas a instâncias de menor dimensão e as formulações com deslocação apresentaram melhores resultados quando foram considerados navios já atracados. As heurísticas foram aplicadas aos três conjuntos de instâncias e obtiveram melhores resultados do que a formulação sem deslocação nas instâncias de maior dimensão.

**Palavras-chave:** *Berth Allocation Problem*; Deslocação; Heurística *Bottom Left*

# Abstract

The allocation of ships in the berthing sections of a dock is a very important problem in port management, because it directly impacts all other activities. This problem is known as the *Berth Allocation Problem* and is usually studied without considering the possibility of shifting the position of docked ships. The focus of this work is to apply the possibility of shifting the berthing sections of ships, during their loading and unloading operations, to create space for other ships awaiting to dock.

Initially, three formulations in mixed integer linear programming are presented: one without the possibility of shifting ships and two with that possibility. As the problem cannot be solved in reasonable time using exact methods, heuristics based on the heuristic *Bottom-Left* were developed. Three heuristics are introduced, the first one does not consider the possibility of shifting ships, but it serves as a basis for the remaining ones.

To draw conclusions regarding the possibility of shifting ships in this problem, three sets of instances were used, varying in arrival rate of ships and dimension. The formulations were only applied to the instances with smaller dimensions and the formulations with shifting were able to achieve better results when considering already docked ships. The heuristics were applied to the three sets of instances and were able to achieve better results than the formulation without shifting in the instances with larger dimensions.

**Keywords:** Berth Allocation Problem; Shifting; Bottom-Left Heuristics

# Índice

Agradecimentos.....	i
Resumo.....	ii
Abstract.....	iii
Índice de Tabelas.....	v
Índice de Figuras.....	v
Lista de Abreviaturas.....	vi
1. Introdução.....	1
2. Revisão de Literatura.....	3
3. Apresentação do Problema.....	6
3.1. Formulação do <i>BAP</i> Tradicional.....	7
3.2. Formulação do <i>BAP</i> Tradicional Modificada.....	9
3.3. Formulação do <i>BAP</i> com Deslocação.....	11
3.4. Formulação Alternativa do <i>BAP</i> com Deslocação.....	12
4. Aplicação das Heurísticas Desenvolvidas.....	14
4.1. Heurística <i>Bottom-Left</i> Melhorada.....	14
4.2. Heurística <i>Bottom-Left</i> Melhorada com Deslocação.....	17
4.2.1. Heurística <i>Bottom-Left</i> Melhorada com Deslocação Condicionada.....	19
5. Apresentação de Resultados.....	21
5.1. Comparação de Formulações.....	21
5.1.1. Resultados das Instâncias Iniciais.....	22
5.1.1.1. Resultados Considerando Navios já Atracados.....	23
5.1.2. Resultados das Instâncias Modificadas.....	24
5.1.2.1. Resultados Considerando Navios já Atracados.....	25
5.2. Comparação de Heurísticas.....	26
5.2.1. Resultados das Instâncias Iniciais.....	26
5.2.2. Resultados das Instâncias Modificadas.....	28
5.2.3. Resultados das Instâncias de Maior Dimensão.....	29
6. Conclusão.....	31
Referências Bibliográficas.....	33

## Índice de Tabelas

Tabela 1 - Informação sobre os navios da instância.....	16
Tabela 2 - Tempo médio das formulações para as instâncias iniciais.....	23
Tabela 3 - Resultados obtidos através das formulações para as instâncias iniciais, considerando o navio 1 já atracado. ....	24
Tabela 4 - Tempo médio das formulações para as instâncias modificadas.....	25
Tabela 5 - Resultados obtidos através das formulações para as instâncias modificadas, considerando o navio 1 já atracado. ....	25
Tabela 6 - Resultados obtidos pelas heurísticas para as instâncias iniciais.....	27
Tabela 7 - Resultados obtidos pelas heurísticas para as instâncias modificadas.....	28
Tabela 8 - Resultados das heurísticas para as instâncias de maior dimensão. ....	29

## Índice de Figuras

Figura 1 - Ilustração de uma solução do problema em estudo. ....	6
Figura 2 – Ilustração da aplicação da possibilidade de deslocação.....	7
Figura 3 – Ilustração da aplicação da heurística Bottom-Left Melhorada à instância apresentada na Tabela 1. ....	16
Figura 4 - Ilustração de uma solução obtida através da heurística Bottom-Left Melhorada e de uma solução obtida pela Heurística Bottom-Left Melhorada com deslocação. ....	18
Figura 5 - Ilustração da aplicação da heurística Bottom-Left Melhorada com deslocação condicionada à instância apresentada na Tabela 1. ....	19

# Lista de Abreviaturas

*BACAP – Berth Allocation and Crane Assignment Problem*

*BACASP – Berth Allocation, Crane Assignment and Scheduling Problem*

*BAP – Berth Allocation Problem*

*BL – Bottom-Left*

*BLM – Bottom-Left Melhorada*

*MCI – Minimum Cost Based Insertion*

SI – Sequência de Inserção

TFM – Trabalho Final de Mestrado

# 1. Introdução

O *Berth Allocation Problem (BAP)* é um problema fundamental para a gestão portuária. O seu objetivo é determinar a forma mais eficiente de alocar navios que chegam ao porto nas secções de atracação disponíveis, para efetuar cargas e descargas, de modo a minimizar o tempo total de permanência dos navios no porto. A sua importância recai no facto de impactar diretamente todas as restantes operações no porto e começou a ganhar destaque nos anos 90 devido à globalização. Esta globalização gerou um aumento do comércio internacional e impulsionou a necessidade de métodos de gestão portuária mais eficientes.

O *BAP* tradicional não permite a possibilidade de deslocação de navios entre secções após o seu atracamento no cais, ou seja, uma vez atracado no cais, o navio permanece imóvel até deixar o porto. Este Trabalho Final de Mestrado (TFM) procura entender se a deslocação de navios é ou não benéfica para o problema. Esta deslocação consiste em deslocar navios já atracados para outra secção, de modo a libertar espaço para navios que estejam à espera de atracar, tentando assim reduzir o tempo total de permanência dos navios no porto. De modo a obter resultados computacionais que permitam analisar esta questão, foram usados dois tipos de métodos: formulações em programação linear inteira mista e heurísticas. A formulação apresentada inicialmente (onde não se considera a deslocação) baseia-se na apresentada por Guan & Cheung (2004) e serve como base para as formulações com deslocação. A primeira formulação criada revelou-se computacionalmente pesada, o que levou à necessidade de uma nova formulação baseada na divisão dos navios em duas partes: primeiro atracamento e deslocação. Ambas as formulações com deslocação foram criadas neste estudo. Como não é possível obter resultados para instâncias grandes do *BAP* em tempo útil através de métodos exatos, foram então desenvolvidas heurísticas. Inicialmente é apresentada a heurística *Bottom-Left* Melhorada, elaborada em Rodrigues (2024), que não contempla deslocação. De seguida são apresentadas duas heurísticas que contemplam a possibilidade de deslocação, *Bottom-Left* Melhorada com deslocação e *Bottom-Left* Melhorada com deslocação condicionada. A primeira apenas acrescenta à heurística *Bottom-Left* Melhorada a possibilidade de deslocação, enquanto a segunda limita também o movimento dos navios, de modo que um navio já atracado apenas poderá ser movido quando a posição em que se encontra for superior à posição em que se tenta atracar o navio a analisar.

Este TFM inicia com uma breve revisão de literatura sobre o problema (Secção 2). Na Secção 3 são apresentados o problema e as formulações desenvolvidas. São inicialmente introduzidas as formulações que não contemplam deslocação, mas que são a base para as que contemplam, e de seguida as que efetivamente contemplam deslocação. Na Secção 4 são apresentadas as heurísticas, sendo que também aqui é inicialmente apresentada a heurística sem



deslocação e de seguida as heurísticas com deslocação. Os resultados das formulações e das heurísticas desenvolvidas são apresentados na Secção 5. Por fim, na Secção 6, são referidas as conclusões do estudo.

## 2. Revisão de Literatura

Nesta secção é feita uma breve revisão de literatura referente ao *BAP*, sendo mencionados os métodos aplicados para resolver o problema e algumas restrições operacionais nele incluídas para que se assemelhe mais com a realidade. No entanto, o foco desta revisão de literatura são os estudos que contemplam deslocação de navios entre secções.

Com o aumento do tráfego marítimo, houve necessidade de desenvolver métodos eficientes para a resolução do *BAP*. Começaram por surgir estudos em programação linear inteira mista e com aplicação de heurísticas. Guan & Cheung (2004) apresentam um método exato para a resolução do *BAP* simples, tendo como base uma proposição que afirma que há uma solução ótima na qual cada navio atraca exatamente no seu instante de atraque ou no instante em que outro navio sai do porto, sendo esta atracação na 1ª secção do cais ou na secção imediatamente a seguir a um navio ainda atracado. As formulações apresentadas neste TFM têm como base este estudo.

O *BAP* é um problema NP-difícil (Lim, 1998), ou seja, não existe um algoritmo capaz de o resolver em tempo polinomial, o que faz com que seja necessária a utilização de heurísticas. Alguns exemplos de heurísticas utilizadas para obter resultados para este problema são Algoritmos Genéticos (Nishimura *et al.*, 2001), heurísticas de pesquisa local (Hansen *et al.*, 2008), *Ant-colony* (Cheong & Tan, 2008), *Particle Swarm* (Ting *et al.*, 2014) e *Simulated Annealing* (Lin & Ting, 2014).

Apesar das suas diferenças, algumas heurísticas usadas para resolver o *BAP* partilham dois passos comuns: obter sequências de inserção de navios e, dada uma sequência de inserção, inserir os navios com recurso a uma heurística de inserção segundo essa sequência. O tipo de heurísticas de inserção sequencial mais utilizado para resolver problemas de empacotamento/escalonamento são as heurísticas *Minimum Cost Based Insertion (MCI)* cujo objetivo é alocar os navios no cais de modo a obter o mínimo custo possível. Dentro das heurísticas *MCI*, a heurística *Bottom-Left (BL)* é das mais utilizadas no *BAP* quando não há secções preferenciais. Dada uma sequência de inserção de navios, esta heurística consiste em inserir os navios um a um, tão cedo quanto possível e na secção mais baixa possível. Rodrigues (2024) apresenta uma melhoria à aplicação da heurística *BL* ao *BAP*, designada por *BL Melhorada*. As heurísticas apresentadas neste TFM têm como base este estudo.

Ao longo dos anos, o *BAP* tem evoluído para contemplar aspetos que o assemelhem mais à realidade. No *BAP* tradicional, o instante de chegada dos navios é assumido como fixo, no entanto este instante pode variar por razões como condições meteorológicas ou avarias mecânicas. Esta variação é considerada no *BAP* com incerteza (Rodrigues & Agra, 2022). Os transportadores marítimos podem estabelecer com os portos acordos contratuais acerca da prioridade de serviços

e esta deve ser tida em conta aquando da alocação dos navios (Imai *et al.*, 2003). Através de acordos contratuais, pode ser também definida, uma janela temporal, impondo que cada navio necessita de ser processado e de sair do porto num determinado espaço de tempo (Golias *et al.*, 2007). A carga e descarga dos navios é efetuada através de gruas. A incorporação da afetação/escalonamento de gruas no *BAP* gerou dois novos problemas *Berth Allocation and Crane Assignment Problem (BACAP)* e *Berth Allocation, Crane Assignment and Scheduling Problem (BACASP)* (Park & Kim, 2003). O *BACAP* e o *BACASP* diferem entre si na medida em que o primeiro apenas determina o número de gruas afetas a cada navio, enquanto no segundo é também feito o escalonamento específico dessas gruas aos navios (Türkoğullari *et al.*, 2014), o que torna o problema ainda mais complexo. Na literatura são encontrados também estudos que contemplam mais do que um porto, por exemplo, em Martin-Iradi *et al.* (2024) é feita a otimização de navios a múltiplos portos e em Imai *et al.* (2008) existe um terminal externo para onde os navios são encaminhados quando excedem um determinado tempo de espera. Com o aumento da preocupação ambiental, surgem também estudos cujo foco é a minimização do impacto ambiental das operações portuárias. Golias *et al.* (2009) procura a diminuição dos tempos de espera dos navios considerando o instante de chegada de um navio como uma variável. Nesta abordagem, os portos estabelecem os tempos de chegada de cada navio e os transportadores marítimos conseguem assim otimizar a sua velocidade para cumprir estes tempos e reduzir emissões.

Na maioria dos *BAPs* estudados, não é considerada a possibilidade de deslocação entre secções, ou seja, a possibilidade de um navio alterar a sua secção durante o seu tempo de processamento. Isto significa que após o seu atraque o navio nunca mais é mexido até terminar a sua operação de carga/descarga. No entanto, a deslocação dos navios é considerada em alguns artigos. Em Brown *et al.* (1994) e Brown *et al.* (1997) é considerada a deslocação de navios e submarinos em portos navais, mas é vista de um modo diferente, sendo apenas uma necessidade devido ao facto de nem todas as secções de atraque prestarem o conjunto de serviços que um dado navio/submarino necessita e o objetivo dos estudos é minimizar esta deslocação. Em Li *et al.* (1998) é considerado o *BAP* com possibilidade de deslocação dos navios entre secções. Nesse estudo o *BAP* sem deslocação é definido como “*fixed position case*” e considera que a deslocação tem uma penalização temporal e monetária associada, enquanto que o *BAP* com deslocação é definido como “*non-fixed position case*” e não considera esta penalização. É aplicada uma heurística *First-Fit-Decreasing* que ordena os navios por ordem decrescente, relativamente ao seu comprimento, e os aloca às secções de atraque de acordo com essa ordem. Lee & Chen (2009) consideram também o *BAP* com deslocação entre secções, com limitações relacionadas com o tempo de processamento e com a distância da deslocação. A deslocação do navio pode ou não aumentar o tempo que um navio está atracado. Além disso, não é possível deslocar um navio mais do que uma vez e nem todos os navios reúnem as condições de deslocação. A abordagem usada

compreende três fases. Inicialmente é gerado um número de possíveis alocações para cada navio. De seguida, utiliza-se uma heurística de procura local para gerar um bom conjunto de soluções candidatas. Por último, é utilizada uma abordagem *greedy* para melhorar a solução. Zheng *et al.* (2024) apresentam uma nova estratégia de gestão da água do lastro, isto é, água bombeada para tanques específicos do navio quando estão totalmente ou parcialmente vazios, para manter estabilidade. Nesta estratégia os navios primeiro carregam parte da sua carga numa secção, de seguida deslocam-se para uma secção de espera para efetuarem a descarga da água do lastro e por fim deslocam-se novamente para outra secção para efetuarem o restante carregamento. Esta estratégia resulta em múltiplas deslocações de navios.

Este TFM difere dos estudos mencionados acima na interpretação da necessidade da deslocação e no facto de não terem sido desenvolvidas formulações que incluíssem a possibilidade da deslocação.

### 3. Apresentação do Problema

O *Berth Allocation Problem* consiste em alocar um conjunto de navios que chega ao porto num determinado horizonte temporal ao longo de um cais, de modo a diminuir o seu tempo de permanência no porto.

Este problema pode ser definido de diferentes formas, tendo em conta o tipo de chegada dos navios, o tipo de cais considerado e o tempo de processamento dos navios (Bierwirth & Meisel, 2010). As chegadas dos navios podem ser dinâmicas ou estáticas, sendo que no caso dinâmico os navios chegam ao longo do tempo e no estático todos os navios se encontram já no cais. Relativamente ao cais, este pode ser discreto, contínuo ou híbrido. No cais discreto, cada navio é servido numa só secção e cada secção serve apenas um navio. No cais contínuo, um navio atraca em qualquer lugar ao longo do cais desde que não exceda os limites. No caso híbrido, o cais é dividido em secções e verifica-se que dois navios pequenos podem ocupar uma mesma secção no mesmo instante e que um navio grande pode ocupar várias. Por fim, o tempo de processamento pode ser fixo, dependente da secção de atraque ou dependente do número de gruas que opera nos navios.

Neste TFM será estudado o *BAP* dinâmico com cais contínuo, discretizado em secções fictícias, e tempos de processamento fixos para os navios. As soluções deste problema podem ser representadas por um diagrama de tempo e espaço, tal como apresentado na Figura 1, onde cada retângulo representa um navio. O comprimento de um retângulo corresponde ao tempo de processamento do navio e a altura ao número de secções que ocupa no cais. As coordenadas do canto inferior esquerdo de cada retângulo correspondem, respetivamente, ao instante de atraque e à secção de atraque.

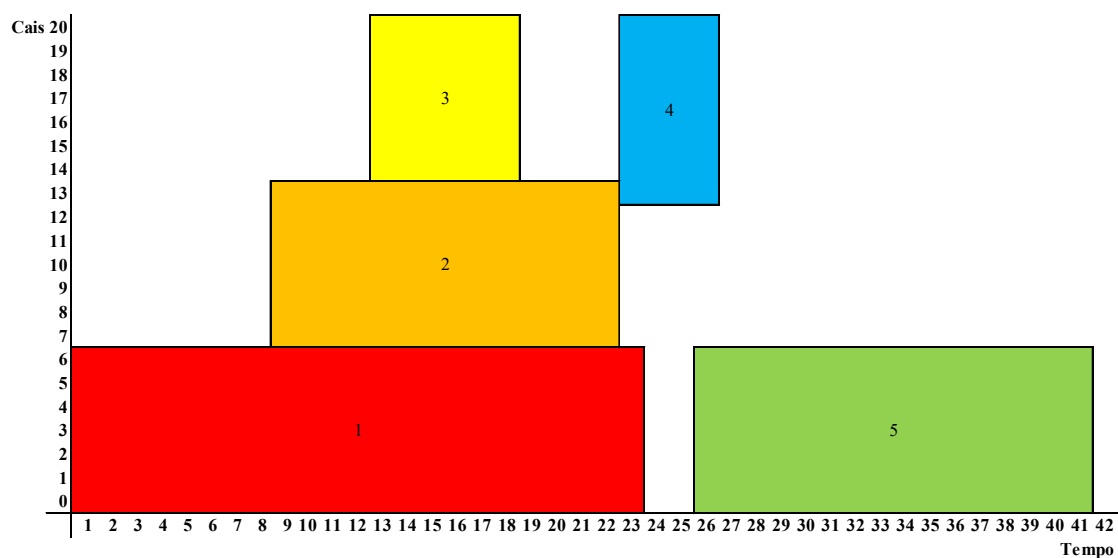


Figura 1 - Ilustração de uma solução do problema em estudo.

No *BAP* tradicional, não é possível deslocar um navio após o seu atraque, no entanto poderá haver situações em que esta possibilidade é benéfica, nomeadamente quando há secções livres no cais para que o navio atraque, mas a disposição inicial dos navios não o permita.

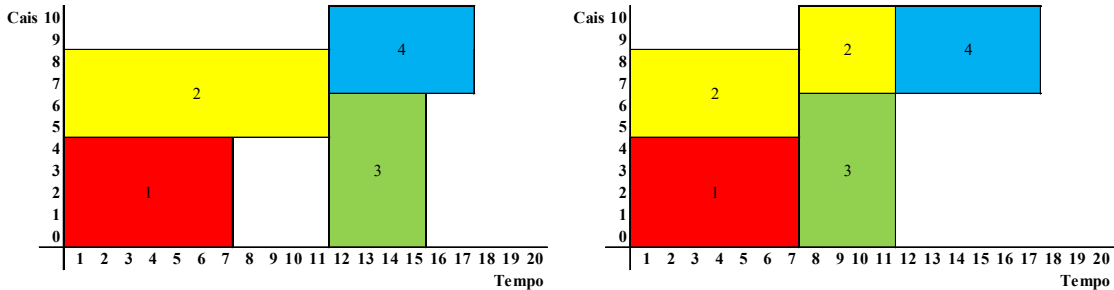


Figura 2 – Ilustração da aplicação da possibilidade de deslocação.

A Figura 2 apresenta um exemplo em que o problema beneficia da possibilidade de deslocação após o atraque. No primeiro diagrama não existe esta possibilidade e o navio 3 apenas consegue atracar no instante 12. No segundo diagrama, com a possibilidade de deslocação, podemos deslocar o navio 2 da secção 5 para a 7 fazendo com que o navio 3 tenha agora possibilidade de atracar no instante 8. Para verificar se a deslocação de navios é benéfica para o problema, serão desenvolvidas formulações que admitam esta possibilidade.

Na secção seguinte, começamos por apresentar a formulação do *BAP* tradicional, que não permite a deslocação do navio após o seu atraque. De seguida, será apresentada uma nova formulação para o *BAP* que também não permite deslocação, mas que servirá de base para a formulação com deslocação. Por fim, serão então apresentadas duas formulações diferentes que permitem a deslocação do navio.

### 3.1. Formulação do *BAP* Tradicional

Nesta secção é apresentada uma formulação do *BAP* tradicional que tem como base a formulação apresentada por Guan & Cheung (2004), esta formulação não admite a possibilidade de deslocação do navio após o seu atraque. Considere-se um conjunto  $N$  de navios heterogéneos, um horizonte temporal com  $M$  instantes e um cais dividido em  $J + 1$  secções. Definam-se os seguintes conjuntos: conjunto de navios  $V = \{1, \dots, N\}$ , conjunto de instantes temporais  $T = \{1, \dots, M\}$  e conjunto de secções de atraque  $B = \{0, \dots, J\}$ . O comprimento de cada navio  $i \in V$ , em secções de atraque, é dado por  $l_i$ , o tempo de processamento é dado por  $d_i$  e o instante em que o navio chega ao cais é dado por  $a_i$ . Os parâmetros  $f_1$  e  $f_2$  representam a folga espacial e

temporal entre navios e têm como objetivo impor distâncias e intervalos de segurança entre navios.

Dados  $i$  e  $j \in V$ , definem-se as seguintes variáveis:

$x_i$  : Secção em que o navio  $i$  atraca no cais.

$y_i$  : Instante em que o navio  $i$  atraca no cais.

$z_i$  : Instante em que o navio  $i$  sai do cais.

$\theta_{ij}^x$  : Assume o valor 1 quando o navio  $j$  atraca completamente abaixo do navio  $i$ .

$\theta_{ij}^y$  : Assume o valor 1 quando a navio  $j$  atraca depois do navio  $i$  sair.

Tendo em conta as variáveis e parâmetros definidos, o problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$\min \sum_{i \in V} z_i \quad (1)$$

$$s. a. \quad x_i + l_i \leq J, \quad i \in V, \quad (2)$$

$$x_i + l_i + f_1 \leq x_j + (J + f_1)(1 - \theta_{ij}^x), \quad i, j \in V, i \neq j, \quad (3)$$

$$y_i + d_i + f_2 \leq y_j + (M + f_2)(1 - \theta_{ij}^y), \quad i, j \in V, i \neq j, \quad (4)$$

$$\theta_{ij}^x + \theta_{ji}^x + \theta_{ij}^y + \theta_{ji}^y \geq 1, \quad i, j \in V, i \neq j, \quad (5)$$

$$y_i \geq a_i, \quad i \in V, \quad (6)$$

$$y_i + d_i \leq M, \quad i \in V, \quad (7)$$

$$z_i \geq y_i + d_i, \quad i \in V, \quad (8)$$

$$x_i, y_i, z_i \in \mathbb{Z}_0^+, \quad i \in V, \quad (9)$$

$$\theta_{ij}^x, \theta_{ij}^y \in \{0,1\}, \quad i, j \in V, i \neq j. \quad (10)$$

A função objetivo (1) minimiza a soma dos instantes de saída de todos os navios, o que equivale a minimizar a soma dos tempos de permanência no porto. O conjunto de restrições (2) garante que os navios não excedem o limite do cais e o conjunto (7) garante que o instante de saída do navio não excede o horizonte temporal. Os conjuntos de restrições (3) a (5) garantem que não há sobreposição de navios no espaço e no tempo, simultaneamente. O conjunto de restrições (5) garante que os navios diferem ou na secção em que atracam ou no instante em que atracam, podendo diferir em ambos os aspetos. Ou seja, dados dois navios  $i$  e  $j$ , estas restrições garantem que eles atracam completamente abaixo um do outro ( $\theta_{ij}^x$  ou  $\theta_{ji}^x = 1$ ) ou que um deles apenas atraca após o outro sair ( $\theta_{ij}^y$  ou  $\theta_{ji}^y = 1$ ). O conjunto de restrições (6) estabelece limites ao instante de atraque do navio, sendo que um navio não pode atracar se não se encontrar no cais. O conjunto de restrições (8) define o instante de saída dos navios como a soma entre o instante

de ataque e o tempo de processamento. Os conjuntos de restrições (9) e (10) definem o domínio das variáveis utilizadas, sendo que o (9) define variáveis inteiras e o (10) define variáveis binárias.

### 3.2. Formulação do *BAP* Tradicional Modificada

Sendo o objetivo do estudo perceber se a deslocação de navios após o seu ataque é benéfica para o problema, é necessário alterar a formulação anterior para permitir esta deslocação. A primeira alteração necessária é que a variável que representa a secção em que o navio atraca,  $x_i$ , possa alterar o seu valor ao longo do horizonte temporal. Para tal definiu-se a variável  $x_{it}$ , que assume valor 0 caso o navio  $i$  não esteja atracado no instante  $t$  e valor  $b$  caso o navio  $i$  esteja atracado na secção  $b$  no instante  $t$ . Com recurso à variável  $x_{it}$  temos informação dos instantes em que o navio se encontra atracado ( $x_{it} > 0$ ) e em que secção se encontra ( $x_{it} = b$ ).

Esta transformação da variável faz com que seja necessário alterar o conjunto das secções de ataque  $B$ , passando agora a ser  $B = \{1, \dots, J + 1\}$ , de modo que não se confunda um navio não atracado com um navio atracado na secção zero. É também necessário alterar o conjunto dos instantes temporais para  $T = \{0, \dots, M + 1\}$ , de modo a incorporar os instantes fictícios 0 e  $M + 1$  que ajudam na modelação do posicionamento dos navios. Além disso, foi também necessário ajustar a formulação, alterando variáveis existentes e adicionando novas variáveis. Dados  $i, j \in V$  e  $t \in T$ , definem-se as seguintes variáveis:

$\theta_{ijt}^x$ : Assume o valor 1 quando o navio  $j$  atraca completamente abaixo do navio  $i$  no instante  $t$ ;

$u_{it}$ : Assume o valor 1 caso o navio  $i$  mude de secção no instante  $t$ ;

$v_{it}$ : Assume o valor 1 caso o navio  $i$  esteja atracado no instante  $t$ ;

$w_{it}$ : Variável binária auxiliar na linearização de um conjunto de restrições.

A formulação seguinte é equivalente à formulação apresentada anteriormente, ou seja, não contempla a deslocação entre secções, contempla apenas a alteração da variável  $x_i$  para  $x_{it}$ . Contudo esta formulação é aqui introduzida pois servirá como base para a formulação com deslocação entre secções apresentada na próxima secção. Tendo em conta as variáveis e parâmetros definidos, o problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$\min \sum_{i \in V} z_i \quad (11)$$

$$s. a. \quad x_{it} + l_i \leq J + 1, \quad i \in V, t \in T, \quad (12)$$

$$x_{it} + (l_i + f_1) v_{it} \leq x_{jt} + (J + 1 + f_1)(1 - \theta_{ijt}^x), \quad i, j \in V, t \in T, i \neq j, \quad (13)$$

$$y_i + d_i + f_2 \leq y_j + (M + f_2)(1 - \theta_{ij}^y), \quad i, j \in V, i \neq j, \quad (14)$$



$$\theta_{ijt}^x + \theta_{jit}^x + \theta_{ij}^y + \theta_{ji}^y \geq 1, \quad t \in T, i, j \in V, i \neq j, \quad (15)$$

$$y_i \geq a_i, \quad i \in V, \quad (16)$$

$$y_i + d_i \leq M, \quad i \in V, \quad (17)$$

$$(J - l_i + 1) u_{it} \geq x_{it} - x_{it-1}, \quad i \in V, t \in T/\{0\}, \quad (18)$$

$$(J - l_i + 1) u_{it} \geq x_{it-1} - x_{it}, \quad i \in V, t \in T/\{0\}, \quad (19)$$

$$u_{it} \leq x_{it} - x_{it-1} + (J - l_i + 1) w_{it}, \quad i \in V, t \in T/\{0\}, \quad (20)$$

$$u_{it} \leq x_{it-1} - x_{it} + (J - l_i + 1)(1 - w_{it}), \quad i \in V, t \in T/\{0\}, \quad (21)$$

$$\sum_{t \in T} u_{it} = 2, \quad i \in V, \quad (22)$$

$$x_{i0} = 0, \quad i \in V, \quad (23)$$

$$x_{iM+1} = 0, \quad i \in V, \quad (24)$$

$$x_{it} \leq (J - l_i + 1) v_{it}, \quad i \in V, t \in T, \quad (25)$$

$$v_{it} \leq x_{it}, \quad i \in V, t \in T, \quad (26)$$

$$d_i = z_i - y_i, \quad i \in V, \quad (27)$$

$$d_i = \sum_{t \in T} v_{it} - 1, \quad i \in V, \quad (28)$$

$$z_i \geq t * v_{it}, \quad i \in V, t \in T, \quad (29)$$

$$y_i \leq t + (M - d_i + 1)(1 - v_{it}), \quad i \in V, t \in T, \quad (30)$$

$$x_{it}, y_i, z_i \in \mathbb{Z}_0^+, \quad i \in V, t \in T, \quad (31)$$

$$\theta_{ij}^x, \theta_{ij}^y, u_{it}, v_{it}, w_{it} \in \{0,1\}, \quad i, j \in V, i \neq j, t \in T. \quad (32)$$

O conjunto de restrições (13), corresponde às restrições (3) apresentadas na formulação anterior, mas houve necessidade de fazer alterações. Começou-se pela adição da variável  $v_{it}$ , que garante que caso o navio  $i$  não se encontre atracado, o navio  $j$  não será limitado pelo comprimento do navio  $i$ . Por fim, procedeu-se à alteração da variável  $\theta_{ij}^x$  para  $\theta_{ijt}^x$ , uma vez que esta tem de assumir valores diferentes em diferentes instantes, devido ao novo significado do valor 0 da variável  $x_{it}$ . Por exemplo, quando dois navios  $i$  e  $j$  ainda não estão atracados é necessário que uma das variáveis  $\theta_{ijt}^x$  ou  $\theta_{jit}^x$  assumam o valor 1, no entanto este valor pode não se manter após atraque dos mesmos. O conjunto de restrições (15) garante que em cada instante exista precedência espacial ou temporal, evitando por isso sobreposição.

Os conjuntos de restrições (18) a (21) definem a variável  $u_{it}$ , que representa a mudança de secção. As restrições (18) e (19) são a linearização da restrição  $(J - l_i + 1)u_{it} \geq |x_{it} - x_{it-1}|$ , que garante que a variável  $u_{it}$  assume o valor 1 quando há diferença entre o valor de  $x_{it}$  e  $x_{it-1}$ . As restrições (20) e (21) são a linearização da restrição  $u_{it} \leq |x_{it} - x_{it-1}|$ , que garante que a variável  $u_{it}$  assume o valor 0 quando as variáveis  $x_{it}$  e  $x_{it-1}$  são iguais. Para fazer esta linearização, houve necessidade de adicionar a variável auxiliar  $w_{it}$ .

O conjunto de restrições (22) garante que o navio efetua apenas duas mudanças de posição. A combinação destas restrições com as restrições (23) e (24) garante que estas mudanças são de não atracado para atracado e de atracado novamente para não atracado. É devido aos conjuntos de restrições (23) e (24) que foi necessária a alteração do conjunto dos instantes  $T$ .

Os conjuntos de restrições (25) a (30) definem a variável  $v_{it}$ , que informa se o navio se encontra atracado ou não num dado instante. As restrições (25) e (26) garantem que a variável  $v_{it}$  assume o valor 1 quando o navio se encontra atracado ( $x_{it} > 0$ ) e 0 quando o navio não se encontra atracado ( $x_{it} = 0$ ). As restrições (27) a (30) estabelecem a relação entre a variável  $v_{it}$  e as variáveis temporais  $y_i$  e  $z_i$ , sendo que as restrições (27) e (28) garantem que a soma de  $v_{it}$ , para cada navio, corresponde ao seu tempo de processamento. As restrições (29) e (30) garantem que  $v_{it}$  assume o valor 1 enquanto  $y_i \leq t \leq z_i$ .

Por fim, os conjuntos de restrições (31) e (32) definem o domínio das variáveis utilizadas, sendo que (31) define variáveis inteiras e (32) define variáveis binárias. A descrição das restantes restrições é semelhante à apresentada anteriormente, pelo que foi omitida.

### 3.3. Formulação do *BAP* com Deslocação

Ao fazer uma relaxação da formulação apresentada anteriormente, alterando o conjunto de restrições (22), passa a ser possível um navio deslocar-se entre secções após o seu ataque. Esta deslocação deve ter uma penalização temporal associada pois a deslocação do navio para a nova secção não é instantânea. De modo a considerar esta penalização, criou-se o parâmetro  $tm$ .

O problema pode então ser formulado da seguinte forma:

$$\min \sum_{i \in V} z_i \quad (33)$$

$$s. a. \quad (12), (13), (15), (16), (18) - (21), (23) - (26), (28) - (32),$$

$$y_i + d_i + \left( \sum_{t \in T} u_{it} - 2 \right) tm + f_2 \leq y_j + (M + f_2)(1 - \theta_{ij}^y), \quad i, j \in V, i \neq j, \quad (34)$$

$$y_i + d_i + \left( \sum_{t \in T} u_{it} - 2 \right) tm \leq M, \quad i \in V, \quad (35)$$

$$z_i \geq y_i + d_i + \left( \sum_{t \in T} u_{it} - 2 \right) tm, \quad i \in V, \quad (36)$$

$$\sum_{t \in T} u_{it} \geq 2, \quad i \in V. \quad (37)$$

Para formar as restrições (34), (35) e (36) foi adicionado o termo  $(\sum_{t \in T} u_{it} - 2) tm$ , para que, quando há mais do que duas mudanças de secção, seja contabilizado o tempo dessas

mudanças. O conjunto de restrições (37) deixa de garantir que ocorrem duas mudanças de posição, atraque e saída, para garantir que ocorrem pelo menos duas, possibilitando a deslocação de secção após o atraque.

Esta formulação permite analisar a hipótese em estudo, isto é, se a deslocação entre secções é benéfica para a diminuição do tempo de permanência dos navios no cais. No entanto, devido à sua complexidade, o tempo de obtenção de resultados é bastante elevado.

### 3.4. Formulação Alternativa do *BAP* com Deslocação

Devido ao elevado tempo de obtenção de resultados da formulação anterior, foi desenvolvida uma nova formulação com o objetivo de resolver o problema de forma mais eficiente. Esta formulação tem como base a primeira formulação apresentada e assume que cada navio pode mudar de posição no máximo uma vez, enquanto permanece no porto. Para isso, cada navio é dividido em duas partes sendo que a primeira corresponde ao seu primeiro atraque e a segunda à sua deslocação. Para formular esta divisão, foi criado o conjunto  $V' = \{1, \dots, 2N\}$ , que representa os navios originais (1 a  $N$ ) e as suas réplicas ( $N + 1$  a  $2N$ ). Assim, o navio  $i$  corresponde ao primeiro atraque e o segundo navio  $i + N$  corresponde à sua deslocação.

Foi necessária a redefinição de alguns dos parâmetros da formulação, nomeadamente  $l'_i$  que representa o comprimento do navio  $i$ , sendo que  $l'_i = l'_{i+N} = l_i$  para  $i \in V$  e  $s_{ij}$  que assume valor 0 quando os navios  $i$  e  $j$  representam o navio original e a sua réplica e 1 caso contrário. Por fim, foi também necessária a adição de novas variáveis:

$d'_i$ : duração parcial do processamento do navio  $i$ , sendo que  $d'_i + d'_{i+N} = d_i$ , para  $i \in V$ ;

$u_i$ : Assume o valor 1 caso o navio  $i$  mude de secção;

$w_i$ : Variável binária auxiliar na linearização de um conjunto de restrições.

Considerando os conjuntos, parâmetros e variáveis definidos na primeira formulação e os descritos acima, é possível formular o *BAP* com deslocação da seguinte forma:

$$\min \sum_{i \in V} z_{i+N} \quad (38)$$

$$\text{s. a. } x_i + l'_i \leq J, \quad i \in V', \quad (39)$$

$$x_i + l'_i + f_1 * s_{ij} \leq x_j + (J + f_1)(1 - \theta_{ij}^x), \quad i, j \in V', i \neq j, \quad (40)$$

$$z_i + f_2 * s_{ij} \leq y_j + (M + f_2)(1 - \theta_{ij}^y), \quad i, j \in V', i \neq j, \quad (41)$$

$$\theta_{ij}^x + \theta_{ji}^x + \theta_{ij}^y + \theta_{ji}^y \geq 1, \quad i, j \in V', i \neq j, \quad (42)$$

$$y_i + d'_i \leq M, \quad i \in V', \quad (43)$$

$$y_i \geq a_i, \quad i \in V, \quad (44)$$

$$z_i = y_i + d'_i, \quad i \in V, \quad (45)$$

$$y_{i+N} = z_i + tm * u_i, \quad i \in V, \quad (46)$$

$$z_{i+N} = y_{i+N} + d'_{i+N} + tm * u_i, \quad i \in V, \quad (47)$$

$$z_{i+N} - y_i = d_i + tm * u_i, \quad i \in V, \quad (48)$$

$$(J - l_i + 1) u_i \geq x_i - x_{i+N}, \quad i \in V, \quad (49)$$

$$(J - l_i + 1) u_i \geq x_{i+N} - x_i, \quad i \in V, \quad (50)$$

$$u_i \leq x_i - x_{i+N} + (J - l_i + 1) w_i, \quad i \in V, \quad (51)$$

$$u_i \leq x_{i+N} - x_i + (J - l_i + 1)(1 - w_i), \quad i \in V, \quad (52)$$

$$x_i, y_i, z_i, d'_i \in \mathbb{Z}_0^+, \quad i \in V', \quad (53)$$

$$\theta_{ij}^x, \theta_{ij}^y \in \{0,1\}, \quad i, j \in V', i \neq j, \quad (54)$$

$$u_i, w_i \in \{0,1\}, \quad i \in V. \quad (55)$$

A função objetivo (38) minimiza a soma dos instantes de saída dos navios réplica, pois apenas estes representam o término do processamento. Nos conjuntos de restrições (40) e (41) é adicionado o parâmetro  $s_{ij}$  multiplicado pela folga, espacial e temporal, de modo a garantir que a folga não é adicionada quando os dois navios são o navio original e a sua réplica.

As restrições (43) a (48), em conjunto com as restrições (41), definem os limites temporais dos navios originais e dos navios réplicas. O conjunto de restrições (46) define o instante de atracção do navio réplica, que deve ser igual ao instante de saída do navio original mais o tempo de deslocação entre secções. Os conjuntos de restrições (45) e (47) definem os instantes de saída do navio original e do navio réplica, sendo que na réplica é adicionado o termo  $tm * u_i$  para considerar o tempo de deslocação entre secções. O conjunto de restrições (48) garante ainda que o tempo de permanência de um navio no cais é a soma do seu tempo de processamento com o tempo de deslocação entre secções.

Os conjuntos de restrições (49) a (52) definem a variável  $u_i$ , que representa a mudança de secção. As restrições (49) e (50) são a linearização da restrição  $(J - l_i + 1) u_i \geq |x_i - x_{i+N}|$ , que garante que a variável  $u_i$  assume o valor 1 quando há diferença entre o valor de  $x_i$  e  $x_{i+N}$ . As restrições (51) e (52) são a linearização da restrição  $u_i \leq |x_i - x_{i+N}|$ , que garante que a variável  $u_i$  assume o valor 0 quando as variáveis  $x_i$  e  $x_{i+N}$  são iguais. Para fazer esta linearização, houve necessidade de adicionar a variável auxiliar  $w_i$ .

Por fim, os conjuntos de restrições (53) a (55) definem o domínio das variáveis utilizadas. A descrição das restantes restrições é semelhante à apresentada anteriormente, pelo que foi omitida.

## 4. Aplicação das Heurísticas Desenvolvidas

As formulações apresentadas anteriormente permitem obter soluções ótimas para o problema em estudo. No entanto, quando consideramos instâncias de maiores dimensões o seu tempo de obtenção de resultados é bastante elevado. As heurísticas são uma forma de obter soluções admissíveis para o problema de um modo mais rápido, devido à sua menor complexidade computacional.

Nesta secção serão apresentadas heurísticas baseadas na heurística *Bottom-Left*, que consiste em, dada uma sequência de inserção de navios, inserir os navios no diagrama um a um, tão cedo quanto possível e na secção mais baixa possível (Rodrigues, 2024). Será primeiramente apresentada a heurística que não contempla a possibilidade de deslocação dos navios, mas que servirá de base para a heurística que contempla esta possibilidade.

### 4.1. Heurística *Bottom-Left* Melhorada

A seguinte heurística é desenvolvida em Rodrigues (2024) e apresenta uma melhoria relativamente à heurística *BL* tradicional para obter soluções para o *BAP*. Esta heurística não contempla a possibilidade de deslocação dos navios.

Nesta heurística considera-se  $N$  navios heterogéneos, uma sequência de inserção ( $SI$ ) desses navios, um horizonte temporal com  $M$  instantes e um cais dividido em  $J + 1$  secções. O comprimento de cada navio  $i \in SI$ , em secções de atracação, é dado por  $l_i$ , o tempo de processamento é dado por  $d_i$  e o instante em que o navio chega ao cais é dado por  $a_i$ . Para cada navio  $i \in SI$  definem-se as seguintes variáveis:

$x_i$  : Secção em que o navio atraca.

$y_i$  : Instante em que o navio atraca no cais.

Tendo em conta as variáveis e parâmetros definidos, a heurística pode ser apresentada da seguinte forma:

### Algoritmo 1. *Bottom-Left* Melhorada

---

```
1: Input: Sequência de inserção ( $SI$ ) de navios
2: Para cada navio  $i \in SI$ 
3:   Para cada instante  $t \in \{a_i, \dots, M - d_i\}$ 
4:     Para cada secção de atracque  $b \in \{1, \dots, J + 1 - l_i\}$ 
5:       Se o navio  $i$  pode atracar na secção  $b$  com instante de atracque  $t$  então
6:         Se não há navios  $j$  a chegar até ao instante  $t + d_i$  com comprimento
            $l_j \leq J + 1 - b + l_i$  e se o navio  $i$  puder atracar na secção  $J + 1 - l_i$  então
7:           Definir  $x_i = J + 1 - l_i$  e  $y_i = t$ 
8:           Ir para o passo 2
9:         Senão
10:          Definir  $x_i = b$  e  $y_i = t$ 
11:          Ir para o passo 2
12:        FimSe
13:      Senão
14:        Se alocar o navio  $i$  na secção  $b$  com tempo de atracque  $t$  gerar um conflito em
            $\eta$  secções de atracque com um único navio  $j$  já inserido no diagrama e este
           navio  $j$  puder ser movido1  $\eta$  secções de atracque acima sem causar conflito
           então
15:          Definir  $y_i = t$ ,  $x_i = b$  e redefinir  $x_j = x_j + \eta$ 
16:          Ir para o passo 2
17:        FimSe
18:      FimSe
19:    FimPara
20:  FimPara
21: FimPara
22: Output: secção de atracque e instante de atracque de cada navio
```

---

Comparativamente à heurística apresentada em Rodrigues (2024), a heurística aqui descrita apresenta duas diferenças. As secções de atracque foram alteradas de  $\{0, \dots, J\}$  para  $\{1, \dots, J + 1\}$ , de modo a facilitar a comparação dos resultados relativamente à heurística com deslocação. Além disso, no passo 6, foi adicionada a menção “e se o navio  $i$  puder atracar na secção  $J + 1 - l_i$ ”, para garantir que não são atracados navios nessa secção quando tal não é possível.

A heurística apresentada acima procura inicialmente atracar um navio  $i$  no instante  $t$  na secção  $b$ , ou na secção mais alta possível ( $J + 1 - l_i$ ) caso nenhum navio  $j$  que chegue até ao instante de saída do navio  $i$  e possa atracar numa das secções  $\{b + l_i, \dots, J + 1\}$ . Caso não seja possível atracar o navio  $i$  no instante  $t$  na secção  $b$ , a heurística verifica se é possível mover um

---

<sup>1</sup> A ação “mover” referida nesta heurística não representa mover fisicamente o navio, mas sim redefinir a sua posição de atracque. A posição de atracque do navio na heurística pode ser redefinida várias vezes durante a heurística, mas no final da heurística o navio terá uma única posição de atracque real.

único navio  $j$  de modo a possibilitar o atraque do navio  $i$  nesta secção  $b$ . Caso seja possível, altera-se a secção de atraque do navio  $j$  e atualiza-se a secção de atraque e o instante de atraque do navio  $i$ . Caso contrário, a heurística segue para a secção ou instante seguinte.

Para melhor perceber o funcionamento desta heurística será apresentado o exemplo de uma instância com 6 navios, cuja informação consta na Tabela 1. A representação do processo de obtenção da solução é apresentada na Figura 3.

Tabela 1 - Informação sobre os navios da instância.

	Navio 1	Navio 2	Navio 3	Navio 4	Navio 5	Navio 6
Instante de chegada ( $a_i$ )	1	3	4	4	5	6
Comprimento ( $l_i$ )	2	3	2	2	2	3
Tempo de processamento ( $d_i$ )	10	2	12	4	4	4

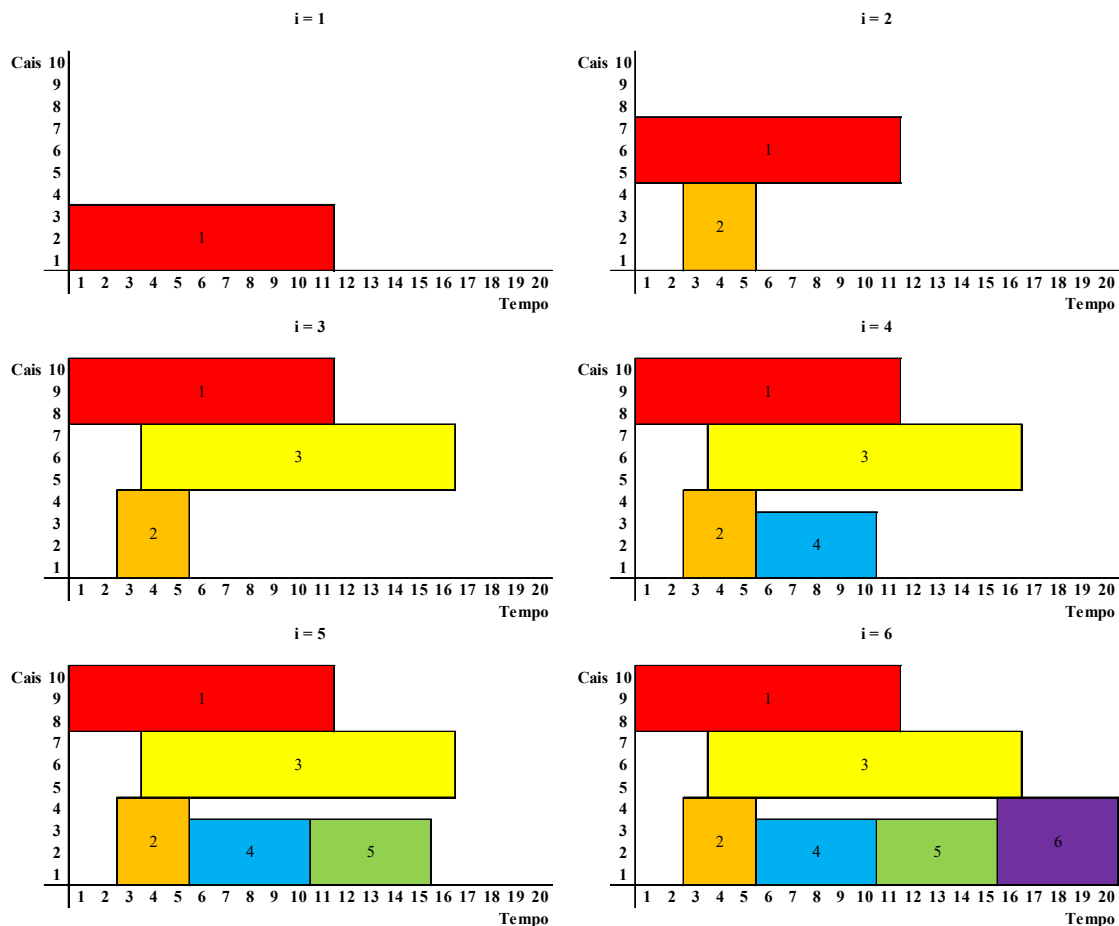


Figura 3 – Ilustração da aplicação da heurística Bottom-Left Melhorada à instância apresentada na Tabela 1.

A heurística inicia com o navio 1 a ser colocado na secção 1 no seu instante de chegada (passo 10). O navio 2 atraca também no seu instante de chegada e na secção 1, obrigando o navio 1 a mover-se para a secção 5 (passo 15). O navio 3 atraca no instante da sua chegada, tenta atracar

nas secções em que se encontra o navio 2. No entanto, não é possível mover o navio 2 para permitir o atraque do navio 3. Assim o navio 3 acaba por atracar na secção 5 onde se encontrava o navio 1 e o navio 1 move-se para a secção 8 (passo 15). Os navios 4, 5 e 6 atracam após o seu instante de chegada, no primeiro instante em que há secções livres consecutivas que lhes permitem atracar (passo 10).

## 4.2. Heurística *Bottom-Left* Melhorada com Deslocação

De modo a contemplar a deslocação, foi necessária a transformação da variável  $x_i$ , para que esta possa alterar o seu valor ao longo do horizonte temporal, tal como aconteceu anteriormente na formulação do *BAP* com deslocação. Define-se então  $x_{it}$  para  $t \in \{1, \dots, M\}$ , como sendo 0 caso o navio  $i$  não esteja atracado no instante  $t$  e como sendo  $b$  caso o navio  $i$  esteja atracado na secção  $b$  no instante  $t$ . Também na heurística deve ser considerado o parâmetro  $tm$  para contabilizar o tempo de deslocação entre secções. A heurística pode ser apresentada da seguinte forma:

### Algoritmo 2. *Bottom-Left* Melhorada com deslocação

---

- 1: **Input:** Sequência de inserção (*SI*) de navios
- 2: Definir  $x_{it} = 0$ , para  $i \in SI$  e  $t \in \{0, \dots, M\}$
- 3: **Para** cada navio  $i \in SI$
- 4:     **Para** cada instante  $t \in \{a_i, \dots, M - d_i\}$
- 5:         **Para** cada secção de atraque  $b \in \{1, \dots, J + 1 - l_i\}$
- 6:             **Se** o navio  $i$  pode atracar na secção  $b$  com instante de atraque  $t$  **então**
- 7:                 **Se** não há navios  $j$  a chegar até ao instante  $t + d_i$  com comprimento  $l_j \leq J + 1 - b + l_i$  e se o navio  $i$  puder atracar na secção  $J + 1 - l_i$  **então**
- 8:                     Definir  $x_{i,v} = J + 1 - l_i$ ,  $v \in \{t, \dots, t + d_i\}$  e  $y_i = t$
- 9:                     Ir para o passo 2
- 10:             **Senão**
- 11:                 Definir  $x_{i,v} = b$ ,  $v \in \{t, \dots, t + d_i\}$  e  $y_i = t$
- 12:                 Ir para o passo 2
- 13:             **FimSe**
- 14:         **Senão**
- 15:             **Se** alocar o navio  $i$  na secção  $b$  com tempo de atraque  $t$  gerar um conflito em  $\eta$  secções de atraque com um único navio  $j$ , já inserido no diagrama, que ainda não tenha sido **deslocado** de secção, e este navio  $j$  puder ser **movido**  $\eta$  secções de atraque acima sem causar conflito **então**
- 16:                 Definir  $y_i = t$ ,  $x_{i,v} = b$ ,  $v \in \{t, \dots, t + d_i\}$  e redefinir  $x_{j,u} = x_{j,u} + \eta$ ,  $u \in \{y_j, \dots, y_j + d_j\}$
- 17:                 Ir para o passo 2
- 18:             **FimSe**
- 19:             **FimSe**
- 20:         **FimPara**
- 21:     **Para** cada secção de atraque  $b \in \{1, \dots, J + 1 - l_i\}$



- 22:           **Se** alocar o navio  $i$  na secção  $b$  com tempo de atraque  $t$  gerar um conflito em  $\eta$  secções de atraque com um único navio  $j$ , já inserido no diagrama, que ainda não tenha sido **deslocado** de secção, e se este navio  $j$  puder ser **deslocado**, desde o instante  $t$  até ao instante  $y_j + d_j + tm$ ,  $\eta$  secções acima sem causar conflito **então**
- 23:           Definir  $y_i = t$ ,  $x_{i,v} = b$ ,  $v \in \{t, \dots, t + d_i\}$  e redefinir  $x_{j,u} = x_{j,u} + \eta$ ,  
 $u \in \{t, \dots, y_j + d_j + tm\}$
- 24:           Ir para o passo 2
- 25:           **FimSe**
- 26:           **FimPara**
- 27:           **FimPara**
- 28:           **FimPara**
- 29:           **Output:** secções de atraque e instante de atraque de cada navio
- 

A heurística apresentada baseia-se na heurística *Bottom-Left* Melhorada, adicionando a possibilidade de deslocar navios num dado instante (passos 21 a 26), caso não seja possível atracar o navio, naquele instante, de outro modo. No entanto, após o navio ser deslocado não é possível movê-lo ou deslocá-lo novamente. A utilização dos dois verbos, mover e deslocar, serve para distinguir os dois procedimentos efetuados ao navio nesta heurística. Enquanto mover significa mudar o navio de secção desde o seu instante de atraque até ao seu instante de saída, deslocar significa mudar a secção do navio após o seu atraque, deslocando-o de uma secção para outra num instante  $t$ .

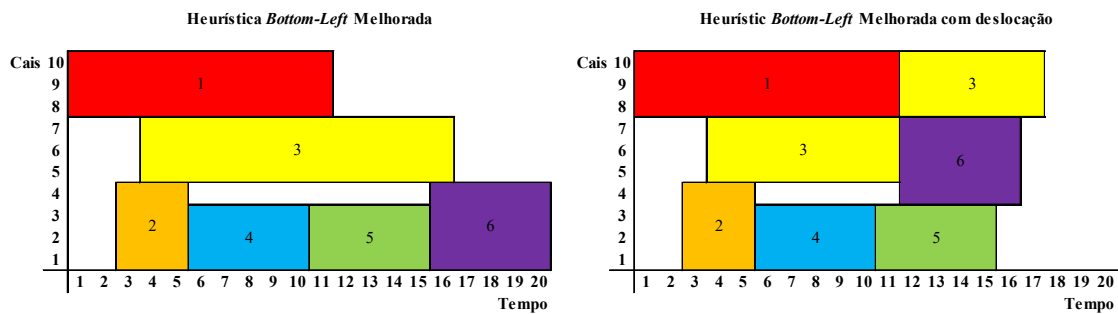


Figura 4 - Ilustração de uma solução obtida através da heurística *Bottom-Left* Melhorada e de uma solução obtida pela Heurística *Bottom-Left* Melhorada com deslocação.

Aplicando a heurística com deslocação à mesma instância apresentada na Figura 3, onde foi aplicada a heurística sem deslocação, é possível observar as suas diferenças. Na Figura 4 é apresentada a última iteração de cada heurística, porque é a única que apresenta diferentes resultados. Podemos observar que o atraque do navio 6 difere entre as heurísticas. Na heurística sem deslocação ele atraca no instante 16 pois é o primeiro instante em que há secções livres consecutivas no cais que permitem o seu atraque (passo 11), enquanto na heurística com deslocação este navio atraca logo no instante 12, porque a heurística verificou que havia a quantidade necessária de secções livres para o atraque do navio deslocando o navio 3 da secção

5 para a secção 8 (passo 23). Isto tornou assim possível o atraque do navio 6 na secção 4. É de realçar que a heurística contempla o parâmetro  $tm$ , definido neste exemplo como  $tm = 1$ . Assim, na heurística sem deslocação o navio 3 sai do cais no instante 16, mas na heurística com deslocação apenas sai no instante 17. Há então uma melhoria, no tempo total, de 3 instantes, referentes aos 4 instantes em que o navio 6 atraca mais cedo menos 1 instante referente à mudança de secção do navio 3.

#### 4.2.1. Heurística *Bottom-Left* Melhorada com Deslocação Condicionada

A fim de tentar de obter melhores resultados sem mover tanto os navios, foi adicionada no passo 15 da heurística anterior, Heurística *Bottom-Left* Melhorada com Deslocação, a restrição  $b < x_{jt}$ , ou seja, que a posição em que estamos a tentar atracar o navio  $i$  seja inferior à posição do navio  $j$  que iremos mover. Esta restrição é adicionada para limitar os movimentos dos navios a situações a que o navio que pretende atracar “quase” caiba no espaço em questão e para que os espaços vazios no meio do cais sejam ocupados assim que possível.

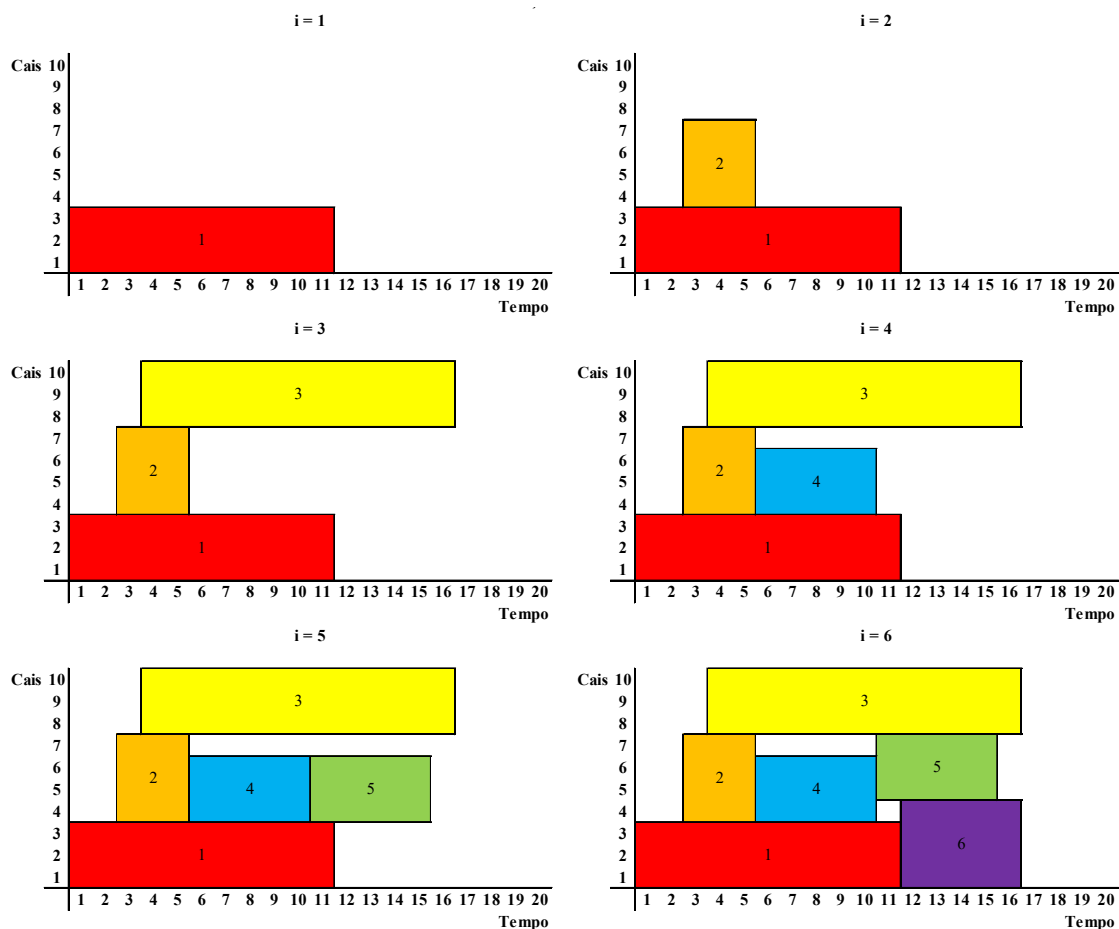


Figura 5 - Ilustração da aplicação da heurística *Bottom-Left* Melhorada com deslocação condicionada à instância apresentada na Tabela 1.

Através da Figura 5 é possível observar as diferenças da aplicação desta heurística comparativamente às heurísticas apresentadas anteriormente. A maior diferença está relacionada com o movimento do navio 1 que não é movido nesta heurística, mas que nas heurísticas anteriores era movido duas vezes. Os navios 4 e 5 atracam após o seu instante de chegada, no primeiro instante em que há secções livres consecutivas que lhes permitem atracar (passo 11). O navio 6 tenta atracar na secção 1 no instante 6, porque é o primeiro instante em que há secções livres (não consecutivas) no cais que correspondem ao seu comprimento. Nesta fase, a heurística observa que o ataque na secção 1 faz conflito com o navio 5 numa secção e move o navio 5 uma secção acima para que seja possível o ataque do navio 6 na secção 1 (passo 15). Este movimento apenas é permitido porque o navio 6 tenta atracar na secção 1 e o navio 5 se encontra atracado na secção 4. A heurística com deslocação condicionada apresenta, nesta instância, melhores resultados do que ambas as heurísticas anteriores, tendo menos 1 instante de tempo que a heurística com deslocação e menos 4 que a heurística sem deslocação.

## 5. Apresentação de Resultados

Nesta secção serão apresentados os resultados das três formulações desenvolvidas (Formulação do *BAP* tradicional, Formulação do *BAP* com deslocação e Formulação alternativa do *BAP* com deslocação), e das três heurísticas criadas (*Bottom-Left* Melhorada, *Bottom-Left* Melhorada com deslocação e *Bottom-Left* Melhorada com deslocação condicionada). O software utilizado para obter os resultados foi o *FICO Xpress IVE* Versão 9.2.5 e o computador utilizado tem um processador Intel® Core™ i5-7200U CPU @ 2.50GHz e memória RAM de 4GB.

Foram utilizados três conjuntos de instâncias, gerados aleatoriamente por um algoritmo que recorre a um processo de *Poisson* para determinar o instante de chegada dos navios. O primeiro conjunto, de agora em diante denominado como instâncias iniciais, contém instâncias de menor dimensão (entre 6 e 15 navios) com 10 instâncias diferentes para cada número de navios, perfazendo um total de 100 instâncias. Este conjunto de instâncias é o mesmo utilizado em Rodrigues (2024). O segundo conjunto, instâncias modificadas, geradas para este TFM, é semelhante ao apresentado anteriormente, mas no gerador foi utilizada uma maior taxa de chegada ( $\lambda$ ) do processo de *Poisson*, para que as chegadas dos navios sejam mais próximas e se gere assim mais congestionamento no porto. São também utilizadas 100 instâncias contendo entre 6 e 15 navios. O terceiro conjunto, instâncias de maior dimensão, contém, tal como o nome indica, instâncias de maior dimensão (com 40, 60 e 80 navios). Neste conjunto existem 5 instâncias diferentes para cada número de navios, perfazendo assim um total de 15 instâncias.

Cada instância fornece informação relativamente ao instante de chegada, ao comprimento e ao tempo de processamento de cada navio. O tamanho do cais não varia entre os conjuntos de instâncias e contém 21 secções de atraque, o horizonte temporal varia entre instâncias. Para as instâncias de menor dimensão foram considerados 120 instantes, onde cada instante corresponde a 1 hora, obtendo-se assim um horizonte temporal de 5 dias. Nas instâncias de maior dimensão foram usados 240 instantes, 10 dias. Nas formulações e nas heurísticas, é considerada 1 unidade temporal e espacial nas respetivas folgas. Além disso, nas formulações e heurísticas com deslocação, é considerado 1 instante como tempo de deslocação entre secções. Relativamente às heurísticas, a sequência de inserção considerada baseia-se na regra *First Come First Served*, sendo os navios atracados pela ordem a que chegam ao cais.

### 5.1. Comparação de Formulações

Nesta secção será apresentada a comparação entre os resultados obtidos através da formulação sem deslocação e os resultados obtidos através das formulações com deslocação. As formulações apenas são aplicadas às instâncias de menor dimensão (instâncias iniciais e instâncias

modificadas), porque não é possível obter o valor ótimo em tempo útil nas instâncias de maior dimensão. São inicialmente apresentados os resultados para as instâncias iniciais e de seguida os resultados para as instâncias modificadas.

Dentro de cada conjunto de instâncias, será também estudada uma segunda variante do problema, que pretende testar os benefícios da deslocação num cenário mais real. Neste cenário, consideram-se dois tipos de navios, navios já atracados no início do horizonte temporal e navios que irão chegar durante o horizonte temporal (Lee & Chen, 2009). Para tal, fixa-se o navio 1 na posição 9, para observar como é que a formulação com deslocação se comporta, comparativamente à formulação sem deslocação. Na formulação com deslocação, todos os navios, incluindo o que já se encontra atracado, podem ser deslocados.

Os valores ótimos obtidos através das formulações com deslocação são apresentados na forma de *gap* relativamente aos valores ótimos obtidos pela formulação sem deslocação, de modo a facilitar a observação dos resultados. O *GAP* é calculado da seguinte forma:

$$GAP = \frac{Z_{com\ deslocação}^* - Z_{sem\ deslocação}^*}{Z_{sem\ deslocação}^*} \times 100$$

onde  $Z_{com\ deslocação}^*$  representa o valor ótimo obtido pela formulação com deslocação e  $Z_{sem\ deslocação}^*$  o valor ótimo obtido pela formulação sem deslocação.

Nas tabelas presentes nesta secção, cada linha representa um grupo de instâncias com  $N$  navios e contém a média dos valores ótimos, dos tempos de obtenção de resultados e dos *GAPs*. Quando não são apresentadas linhas referentes a todos os grupos de instâncias significa que nas instâncias em falta o tempo de obtenção de resultados foi muito elevado para as formulações com deslocação.

### 5.1.1. Resultados das Instâncias Iniciais

Aplicando as formulações às instâncias iniciais, são obtidos os resultados apresentados na Tabela 2. Nessa tabela não são apresentados os valores ótimos de cada formulação pois em todas as instâncias as três formulações apresentam o mesmo resultado. Assim, é apresentado apenas o tempo de obtenção de resultados por apresentar valores bastante distintos para cada formulação.

Tabela 2 - Tempo médio das formulações para as instâncias iniciais.

<i>N</i>	Valor Ótimo	Tempo de Obtenção de Resultados (em segundos)		
		Formulação do <i>BAP</i> tradicional	Formulação do <i>BAP</i> com deslocação	Formulação alternativa do <i>BAP</i> com deslocação
6	251	3	4	0
7	251	0	23	1
8	270	3	72	4
9	345	1	69	7
10	363	3	125	44
11	426	5	5163	1795
<b>Média</b>	<b>318</b>	<b>2</b>	<b>909</b>	<b>308</b>

Observando os tempos médios de obtenção de resultados é possível verificar que a formulação do *BAP* tradicional apresenta menores tempos que as formulações com deslocação. O tempo de obtenção de resultados aumenta substancialmente na Formulação do *BAP* com deslocação, devido à adição de variáveis binárias e restrições que permitem essa deslocação entre secções, o que leva a um aumento da complexidade computacional da formulação. No entanto, é possível observar que a formulação alternativa do *BAP* com deslocação permite obter os mesmos resultados que a Formulação do *BAP* com deslocação num período de tempo muito mais curto.

No entanto, tal como foi mencionado, as três formulações obtêm o mesmo valor ótimo e isto deve-se ao facto das instâncias em questão apresentarem uma baixa taxa de chegada dos navios, não criando congestionamento suficiente para que a deslocação seja benéfica ao problema. Assim, para se ver o benefício da possibilidade de deslocação é necessário utilizar instâncias com mais congestionamento, isto é, ou com um maior número de navios ou com uma maior taxa de chegada de navios. Contudo ao fazer isso, deixa de ser possível resolver o problema em tempo útil, devido à sua complexidade computacional. Até mesmo na formulação alternativa do *BAP* com deslocação a obtenção de resultados é demorada devido ao facto de nesta formulação o número de navios ser duplicado.

#### 5.1.1.1. Resultados Considerando Navios já Atracados

Considerando navios já atracados, ou seja, o navio 1 fixo na posição 9 desde o seu instante de chegada, e comparando os resultados obtidos pela formulação com e sem deslocação, são obtidos resultados diferentes. Apenas foi utilizada a formulação alternativa do *BAP* com deslocação por obter resultados mais rapidamente.

Tabela 3 - Resultados obtidos através das formulações para as instâncias iniciais, considerando o navio 1 já atracado.

N	Valor ótimo obtido pela Formulação do <i>BAP</i> tradicional	Formulação alternativa do <i>BAP</i> com deslocação		
		<i>GAP</i> (%)	Número de melhorias	Tempo de obtenção de resultados (em segundos)
6	251	0,0%	0	0
7	253	-0,6%	1	0
8	275	-1,5%	4	2
9	350	-1,1%	3	6
10	366	-0,5%	3	55
11	428	-0,5%	4	8289
<b>Média</b>	<b>320</b>	<b>-0,7%</b>	<b>3</b>	<b>1392</b>

Através da análise da Tabela 3, é possível verificar que ao considerar navios atracados, a deslocação já se torna benéfica para o problema. Foram utilizadas 60 instâncias, entre 6 e 11 navios, e houve 15 instâncias nas quais a formulação com deslocação apresentou melhores resultados do que a formulação sem deslocação. O único conjunto de instâncias onde não houve melhorias foi o conjunto que considera apenas 6 navios. Considerar navios atracados pode bloquear posições estratégicas visto que o seu atraque não foi otimizado inicialmente. Neste caso, a deslocação pode ajudar na reorganização do cais, evitando conflitos e originando assim melhores resultados.

### 5.1.2. Resultados das Instâncias Modificadas

As instâncias modificadas, apresentam uma maior taxa de chegada do que as instâncias iniciais. No entanto a comparação entre formulações também não apresenta diferenças, pelo que na Tabela 4 não são apresentados os valores ótimos de cada formulação pois em todas as instâncias as duas formulações apresentam o mesmo resultado.

Apenas foi utilizada a formulação alternativa do *BAP* com deslocação por obter resultados mais rapidamente. Devido ao maior congestionamento nestas instâncias, houve necessidade de limitar o tempo de obtenção de resultados a 1800 segundos (30 minutos) porque a formulação com deslocação demora bastante tempo a alcançar o seu valor ótimo. Os valores ótimos e tempos computacionais apresentados na tabela correspondem apenas às instâncias resolvidas até à otimalidade no tempo limite estipulado.

Tabela 4 - Tempo médio das formulações para as instâncias modificadas.

N	Número de instâncias que atingiram o valor ótimo (nos 1800 segundos)	Valor Ótimo	Tempo de Obtenção de Resultados (em segundos)	
			Formulação do BAP tradicional	Formulação alternativa do BAP com deslocação
6	10/10	221	0	0
7	10/10	223	0	9
8	8/10	230	0	22
9	7/10	305	0	55
10	7/10	347	0	367
11	1/3	357	0	751
<b>Média</b>	-	<b>281</b>	<b>0</b>	<b>201</b>

Analisando os resultados obtidos pela aplicação das formulações nas instâncias modificadas, é possível concluir que o aumento da taxa de chegada nas instâncias em questão, não foi suficiente para que a deslocação fosse benéfica para o problema.

#### 5.1.2.1. Resultados Considerando Navios já Atracados

Consideremos agora, tal como na Secção 5.1.1.1., o caso em que o navio 1 se encontra fixo na posição 9 desde o seu instante de chegada. Na Tabela 5 são apresentados os *GAPs* relativamente ao valor ótimo da formulação sem deslocação. Como estas instâncias apresentam maior congestionamento, foi necessário, tal como na secção anterior, impor um limite de tempo de 1800 segundos para a obtenção de resultados. Foi também apenas utilizada a formulação alternativa do *BAP* com deslocação por ser mais rápida a obter resultados.

Tabela 5 - Resultados obtidos através das formulações para as instâncias modificadas, considerando o navio 1 já atracado.

N	Número de instâncias que atingiram o valor ótimo (nos 1800 segundos)	Valor ótimo obtido pela Formulação do BAP tradicional	Formulação alternativa do BAP com deslocação		
			GAP (%)	Número de melhorias	Tempo de obtenção de resultados (em segundos)
6	10/10	221	0,0%	0	0
7	10/10	226	-1,0%	4	4
8	9/10	231	-1,5%	4	33
9	7/10	309	-0,7%	2	67
10	6/10	352	-0,9%	2	241
11	5/10	377	-1,4%	3	131
<b>Média</b>	-	<b>286</b>	<b>-0,9%</b>	<b>3</b>	<b>79</b>



Observando os *GAPs* que constam na Tabela 5 e comparando-os com os *GAPs* da Tabela 3 referentes às instâncias iniciais, é possível verificar que nas instâncias modificadas as formulações com deslocação apresentam melhores resultados. Tal pode ser justificado pelo maior congestionamento causado pela maior taxa de chegada dos navios, que faz com que se obtenha um *GAP* superior em todos os  $N$ , exceto no  $N = 6$ , que em ambos os conjuntos de instâncias apresentam um *GAP* de 0,0%. Nas instâncias modificadas foram utilizadas 60 instâncias nas quais 21 obtiveram melhores resultados com a formulação com deslocação.

## 5.2. Comparação de Heurísticas

Esta secção apresenta a comparação entre os resultados obtidos através da formulação sem deslocação e os resultados obtidos através das três heurísticas em estudo: *BL* Melhorada (*BLM*), *BL* Melhorada com deslocação (*BLM* com deslocação) e *BL* Melhorada com deslocação condicionada (*BLM* com deslocação condicionada). É feita a comparação com a formulação sem deslocação porque, em instâncias com maior congestionamento, as heurísticas são a alternativa às formulações com deslocação para obter resultados para o problema em tempo útil. Serão aplicadas as heurísticas aos três conjuntos de instâncias em estudo.

Tal como na comparação das formulações, também aqui os valores obtidos através das heurísticas são apresentados em forma de *gap* relativamente aos valores ótimos, de modo a facilitar a observação dos resultados. O *GAP* é calculado da seguinte forma:

$$GAP = \frac{Z_{heurística} - Z_{sem deslocação}^*}{Z_{sem deslocação}^*} \times 100$$

onde  $Z_{heurística}$  representa o valor obtido pela heurística e  $Z_{sem deslocação}^*$  o valor ótimo obtido pela formulação sem deslocação.

Nas tabelas referentes às instâncias de menor dimensão (instâncias iniciais e instâncias modificadas), cada linha representa um grupo de instâncias com  $N$  navios, tendo sido feita a média dos valores ótimos e dos *GAPs*.

### 5.2.1. Resultados das Instâncias Iniciais

Na Tabela 6 é apresentada a comparação entre o valor ótimo obtido pela formulação do *BAP* tradicional e os valores obtidos através das heurísticas, nas instâncias iniciais.

Tabela 6 - Resultados obtidos pelas heurísticas para as instâncias iniciais.

N	Formulação do <i>BAP</i> tradicional		GAP (%)		
	Valor ótimo	Tempo de obtenção de resultados (em segundos)	Heurística <i>BL</i> Melhorada	Heurística <i>BL</i> Melhorada com deslocação	Heurística <i>BL</i> Melhorada com deslocação condicionada
6	251	0	0,4%	0,4%	0,4%
7	251	0	0,5%	0,5%	0,5%
8	270	0	0,9%	0,7%	0,4%
9	345	0	0,7%	0,6%	0,3%
10	363	0	0,6%	0,6%	0,5%
11	426	0	1,3%	1,2%	1,3%
12	455	1	3,3%	3,5%	2,3%
13	500	1	1,8%	1,6%	1,0%
14	539	12	5,3%	5,3%	4,7%
15	541	51	3,6%	3,6%	3,7%
<b>Média</b>	<b>394</b>	<b>7</b>	<b>1,8%</b>	<b>1,8%</b>	<b>1,5%</b>

Analisando os resultados presentes na Tabela 6 é possível concluir que a heurística, quando aplicada às instâncias iniciais, não obtém melhores resultados que a formulação do *BAP* tradicional.

Analisando as 100 instâncias, podemos verificar que as heurísticas nunca obtêm melhores resultados que a formulação, as heurísticas *BLM* e *BLM* com deslocação obtêm o mesmo resultado que a formulação em 40 instâncias e a heurística *BLM* com deslocação condicionada obtém o mesmo resultado em 47. Relativamente à heurística sem deslocação, a heurística *BLM* com deslocação obtém o mesmo resultado em 87 instâncias e melhores resultados em apenas 10, enquanto que a heurística *BLM* com deslocação condicionada obtém o mesmo resultado da *BLM* em 53 instâncias e melhores resultados em 30 instâncias. Comparando agora as heurísticas com deslocação, a *BLM* com deslocação condicionada obtém o mesmo resultado que a *BLM* com deslocação em 54 instâncias e melhores resultados em 31.

Os tempos de obtenção de resultados das heurísticas não foram apresentados pois nenhuma das instâncias ultrapassou um segundo.

## 5.2.2. Resultados das Instâncias Modificadas

Na Tabela 7 é apresentada a comparação entre o valor ótimo obtido pela formulação do *BAP* tradicional e os valores obtidos através das heurísticas nas instâncias modificadas. Não são apresentadas linhas referentes a todos os grupos de instâncias porque nas instâncias em falta ( $N = 14$  e  $N = 15$ ) o tempo de obtenção de resultados com a formulação sem deslocação foi muito elevado.

Tabela 7 - Resultados obtidos pelas heurísticas para as instâncias modificadas.

<i>N</i>	Formulação do <i>BAP</i> tradicional		<i>GAP</i> (%)		
	Valor ótimo	Tempo de obtenção de resultados (em segundos)	Heurística <i>BL</i> Melhorada	Heurística <i>BL</i> Melhorada com deslocação	Heurística <i>BL</i> Melhorada com deslocação condicionada
6	221	0	0,3%	0,3%	0,3%
7	223	0	1,4%	1,3%	1,3%
8	228	0	4,5%	4,1%	3,9%
9	315	0	3,4%	3,4%	3,0%
10	332	0	2,2%	2,2%	2,3%
11	410	2	3,1%	2,8%	4,2%
12	446	25	4,8%	4,9%	5,0%
13	503	297	4,4%	4,4%	4,0%
<b>Média</b>	<b>335</b>	<b>41</b>	<b>3,0%</b>	<b>2,9%</b>	<b>3,0%</b>

Conforme analisado na secção anterior, também nas instâncias modificadas não são obtidos melhores resultados nas heurísticas, relativamente à formulação. Assim sendo, o aumento da taxa de chegada nas instâncias modificadas não foi suficiente para tornar a deslocação um aspeto benéfico para a resolução do problema.

Analisando as 80 instâncias em causa, podemos verificar que as heurísticas nunca obtêm melhores resultados que a formulação, as heurísticas *BLM* e a *BLM* com deslocação obtêm o mesmo resultado que a formulação em 24 instâncias e a heurística *BLM* com deslocação condicionada obtêm melhores resultados em 27. Relativamente à heurística sem deslocação, a heurística *BLM* com deslocação obtém o mesmo resultado em 73 instâncias e melhores resultados em apenas 5, enquanto que a heurística *BLM* com deslocação condicionada obtém o mesmo resultado da *BLM* em 47 instâncias e melhores resultados em 15 instâncias. Comparando agora as heurísticas com deslocação, a *BLM* com deslocação condicionada obtém o mesmo resultado que a *BLM* com deslocação em 48 instâncias e melhores resultados em 14.

Os tempos de obtenção de resultados das heurísticas não foram apresentados pois nenhuma das instâncias ultrapassou os dois segundos.

### 5.2.3. Resultados das Instâncias de Maior Dimensão

Na Tabela 8 é apresentada a comparação entre o valor obtido pela Formulação do *BAP* tradicional e os valores obtidos através das heurísticas para as instâncias de maior dimensão. Nestas instâncias não foi possível obter a solução ótima da formulação em tempo útil e por isso é apresentado o valor obtido com uma limitação temporal de 1800 segundos, 30 minutos.

Tabela 8 - Resultados das heurísticas para as instâncias de maior dimensão.

Instância	Valor obtido pela Formulação do <i>BAP</i> tradicional (em 1800 segundos)	Heurística <i>BL</i> Melhorada		Heurística <i>BL</i> Melhorada com deslocação		Heurística <i>BL</i> Melhorada com deslocação condicionada	
		<i>GAP</i> (%)	Tempo (segundos)	<i>GAP</i> (%)	Tempo (segundos)	<i>GAP</i> (%)	Tempo (segundos)
R 40 1	3251	3,7%	1	4,4%	2	-6,5%	1
R 40 2	3452	4,1%	1	0,1%	1	0,1%	1
R 40 3	3479	0,5%	1	0,5%	1	-0,3%	2
R 40 4	4017	-0,7%	1	1,0%	1	3,0%	1
R 40 5	3898	0,3%	1	0,3%	1	1,6%	1
R 60 1	7434	-3,6%	2	-3,3%	2	-6,9%	2
R 60 2	7084	-4,4%	1	-4,4%	2	-2,2%	2
R 60 3	7052	-4,7%	1	-4,0%	2	-3,9%	2
R 60 4	8771	-7,8%	1	-8,8%	2	-11,3%	2
R 60 5	7137	-8,4%	1	-8,4%	2	-9,6%	2
R 80 1	13860	-6,9%	2	-6,5%	2	-6,7%	2
R 80 2	10648	-4,2%	2	-2,9%	2	-4,2%	2
R 80 3	12412	-6,1%	2	-7,2%	2	-6,8%	2
R 80 4	12095	-3,9%	2	-4,2%	4	-4,2%	2
R 80 5	11721	-0,3%	2	-1,1%	2	-0,1%	3
<b>Média</b>	<b>7754</b>	<b>-2,8%</b>	<b>1</b>	<b>-3,0%</b>	<b>2</b>	<b>-3,9%</b>	<b>2</b>

Através da análise da Tabela 8 podemos verificar que nas instâncias de dimensão superior, já são obtidos melhores resultados através das heurísticas do que através da formulação com tempo limite. Estes resultados indicam então que a deslocação é benéfica para o problema quando o congestionamento é elevado devido ao grande número de navios considerado.

As três heurísticas apresentam melhores resultados nas instâncias cujo número de navios é igual ou superior a 60. No entanto, a heurística *BLM* com deslocação condicionada já apresentava melhores resultados em algumas instâncias com 40 navios. A heurística *BLM* com deslocação condicionada apresenta melhores resultados do que a *BLM* com deslocação em 8 instâncias. Relativamente à heurística sem deslocação, a *BLM* com deslocação apresenta melhores resultados em 5 instâncias e a *BLM* com deslocação condicionada em 9.

A heurística *BLM* e a heurística *BLM* com deslocação irão obter os mesmos resultados em situações em que a segunda heurística não recorre à deslocação. Como é possível verificar que a heurística *BLM* com deslocação apresenta melhores resultados em 5 instâncias, é possível garantir que estes melhores resultados se devem à possibilidade de deslocação.

## 6. Conclusão

Neste TFM foi apresentado um estudo relativo ao benefício da possibilidade de deslocação de navios no *Berth Allocation Problem*. O *BAP* tradicional consiste em alocar um conjunto de navios ao longo de um cais da maneira mais eficiente possível e não considera a possibilidade de os deslocar após o seu atracamento. A deslocação consiste em deslocar navios já atracados para outra secção de modo a libertar espaço para navios que estejam à espera para atracar, tentando assim diminuir o tempo total de permanência dos navios no porto.

Inicialmente, foram desenvolvidos métodos exatos para a resolução do problema. São apresentadas formulações em programação linear inteira mista baseadas em Guan & Cheung (2004). São apresentadas duas formulações sem deslocação, que servem de base para a obtenção de duas novas formulações com deslocação, a formulação do *BAP* com deslocação e formulação alternativa do *BAP* com deslocação. A primeira formulação com deslocação apresenta tempos de obtenção de resultados muito elevados, pelo que houve necessidade de criar a segunda formulação com deslocação. A formulação alternativa do *BAP* com deslocação efetua uma divisão dos navios em primeiro atracamento e deslocação entre secções, e obtém resultados com uma maior rapidez devido à sua menor complexidade computacional.

No entanto, no problema em questão, não é possível obter resultados em tempo útil através de métodos exatos, pelo que para analisar instâncias com maior número de navios houve necessidade de desenvolvimento de heurísticas. As heurísticas desenvolvidas baseiam-se na heurística de Rodrigues (2024) e são elas: a heurística *BLM* com deslocação e a heurística *BLM* com deslocação condicionada. A *BLM* com deslocação é obtida através da adição à *BLM* da possibilidade de deslocação de navios, quando não é possível atracar de outro modo num dado instante. A heurística *BLM* com deslocação condicionada, acrescenta ainda à anterior que um navio apenas pode ser movido quando o navio que tenta atracar tem uma posição de atracamento menor à sua, fazendo com que haja menos movimentos desnecessários de navios e que sejam preenchidos espaços em branco presentes no meio do diagrama.

De modo a obter resultados e retirar conclusões, foram utilizados três conjuntos de instâncias com diferentes características. As formulações com deslocação obtiveram resultados melhores que a formulação sem deslocação quando se considerou um cais com navios já atracados. Ao considerar navios já atracados podemos estar a bloquear posições estratégicas e neste caso a deslocação ajuda na reorganização do cais, evitando conflitos. As heurísticas obtiveram melhores resultados que a formulação sem deslocação (considerando um limite temporal de 1800 segundos) quando aplicadas a instâncias de maior dimensão. É então possível concluir que a deslocação é benéfica para o problema em situações que apresentem elevado

congestionamento, alta taxa de chegada de navios ou elevado número de navios, e situações que considerem navios previamente atracados no cais.

Em investigações futuras propõe-se a aplicação da deslocação entre navios a problemas com incerteza, podendo ser uma característica útil para desimpedir secções no cais quando os navios chegam fora do tempo previsto. Relativamente à penalização associada à deslocação, propõe-se que o seu cálculo seja aprimorado, de modo a contemplar a distância percorrida entre secções, o comprimento do navio, a sua carga e outras características que possam impactar esta penalização.

## Referências Bibliográficas

- Bierwirth, C., & Meisel, F. (2010). A survey of berth allocation and quay crane scheduling problems in container terminals. *European Journal of Operational Research*, 202(3), 615–627. <https://doi.org/10.1016/J.EJOR.2009.05.031>
- Brown, G. G., Cormican, K. J., Lawphongpanich, S., & Widdis, D. B. (1997). Optimizing submarine berthing with a persistence incentive. *Naval Research Logistics*, 44, 301–318. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1520-6750\(199706\)44:4](https://doi.org/10.1002/(SICI)1520-6750(199706)44:4)
- Brown, G. G., Lawphongpanich, S., & Thurman, K. P. (1994). Optimizing ship berthing. *Naval Research Logistics*, 41(1), 1–15. [https://doi.org/10.1002/1520-6750\(199402\)41:1<1::AID-NAV3220410102>3.0.CO;2-L](https://doi.org/10.1002/1520-6750(199402)41:1<1::AID-NAV3220410102>3.0.CO;2-L)
- Cheong, C. Y., & Tan, K. C. (2008). A multi-objective multi-colony ant algorithm for solving the berth allocation problem. *Studies in Computational Intelligence*, 116, 333–350. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-78297-1\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-540-78297-1_16)
- Golias, M., Boile, M., & Theofanis, S. (2007). The berth allocation problem: A formulation reflecting time window service deadlines. *48th Annual Transportation Research Forum 2007*, 1, 527–547.
- Golias, M. M., Saharidis, G. K., Boile, M., Theofanis, S., & Ierapetritou, M. G. (2009). The berth allocation problem: optimizing vessel arrival time. *Maritime Economics and Logistics*, 11(4), 358–377. <https://doi.org/10.1057/mel.2009.12>
- Guan, Y., & Cheung, R. K. (2004). The berth allocation problem: models and solution methods. *OR Spectrum*, 26(1), 75–92. <https://doi.org/10.1007/s00291-003-0140-8>
- Hansen, P., Oğuz, C., & Mladenović, N. (2008). Variable neighborhood search for minimum cost berth allocation. *European Journal of Operational Research*, 191(3), 636–649. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.12.057>
- Imai, A., Nishimura, E., & Papadimitriou, S. (2003). Berth allocation with service priority. *Transportation Research Part B: Methodological*, 37(5), 437–457. [https://doi.org/10.1016/S0191-2615\(02\)00023-1](https://doi.org/10.1016/S0191-2615(02)00023-1)
- Imai, A., Nishimura, E., & Papadimitriou, S. (2008). Berthing ships at a multi-user container terminal with a limited quay capacity. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 44(1), 136–151. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2006.05.002>



- Lee, Y., & Chen, C. Y. (2009). An optimization heuristic for the berth scheduling problem. *European Journal of Operational Research*, 196(2), 500–508. <https://doi.org/10.1016/J.EJOR.2008.03.021>
- Li, C. L., Cai, X., & Lee, C. Y. (1998). Scheduling with multiple-job-on-one-processor pattern. *IIE Transactions*, 30(5), 433–445. <https://doi.org/10.1080/07408179808966484>
- Lim, A. (1998). The berth planning problem. *Operations Research Letters*, 22(2–3), 105–110. [https://doi.org/10.1016/S0167-6377\(98\)00010-8](https://doi.org/10.1016/S0167-6377(98)00010-8)
- Lin, S. W., & Ting, C. J. (2014). Solving the dynamic berth allocation problem by simulated annealing. *Engineering Optimization*, 46(3), 308–327. <https://doi.org/10.1080/0305215X.2013.768241>
- Martin-Iradi, B., Pacino, D., & Ropke, S. (2024). An adaptive large neighborhood search heuristic for the multi-port continuous berth allocation problem. *European Journal of Operational Research*, 316(1), 152–167. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2024.02.003>
- Nishimura, E., Imai, A., & Papadimitriou, S. (2001). Berth allocation planning in the public berth system by genetic algorithms. *European Journal of Operational Research*, 131(2), 282–292. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(00\)00128-4](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(00)00128-4)
- Park, Y. M., & Kim, K. H. (2003). A scheduling method for berth and quay cranes. *OR Spectrum*, 25(1), 1–23. <https://doi.org/10.1007/s00291-002-0109-z>
- Rodrigues, F. (2024). Improved sequential insertion heuristics for berth allocation problems. *International Transactions in Operational Research*, 31(3), 1585–1608. <https://doi.org/10.1111/itor.13369>
- Rodrigues, F., & Agra, A. (2022). Berth allocation and quay crane assignment/scheduling problem under uncertainty: a survey. *European Journal of Operational Research*, 303(2), 501–524. <https://doi.org/10.1016/J.EJOR.2021.12.040>
- Ting, C. J., Wu, K. C., & Chou, H. (2014). Particle swarm optimization algorithm for the berth allocation problem. *Expert Systems with Applications*, 41(4), 1543–1550. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2013.08.051>
- Türkoğulları, Y. B., Taşkin, Z. C., Aras, N., & Altinel, I. K. (2014). Optimal berth allocation and time-invariant quay crane assignment in container terminals. *European Journal of Operational Research*, 235(1), 88–101. <https://doi.org/10.1016/J.EJOR.2013.10.015>

Zheng, H., Fan, X., & Tang, C. (2024). Integrated optimization of berth allocation problem with berth shifting strategies and ballast water management for dry bulk ports. *Ocean Engineering*, 309, 118430. <https://doi.org/10.1016/J.OCEANENG.2024.118430>