

Mestrado em
MÉTODOS QUANTITATIVOS PARA A DECISÃO ECONÓMICA
E EMPRESARIAL

PROJETO

**PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO E ROTEAMENTO COM MÚLTIPLOS
DEPÓSITOS E JANELAS TEMPORAIS: O CASO DA VORTEX**

LEONOR FRANCE RODRIGUES CARDOSO

Orientação: Professora Doutora Raquel Monteiro de Nobre Costa Bernardino

Documento especialmente elaborado para a obtenção do grau de mestre

JUNHO - 2026

Resumo

A entrega ao domicílio de eletrodomésticos de grandes dimensões é uma operação com forte impacto na satisfação do cliente. Este trabalho estuda o planeamento desta operação na Vortex¹, retalhista português que realiza cerca de 3000 entregas diárias a partir de uma rede de armazéns distribuídos pelo país. O planeamento envolve três decisões interligadas: que armazéns abrir, a que armazém afetar cada cliente e como desenhar as rotas, respeitando as janelas temporais dos clientes e a capacidade dos veículos. Formula-se assim um Problema de Localização e Roteamento com Múltiplos Depósitos e Janelas Temporais, designado V-LRP.

O problema é primeiro formulado como um modelo em Programação Linear Inteira Mista (PLIM), resolvido com o *Gurobi*. Por este só ser adequado a instâncias de pequena dimensão, não chegando a ser gerado em *Python* para um dia completo de operação, desenvolve-se uma metaheurística *Adaptive Large Neighborhood Search* com pesquisa local *Randomized Variable Neighborhood Descent*. Nas instâncias de teste, a metaheurística iguala ou supera as soluções obtidas pelo modelo de PLIM no tempo limite de 1800 segundos estipulado, com um desvio médio de $-0,36\%$ face ao seu limite superior, em tempos cerca de 85 vezes inferiores.

A metaheurística é aplicada a dois dias reais de operação, um de baixa procura e um de maior procura, com diferentes estruturas de custo. A análise distingue os armazéns que compensa manter em todos os cenários daqueles cuja seleção depende do dia e da estrutura de custos, e mostra que a decisão de abrir um armazém é determinada sobretudo pela sua localização, e não pelo seu custo de abertura. A comparação com a operação real revela que a rede atual está bem posicionada face à procura. Apresentados à Vortex, os resultados foram considerados coerentes com a operação atual, confirmando a abordagem proposta como uma ferramenta adequada de apoio à decisão no dimensionamento da sua rede.

Palavras-chave: Localização-roteamento; múltiplos depósitos; janelas temporais; metaheurística; *Adaptive Large Neighborhood Search*; entrega ao domicílio.

¹Nome fictício adotado por motivos de confidencialidade.

Abstract

Home delivery of large household appliances is an operation that largely impacts customer satisfaction. This work studies the planning of this operation at Vortex², a Portuguese retailer that carries out around 3000 deliveries per day from a network of warehouses spread across the country. The planning involves three interconnected decisions: which warehouses to open, which warehouse to assign each customer to, and how to design the routes, subject to customer time windows and vehicle capacity. This gives rise to a Location-Routing Problem with Multiple Depots and Time Windows, referred to as V-LRP.

The problem is first formulated as a Mixed-Integer Linear Programming (MILP) model, solved with *Gurobi*. As this approach is only suitable for small instances and cannot even be built in *Python* for a full day of operation, an Adaptive Large Neighborhood Search metaheuristic with Randomized Variable Neighborhood Descent local search is developed. On the test instances, the metaheuristic matches or improves on the solutions obtained by the MILP model within the imposed time limit of 1800 seconds, with an average deviation of -0.36% from its upper bound, in times roughly 85 times shorter.

The metaheuristic is applied to two real days of operation, one of low demand and one of higher demand, under different cost structures. The analysis distinguishes the warehouses worth keeping in all scenarios from those whose selection depends on the day and cost structure, and shows that the decision to open a warehouse is driven mainly by its location rather than its opening cost. The comparison with the real operation reveals that the current network is well positioned to serve demand. When presented to Vortex, the results were considered consistent with the current operation, confirming the proposed approach as a suitable decision-support tool for its network design.

Keywords: Location-routing; multiple depots; time windows; metaheuristic; Adaptive Large Neighborhood Search; home delivery.

²Fictitious name adopted for confidentiality reasons.

Conteúdo

Resumo	iii
Abstract	v
Agradecimentos	xv
1 Introdução	1
2 Revisão de Literatura	3
3 Apresentação do Problema	7
4 Descrição das Instâncias	9
5 Modelo em Programação Linear Inteira Mista	13
6 Resultados do Modelo em Programação Linear Inteira Mista	15
7 Metaheurística ALNS	17
7.1 O algoritmo ALNS proposto	17
7.2 Heurística construtiva	18
7.3 Pesquisa local: <i>Randomized Variable Neighborhood Descent</i>	19
7.3.1 Estruturas de vizinhança	19
7.3.2 Estratégia de exploração das vizinhanças e de pesquisa local	20
7.4 Operadores de destruição	21
7.5 Operadores de reparação	23
7.6 Seleção adaptativa de operadores e critério de aceitação	24
8 Resultados da Metaheurística ALNS	27
8.1 Afinação de parâmetros e análise de componentes	27
8.1.1 Afinação de parâmetros	27
8.1.2 Análise do impacto da pesquisa local e dos operadores	29
8.2 Resultados da Metaheurística ALNS	30
8.2.1 Instâncias de teste e desempenho face ao modelo de PLIM	31
8.2.2 Escalabilidade e aplicação ao caso real	32
8.2.2.1 Resultados do dia de baixa procura	33
8.2.2.2 Dia de maior procura e repartição em zonas	35
8.3 Síntese e implicações para a operação	40
9 Conclusões e Trabalho Futuro	43
Referências	45
Anexos	47

Lista de Figuras

1	Exemplo de uma solução admissível.	8
2	Distribuição dos clientes e armazéns abertos na instância PT-Março. Os marcadores a vermelho indicam armazéns existentes (E) e os marcadores a azul armazéns novos (N).	34
3	Distribuição dos clientes e armazéns abertos na instância PT-Março-armz60. Os marcadores a vermelho indicam armazéns existentes (E) e os marcadores a azul armazéns novos (N).	34
4	Fronteira (a vermelho) da divisão de Portugal Continental nas zonas Norte e Sul, traçada sobre o mapa de densidade de clientes da instância PT-Agosto.	36
5	Distribuição dos clientes e armazéns abertos na instância PT-Agosto. Os marcadores a vermelho indicam armazéns existentes (E) e os marcadores a azul armazéns novos (N).	39
6	Distribuição dos clientes e armazéns abertos na instância PT-Agosto-zonas. Os marcadores a vermelho indicam armazéns existentes (E) e os marcadores a azul armazéns novos (N).	39
7	Distribuição dos clientes e armazéns abertos na instância PT-Agosto-armz60-zonas. Os marcadores a vermelho indicam armazéns existentes (E) e os marcadores a azul armazéns novos (N).	39
8	Distribuição dos clientes de Castelo Branco no dia 23 julho de 2025. O marcador vermelho indica o armazém existente e os marcadores azuis os armazéns propostos.	47
9	Distribuição dos clientes de Porto, Aveiro e Coimbra no dia 9 de fevereiro de 2026. Os marcadores a vermelho indicam os armazéns existentes e os marcadores azuis os armazéns propostos.	47
10	Distribuição dos clientes de Braga e Porto no dia 9 de fevereiro de 2026. Os marcadores a vermelho indicam os armazéns existentes e os marcadores azuis os armazéns propostos.	47
11	Distribuição dos clientes de Portugal Continental no dia 9 de fevereiro de 2026. Os marcadores a vermelho indicam os armazéns existentes e os marcadores azuis os armazéns propostos.	47

Lista de Tabelas

1	Resumo da Notação.	7
2	Parâmetros utilizados nas instâncias de teste.	11
3	Parâmetros das instâncias à escala real.	12
4	Resultados obtidos pelo modelo em PLIM.	15
5	Resumo da calibração de parâmetros do ALNS.	28
6	Resumo dos parâmetros finais adotados no ALNS.	29
7	Análise de componentes do ALNS: impacto da remoção da pesquisa local e de cada operador.	30
8	Resultados da metaheurística sobre as instâncias de teste.	31
9	Resultados da metaheurística para o dia de baixa procura.	33
10	Armazéns abertos nas soluções do dia de baixa procura.	34
11	Comparação entre a afetação real dos clientes e a solução obtida, na instância PT-Março-armz60.	35
12	Comparação entre a afetação real e a solução obtida, por armazém de afetação real, na instância PT-Março-armz60.	35
13	Características das instâncias Ago-Norte, Ago-Sul, Ago-Norte-armz60 e Ago-Sul-armz60.	36
14	Resultados da metaheurística para dia de maior procura.	37
15	Armazéns abertos em cada instância para o dia de maior procura.	39
16	Comparação entre a afetação real dos clientes e a solução obtida, na instância PT-Agosto-armz60-zonas.	40
17	Comparação entre a afetação real e a solução obtida, por armazém de afetação real, na instância PT-Agosto-armz60-zonas.	40
18	Indicadores de dimensão e custo das soluções obtidas para as instâncias reais.	41
19	Seleção de cada armazém candidato nas soluções das instâncias reais.	41
20	Armazéns abertos em cada instância: Modelo em PLIM vs. Metaheurística.	48
21	Veículos por armazém — PT-Março.	48
22	Veículos por armazém — PT-Março-armz60.	48
23	Veículos por armazém — PT-Agosto.	48
24	Veículos por armazém — PT-Agosto-armz60.	48
25	Veículos por armazém — PT-Agosto-zonas.	49
26	Veículos por armazém — PT-armz60-zonas.	49
27	Distribuição dos clientes de cada armazém utilizado na vida real (linhas) pelos armazéns da solução obtida pela metaheurística (colunas), em percentagem. Instância PT-Março-armz60.	49
28	Distribuição dos clientes de cada armazém real (linhas) pelos armazéns da solução obtida pela metaheurística (colunas), em percentagem. Instância PT-Agosto-armz60-zonas.	49

Lista de Algoritmos

1	ALNS para o V-LRP.	18
2	Heurística Construtiva para o V-LRP.	19
3	Explora($S, \mathcal{N}, \delta_{\mathcal{N}}$).	20
4	RVND(S, δ, γ).	21
5	destroy_random(S, β) — remoção aleatória.	22
6	destroy_worst(S, β) — remoção dos piores clientes.	22
7	destroy_depot(S) — fecho de armazém.	22
8	destroy_worst_route(S) — remoção da pior rota.	22
9	destroy_sequence(S, β) — remoção de sequência.	23
10	repair_cheapest_noise(S, R, κ, η_0) — inserção mais barata com ruído.	23
11	repair_regret(S, R) — inserção com arrependimento.	24
12	repair_nearest_depot(S, R) — inserção com decisão de localização.	24

Agradecimentos

Agradeço à Professora Doutora Raquel Bernardino por toda a disponibilidade e tempo dedicado a este trabalho, pelo interesse demonstrado e pelo apoio e orientação que foram fundamentais ao longo deste percurso.

Agradeço também à minha família e amigos, cujo apoio foi essencial para a realização deste trabalho.

1 Introdução

A entrega ao domicílio é uma etapa incontornável na venda de grandes eletrodomésticos. Ao contrário da maioria dos bens de venda a retalho, estes artigos não são levados pelo cliente no momento da compra, tendo de ser transportados até sua casa. Por um lado, trata-se de uma operação dispendiosa, estimando-se que o transporte represente cerca de 10% do custo total de um produto [5]. Por outro, é a fase mais visível para o cliente, uma vez que o cumprimento dos prazos e das janelas de entrega acordadas influencia a sua satisfação e a perceção que tem da marca. É sobre esta etapa que incide o presente trabalho, tomando como caso de estudo a operação de distribuição da Vortex, nome fictício adotado por motivos de confidencialidade, retalhista português especializado em eletrodomésticos e eletrónica de consumo. A Vortex realiza diariamente cerca de 3000 entregas de artigos de grandes dimensões em todo o território nacional, recorrendo a uma transportadora que opera vários armazéns distribuídos pelo país, responsáveis pela receção e expedição das encomendas. A análise incide sobre as operações em Portugal Continental, onde se concentram cerca de 97% das entregas.

O planeamento desta operação envolve dois desafios interligados: definir as rotas que servem os clientes e decidir de que armazéns essas rotas partem. A localização dos armazéns condiciona as rotas possíveis, e o custo de cada rota depende do armazém de origem, pelo que os dois problemas se influenciam mutuamente. Esta rede de armazéns já existe, mas o trabalho explora também a abertura de armazéns em novas localizações, colocando as questões que o motivam:

1. Estará a rede atual bem dimensionada?
2. Que ganho traria abrir novos armazéns?

Para responder a estas questões, formula-se um Problema de Localização e Roteamento com Múltiplos Depósitos e Janelas Temporais aplicado ao caso da Vortex, problema a que se chama V-LRP ao longo deste trabalho, e que integra três decisões: que armazéns abrir, a que armazém afetar cada cliente e como desenhar as rotas, respeitando janelas temporais dos clientes e capacidade dos veículos. O V-LRP é NP-difícil, o que torna os métodos exatos inadequados à escala da Vortex. O modelo em Programação Linear Inteira Mista (PLIM) desenvolvido nem sequer chega a ser gerado para um dia completo de operação. Recorre-se, por isso, a uma metaheurística de *Adaptive Large Neighborhood Search* (ALNS) com pesquisa local *Randomized Variable Neighborhood Descent* (RVND), capaz de produzir soluções de qualidade para instâncias de grande dimensão em tempos computacionais mais reduzidos. Além de definir o problema, o modelo em PLIM serve de termo de comparação para avaliar a qualidade das soluções da metaheurística nas instâncias em que é possível resolvê-lo.

O contributo deste trabalho é uma ferramenta de apoio à decisão que permite à Vortex avaliar cenários de expansão da sua rede. Para cada cenário, identifica as localizações que minimizam a soma dos custos fixos de abertura com os custos de transporte, e testa diferentes estruturas de custo para perceber como estas alteram a configuração ótima da rede e a afetação dos clientes aos armazéns. A análise permite ainda comparar a alocação dos clientes adotada na operação real com a solução proposta pelo modelo.

O trabalho começa por rever a literatura sobre o problema de roteamento de veículos e as suas variantes, com foco na sua integração com decisões de localização e na metaheurística adotada, na Secção 2. A Secção 3 apresenta o problema da Vortex e a Secção 4 as instâncias utilizadas. Segue-se a formulação em PLIM na Secção 5 e os seus resultados sobre as instâncias de teste na Secção 6, que motivam o desenvolvimento da metaheurística. Esta é descrita em detalhe na Secção 7, enquanto a Secção 8 apresenta a calibração dos seus parâmetros, a avaliação do impacto da remoção de algumas componentes e a análise dos resultados, incluindo a aplicação ao caso real. Por fim, a Secção 9 reúne as principais conclusões e as direções para trabalho futuro.

2 Revisão de Literatura

O Problema de Roteamento de Veículos (*Vehicle Routing Problem*, VRP), introduzido por Dantzig e Ramser (1959) [4], consiste em determinar um conjunto de rotas de custo mínimo para uma frota de veículos que serve um conjunto de clientes a partir de um depósito, onde cada cliente tem uma procura que deve ser satisfeita exatamente uma vez, e cada veículo tem obrigatoriamente de partir e regressar ao depósito no final da sua rota [8].

Ao longo das últimas décadas, diversas variantes do VRP foram propostas para capturar a complexidade crescente dos cenários reais de distribuição [5, 8]. O VRP com Capacidade (CVRP) é a variante base do problema, caracterizando-se pelo serviço a clientes com procuras conhecidas através de uma frota de veículos de capacidade limitada [2, 12]. No CVRP, o objetivo é determinar um conjunto de rotas de custo mínimo que satisfaçam a totalidade da procura, garantindo que a carga transportada em cada rota não exceda os limites físicos de carga de cada veículo, isto é, a sua capacidade [2, 12]. O VRP com Janelas Temporais (VRPTW) acrescenta restrições sobre o instante de início do serviço a cada cliente, exigindo que cada visita ocorra dentro de uma janela temporal, ou seja, um intervalo de tempo pré-definido [8, 12]. Já o VRP com Múltiplos Depósitos (MDVRP) generaliza o problema ao considerar vários locais de partida e chegada – depósitos – para a frota de veículos [1]. Ao estender o problema VRPTW para cenários com múltiplos depósitos, obtém-se o problema de roteamento de veículos com janelas temporais e múltiplos depósitos (MDVRPTW). O MDVRPTW emula com maior rigor as condições operacionais de diversas empresas de distribuição, como é o caso da Vortex, empresa cuja rede de distribuição assenta em múltiplos armazéns, com entregas sujeitas a janelas temporais manhã/tarde (AM/PM) e frota com capacidade limitada, e que motiva o caso de estudo deste TFM.

Nos problemas com múltiplos depósitos, a literatura distingue a variante Fixa, onde as localizações dos depósitos são fixas *a priori*, da variante Localização, que integra a seleção estratégica de depósitos a partir de um conjunto de localizações potenciais [1].

Esta integração origina o Problema de Localização-Roteamento (*Location-Routing Problem*, LRP), que aborda a interdependência entre decisões de localização dos depósitos e de roteamento de veículos. No LRP, cada cliente deve ser visitado exatamente uma vez, cada veículo tem de voltar ao mesmo depósito de onde saiu, e as decisões de abertura de depósitos e de roteamento são tomadas em simultâneo de forma a minimizar o custo total.

Ao incorporar a decisão estratégica de localização no problema MDVRPTW, obtém-se o L-MDVRPTW, que visa minimizar o custo total do sistema através da resolução integrada de três níveis de decisão: a seleção dos depósitos, a atribuição de clientes a cada depósito e a definição de rotas sob o cumprimento de janelas temporais [1]. Assim, uma solução admissível do L-MDVRPTW é composta por um conjunto de depósitos abertos, uma afetação de cada cliente a um depósito aberto, e um conjunto de rotas por depósito, onde cada veículo parte e regressa ao mesmo depósito, cada cliente é visitado exatamente uma vez e a sua janela temporal é respeitada [13]. Neste TFM, o L-MDVRPTW é utilizado para explorar a expansão da rede de armazéns da Vortex em simultâneo com a otimização da operação de distribuição de eletrodomésticos de grandes dimensões.

Bektas et al. [1] propõem formulações compactas para o MDVRPTW, caracterizadas por terem um número polinomial de variáveis e restrições, avaliando-as tanto pela qualidade da sua relaxação linear como pelo tempo computacional necessário para resolver instâncias de referência da literatura. Entre as abordagens clássicas para a eliminação de subcircuitos revistas pelos autores, destacam-se os modelos de *Single Commodity Flow* e versões melhoradas das restrições de Miller-Tucker-Zemlin. Adicionalmente, o estudo explora formulações baseadas em correntes dos nodos (*node current*) e correntes dos arcos (*arc current*) para garantir que cada rota contenha exatamente um depósito.

Para instâncias de pequena e média dimensão, os modelos de PLIM permitem obter soluções ótimas

num tempo computacionalmente aceitável. No entanto, uma vez que o L-MDVRPTW pertence à classe de problemas NP-difíceis, a utilização de métodos exatos torna-se frequentemente impraticável em termos de memória ou tempo à medida que a dimensão das instâncias aumenta. Este desafio computacional motiva a utilização de abordagens heurísticas para encontrar soluções de boa qualidade de forma eficiente [1, 8].

Neste contexto, o ALNS, proposto originalmente por Ropke e Pisinger (2006) [9] como uma extensão do *Large Neighborhood Search* (LNS) de Shaw (1998) [11], tem-se afirmado como uma das abordagens mais eficazes e amplamente adotadas para resolver problemas de roteamento que exigem um elevado grau de flexibilidade e eficiência computacional [5, 12].

A premissa central desta metaheurística baseia-se na melhoria iterativa de uma solução através de um processo de destruição e reparação [12]. Em cada iteração, um operador de destruição retira um conjunto de clientes da solução corrente, criando «espaço livre» para que um operador de reparação os reinsira, reconstruindo a solução [12, 13]. O que diferencia o ALNS de outras abordagens é o seu mecanismo de seleção adaptativa que ajusta dinamicamente a probabilidade de escolha de cada operador com base no seu desempenho histórico ao longo da execução do algoritmo, permitindo que este se adapte às características específicas de cada instância [5, 12].

Numa revisão sistemática e meta-análise de 211 artigos publicados entre 2006 e 2023, Voigt [12] identificou e classificou 57 operadores de destruição e 42 operadores de reparação distintos aplicados a problemas de roteamento. Os resultados desta análise demonstram que os operadores de destruição baseados em sequências de clientes revelam-se como os mais eficazes. Relativamente à reparação, os operadores de reparação com visão de futuro (*foresight*), que consideram o impacto que a inserção de um cliente vai ter nas inserções subsequentes, tendem a produzir soluções de qualidade superior, especificamente a inserção com arrependimento (*regret insertion*) [12].

O algoritmo do ALNS começa por gerar uma solução admissível para o problema através de uma heurística construtiva [12]. No âmbito dos problemas de roteamento, as heurísticas construtivas assentam habitualmente em procedimentos de inserção gulosa (*greedy*), sendo a inserção mais barata (*cheapest insertion*) um dos métodos mais reportados na literatura para gerar uma solução admissível [3, 12, 13].

A eficácia do ALNS é frequentemente potenciada pela integração de uma fase de pesquisa local, destinada a refinar as soluções reconstruídas em cada iteração [5, 12]. Uma das abordagens mais consolidadas para este fim baseia-se na metaheurística do *Variable Neighborhood Descent* (VND), que assenta na exploração sistemática de múltiplas estruturas de vizinhança para escapar a ótimos locais [8]. A sua variante aleatória, o RVND, explora essas vizinhanças numa ordem aleatória, garantindo que a solução final seja um ótimo local em relação a todas as vizinhanças consideradas [5, 8]. De acordo com Gendreau e Potvin [6], esta abordagem reside no facto dos métodos de destruição e reparação definirem implicitamente uma vizinhança de grande dimensão, permitindo uma exploração mais vasta do espaço de soluções.

Um exemplo prático da aplicação desta metaheurística a um problema de roteamento é apresentado por Sacramento, Pisinger e Ropke [10], que utilizam o ALNS para resolver o Problema de Roteamento de Veículos com Drones (*Vehicle Routing Problem with Drones*). Trata-se de um problema que envolve decisões interdependentes, nomeadamente a alocação estratégica de clientes entre os veículos e a coordenação sincronizada de cada saída do drone, o que implica determinar pontos precisos de lançamento a partir da carrinha e locais de encontro para a sua recuperação. Estas operações ocorrem sob restrições físicas de capacidade e limites temporais, definidas tanto pela autonomia limitada da bateria do drone como pela duração máxima permitida para a rota diária do camião. Os resultados reportados revelam o bom desempenho do ALNS, que alcançou a solução ótima em 100% das instâncias pequenas testadas (até 12 clientes), igualando todos os resultados que o modelo em PLIM conseguiu

resolver. Em termos de eficácia, a metaheurística demonstrou-se muito superior, obtendo o valor ótimo em segundos, enquanto o modelo exato chegou a necessitar de quase 17 horas para resolver uma instância de 12 clientes. Este desempenho permitiu ao ALNS encontrar soluções de elevada qualidade para instâncias de grande dimensão (até 200 clientes) que o modelo exato não foi capaz de resolver em tempo útil, justificando a sua adoção neste trabalho para abordar o V-LRP.

Assim, este TFM aborda o V-LRP, que pode ser visto como uma variante do L-MDVRPTW, motivado por um caso de estudo real no setor da distribuição a retalho. A combinação de um modelo de PLIM, baseado nas formulações compactas de Bektas et al. [1], com uma abordagem metaheurística ALNS + RVND, permite obter soluções de boa qualidade para instâncias de menor dimensão e escalar eficientemente para instâncias de dimensão real. Adicionalmente, a análise de diferentes estruturas de custo entre instalações pré-existentes e novas localizações potenciais apoia a tomada de decisão estratégica em contexto empresarial.

3 Apresentação do Problema

A Vortex dispõe de um conjunto C de clientes que tem de servir por dia, que representam os pontos de entrega. Cada entrega corresponde a um serviço, e cada serviço a um cliente. Considera-se também o conjunto D de potenciais armazéns, de onde os veículos podem iniciar e terminar as suas rotas. Para isto, definimos o V-LRP num grafo orientado $G = (V, A)$, onde o conjunto $V = C \cup D$ agrega todos os nodos da rede, juntando os clientes e os depósitos, e o conjunto $A = \{(i, j) : i, j \in V, i \neq j\} \setminus \{(d_1, d_2) \in D, d_1 \neq d_2\}$ contém todas as ligações possíveis entre pares de nodos distintos, excluindo as ligações entre depósitos.

Cada cliente, ao agendar a entrega ao domicílio, pode escolher entre entrega de manhã ou de tarde, sendo estes períodos caracterizados, respetivamente, como AM e PM, e definidos da seguinte forma: das 8h00 às 14h00 e das 14h00 às 20h00. Assim, definimos a janela temporal do início da entrega de cada cliente $i \in C$ através do intervalo $[e_i, l_i]$ onde e_i corresponde à hora mínima de início da entrega, e l_i à hora máxima permitida para o início da entrega. Para uniformização das unidades, estes tempos serão expressos em minutos desde o início da operação, correspondendo o instante 0 às 8h00.

Representamos como c_{ij} o tempo, em minutos, de deslocação entre os nodos i e j , com $(i, j) \in A$. Adicionalmente, o parâmetro s_i corresponde ao tempo de serviço, em minutos, no cliente $i \in C$, isto é, o tempo que o veículo permanece parado a realizar a entrega ao cliente i .

Relativamente aos custos da operação, r_d representa o custo fixo de abertura, em unidades monetárias (u.m.), do armazém $d \in D$. O parâmetro b_d corresponde ao custo fixo de utilização, em u.m., de um veículo localizado no armazém $d \in D$. Por fim, k_d representa o número de veículos disponíveis no armazém $d \in D$.

Cada rota visita no máximo Q clientes, de modo a respeitar a capacidade do veículo e evitar a sobrecarga de trabalho do motorista.

As rotas começam às 8h00 no respetivo armazém, e terminam às 20h00. A partir das 20h00, os veículos ainda podem regressar ao armazém, mas não podem visitar mais clientes.

A Tabela 1 apresenta um resumo da notação introduzida até ao momento.

Tabela 1: Resumo da Notação.

Notação	Descrição
C	Conjunto dos clientes a visitar.
D	Conjunto dos armazéns.
V	Conjunto dos clientes e armazéns.
A	Conjunto dos arcos.
c_{ij}	Tempo de viagem entre os nodos i e j , com $(i, j) \in A$, em minutos.
s_i	Tempo de serviço no cliente $i \in C$, em minutos.
r_d	Custo fixo de abertura do armazém $d \in D$, em u.m..
b_d	Custo fixo de utilização de um veículo associado ao armazém $d \in D$, em u.m..
k_d	Número de veículos disponíveis no armazém $d \in D$, em unidades (número de veículos).
$[e_i, l_i]$	Janela temporal para o início da entrega do cliente $i \in C$, em minutos.
Q	Número máximo de clientes em cada rota, em unidades.

Para ilustrar o problema definido, considera-se uma instância composta por 10 clientes (nodos 1 a 10) e três armazéns potenciais (A, B ou C), cada um com dois veículos disponíveis. Dos 10 clientes, seis estão associados a janelas temporais no período AM, e quatro associados ao período PM. Cada rota pode atender até oito clientes.

A Figura 1 ilustra esta instância, e uma solução admissível para a mesma. Nos nodos de 1 a 10 estão representados os 10 clientes considerados, sendo os clientes AM representados pelos círculos

brancos e os clientes PM pelos círculos pretos. Os retângulos A, B e C representam os armazéns.

Esta solução admissível consiste em utilizar dois armazéns, o armazém A e o armazém B, saindo um veículo de cada um dos armazéns. Como podemos verificar na Figura 1, do armazém A sai um veículo que visita quatro clientes no período da manhã, seguidos de dois clientes no período da tarde, retornando ao armazém de partida depois do cliente final. Do armazém B sai um veículo que visita dois clientes no período da manhã, e dois no período da tarde, retornando, no final, ao armazém de partida. O armazém C não foi aberto nesta solução.

Nesta solução, todos os 10 clientes são visitados e assume-se que são cumpridas as respectivas janelas temporais de entrega. Cada veículo retornou ao armazém de origem, não foram utilizados mais veículos do que os existentes em cada armazém, e o limite de oito clientes por rota foi respeitado. Assim, estamos perante uma solução admissível do problema.

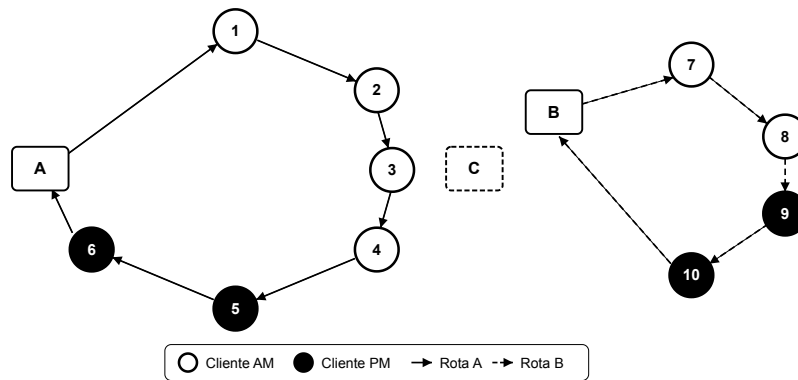


Figura 1: Exemplo de uma solução admissível.

4 Descrição das Instâncias

As instâncias utilizadas foram criadas com base em dados extraídos de registos reais de serviços de entrega ao cliente de artigos de grandes formatos. Numa primeira fase do tratamento dos dados, foram excluídos os serviços de recolha no cliente (devoluções), de recolha de equipamentos antigos, que são realizados em simultâneo com a entrega, os serviços de recolha em loja e os serviços de instaladores, por se tratar de serviços especializados tratados de forma independente. Foram ainda excluídos os serviços com janela temporal noturna, por serem em número muito reduzido (representando menos de 2% das entregas) e apenas estarem disponíveis em algumas zonas do país, ficando apenas os serviços com as janelas temporais AM e PM. De forma a garantir a confidencialidade dos dados, apenas foram extraídos os campos estritamente necessários para a geração das instâncias: a data de entrega, o código postal do cliente, o número do serviço e a janela temporal. Nenhum dado que identifique o cliente foi utilizado em qualquer fase do processo de recolha de dados e geração de instâncias.

De seguida, os códigos postais dos clientes foram convertidos em coordenadas geográficas através de um serviço de geocodificação da *Google*, implementado em *Python*. Neste mesmo processo, foram normalizadas as janelas temporais de entrega, sendo adicionadas colunas explícitas para o início e fim de cada janela. A matriz de distâncias entre todos os nodos de cada instância (clientes C e armazéns D) foi calculada com recurso à biblioteca *OSMnx* do *Python*, que utiliza a rede rodoviária real obtida do *OpenStreetMap*. Cada matriz foi calculada e guardada num ficheiro em formato *pickle* antes dos testes iniciarem para garantir a consistência das instâncias.

Adicionalmente, para a visualização das localizações dos clientes e depósitos, foi desenvolvido um mapa interativo utilizando a biblioteca *Folium* do *Python*. A densidade dos clientes é representada através de um mapa de calor, permitindo identificar visualmente as zonas de maior concentração de entregas, enquanto os armazéns são assinalados com marcadores individuais destacados. Apresentam-se estes mapas apenas para algumas das instâncias.

Um conjunto de instâncias foi gerado com base nas entregas do dia 23 de julho de 2025 no distrito de Castelo Branco. Estas são consideradas instâncias de pequena dimensão com quatro armazéns disponíveis, três deles novos (N) e um já existente (E): Covilhã (N), Centro Castelo Branco (N), Sul Castelo Branco (N) e o armazém existente da transportadora em Castelo Branco (E). Esta escolha foi feita com base no mapa de calor da Figura 8 no Anexo, composto por todos os clientes com entregas no distrito de Castelo Branco naquele dia. A instância **CB-15** inclui 15 clientes e a instância **CB-30** inclui 30, mantendo o mesmo conjunto de armazéns. Foi ainda gerada a instância **CB-30-armz50**, que altera a estrutura de custos dos armazéns relativamente à instância CB-30. As estruturas de custo utilizadas em cada instância são especificadas na Tabela 2. Para uma dimensão maior, a instância **CB-64** preserva os quatro armazéns e considera 64 clientes. Foram ainda consideradas duas estruturas de custos: **CB-64-armz50** e **CB-64-armz50/40**, esta última diferenciando o custo do armazém existente face aos restantes armazéns, para explorar o efeito de um armazém mais barato na decisão de localização e configuração das rotas.

O segundo conjunto de instâncias considera os distritos do Porto, Aveiro e Coimbra. A instância **PAC-92** é construída a partir dos 605 clientes destes três distritos com entregas agendadas para dia 9 de fevereiro de 2026. Para obter uma amostra representativa da distribuição dos clientes pelos distritos, foram selecionados aproximadamente 20% dos clientes de cada distrito. Os clientes podem ser servidos a partir de cinco armazéns disponíveis: Porto (E), Maia (E), Coimbra (E), Aveiro (N) e São João da Madeira (N). Os armazéns novos foram identificados através da visualização do mapa de calor da Figura 9, no Anexo, construído com todos os clientes do dia nos três distritos. Sobre esta instância foram geradas duas variantes de custos, **PAC-92-armz80** e **PAC-92-armz50**.

Foi ainda considerada uma instância de maior dimensão na região de Braga e Porto, designada

BP-118, e uma variante **BP-118-armz60**, obtidas considerando 25% dos 486 clientes agendados para o dia 9 de fevereiro de 2026 nos dois distritos, e considerando cinco armazéns disponíveis: Porto (E), Maia (E), Vila Real (E), São João da Madeira (N) e Braga (N). A escolha dos novos armazéns foi feita com a visualização do mapa de calor da Figura 10, no Anexo, construído com todos os clientes do dia com entregas nos dois distritos.

No terceiro conjunto de instâncias, procuram-se instâncias que representem as três grandes zonas do país: Norte, Centro e Sul. Todas estas instâncias têm como base o conjunto de clientes servidos no dia 9 de fevereiro de 2026. Os armazéns novos propostos para o conjunto de armazéns destas instâncias foram selecionados com base no mapa de calor da Figura 11, no Anexo, construído a partir dos 2235 clientes desse dia em Portugal Continental. A instância **Norte** considera 10% dos 781 clientes dos distritos de Viana do Castelo, Vila Real, Bragança, Braga, Porto, Aveiro, Viseu e Guarda. Os clientes podem ser servidos a partir de sete armazéns: Porto (E), Maia (E), Vila Real (E), Aveiro (N), São João da Madeira (N), Braga (N) e Viseu (N). A instância **Centro** é construída utilizando o mesmo procedimento, a partir de uma amostra de 10% de 883 clientes dos distritos de Coimbra, Castelo Branco, Leiria, Santarém, Lisboa e Portalegre. Os armazéns disponíveis para esta instância são Lisboa (E), MARL (E), Coimbra (E), Pombal (E), Castelo Branco (E) e Santarém (N). A instância **Sul** considera os 571 clientes dos distritos de Setúbal, Évora, Beja e Faro, mas neste caso são considerados 15% dos clientes para a dimensão desta instância ser semelhante às instâncias Norte e Centro. Estes clientes podem ser servidos por sete armazéns: Lisboa (E), MARL (E), Castelo Branco (E), Évora (E), Algarve (E), Beja (N) e Setúbal (N). Note-se que, apesar de os clientes dos distritos de Lisboa e Castelo Branco não estarem incluídos nesta instância, os respetivos armazéns foram mantidos por proximidade. Das instâncias Norte, Centro e Sul foram também consideradas as variantes **Norte-armz60**, **Centro-armz60** e **Sul-armz60**, respetivamente, que diferenciam o custo de abertura entre armazéns existentes e novos.

Finalmente, a instância **PT-224** é construída a partir dos 2235 clientes com entregas agendadas no dia 9 de fevereiro de 2026 em Portugal Continental, extraíndo aproximadamente 10% dos clientes servidos em cada distrito. Esta instância considera os 17 armazéns potenciais utilizados nas instâncias Norte, Centro e Sul. A variante **PT-224-armz60** apresenta o mesmo conjunto de clientes e armazéns, diferenciando o custo de abertura entre existentes e novos.

Para todas as instâncias mencionadas foi considerado um tempo de serviço fixo $s_i = 20$ minutos para cada cliente $i \in C$. Adicionalmente, o número máximo de clientes por rota foi definido como $Q = 20$, exceto na primeira instância CB-15, em que, devido à sua reduzida dimensão, se considerou $Q = 8$.

As características das instâncias de testes estão apresentadas na Tabela 2, nomeadamente o número de clientes ($|C|$), o número de armazéns potenciais ($|D|$), o número máximo de veículos em cada armazém (k_d), o custo fixo de abertura, em u.m., dos armazéns existentes ($r_d \text{ exist.}$), o custo de abertura, em u.m., dos armazéns novos ($r_d \text{ novos}$) e o custo fixo, em u.m., por veículo (b_d). Os parâmetros s_i e Q , por se manterem inalterados entre instâncias (excetuando na instância CB-15, como mencionado), não foram incluídos nesta tabela.

Tabela 2: Parâmetros utilizados nas instâncias de teste.

Instância	$ C $	$ D $	k_d	r_d exist.	r_d novos	b_d
CB-15	15	4	8	100	100	10
CB-30	30	4	8	100	100	10
CB-30-armz50	30	4	8	50	50	20
CB-64	64	4	8	100	100	10
CB-64-armz50	64	4	8	50	50	10
CB-64-armz50/40	64	4	8	40	50	10
PAC-92	92	5	8	100	100	10
PAC-92-armz80	92	5	8	80	100	10
PAC-92-armz50	92	5	8	50	100	10
BP-118	118	5	10	100	100	10
BP-118-armz-60	118	5	10	60	100	10
Norte	78	7	10	100	100	10
Norte-armz60	78	7	10	60	100	10
Centro	88	6	10	100	100	10
Centro-armz60	88	6	10	60	100	10
Sul	87	7	10	100	100	10
Sul-armz60	87	7	10	60	100	10
PT-224	224	17	10	100	100	10
PT-224-armz60	224	17	10	60	100	10

Às instâncias descritas até aqui designamos de instâncias de teste, construídas a partir de amostras de clientes e de dimensão controlada, usadas para calibrar a metaheurística e compará-la com o modelo de PLIM. Para avaliar a aplicação do modelo à escala real, consideram-se ainda dois dias completos de operação da Vortex, com o conjunto integral de clientes com entregas agendadas em Portugal Continental, sem qualquer amostragem, dando origem ao que chamamos de instâncias reais. Os critérios de tratamento e exclusão de serviços descritos no início desta secção aplicam-se igualmente a estas instâncias.

Os dois dias foram escolhidos por representarem alturas do negócio distintas. A instância **PT-Março** é constituída pelos clientes com entregas no dia 25 de março de 2026, e corresponde a um período de baixa procura, característico de uma fase calma do ano, em que o volume de entregas só é elevado pontualmente por efeito de alguma campanha. A instância **PT-Agosto** é constituída pelos clientes com entregas no dia 6 de agosto de 2025, e corresponde a um período de maior procura. No verão, a procura de grandes eletrodomésticos aumenta quer pela maior incidência de avarias associadas ao calor, quer pela maior disponibilidade dos clientes. Esta diferença reflete-se desde logo no número de clientes a servir: 1851 na instância PT-Março e 2849 na instância PT-Agosto, uma diferença de cerca de 1000 clientes, o que torna as duas instâncias representativas dos extremos de procura que a operação enfrenta.

Para cada dia considera-se ainda uma variante de custos, dando origem às instâncias **PT-Março-armz60** e **PT-Agosto-armz60**, em que o custo de abertura dos armazéns existentes é reduzido para 60 u.m., mantendo-se em 100 u.m. o dos armazéns novos. Esta diferenciação permite identificar que armazéns novos o modelo continua a abrir mesmo quando os existentes se tornam mais baratos, revelando as localizações cuja vantagem operacional compensa o custo de abertura superior. Nas quatro instâncias apresentadas, são considerados os mesmos armazéns da instância PT-224, definida na Secção 4.

As características das instâncias são apresentadas na Tabela 3. O custo de utilização de veículo mantém-se em $b_d = 10$ em todas as instâncias. Relativamente ao número máximo de veículos disponíveis em cada armazém considera-se $k_d = 50$ em todas as instâncias. Na operação da Vortex, o número de

veículos por armazém consegue, em geral, ajustar-se à procura, pelo que se adota um valor elevado, suficiente para servir zonas de forte concentração de clientes como Lisboa.

Tabela 3: Parâmetros das instâncias à escala real.

Instância	$ C $	$ D $	k_d	r_d exist.	r_d novos	b_d
Março	1851	17	50	100	100	10
Março-armz60	1851	17	50	60	100	10
Agosto	2849	17	50	100	100	10
Agosto-armz60	2849	17	50	60	100	10

5 Modelo em Programação Linear Inteira Mista

Com os conjuntos e parâmetros definidos, formula-se agora o V-LRP como um modelo em PLIM. As variáveis de decisão binárias x_{ij} assumem o valor 1 se o veículo atravessa o arco $(i, j) \in A$, e o valor 0 caso contrário. As variáveis binárias y_d indicam se o depósito $d \in D$ é aberto, assumindo o valor 1 quando pelo menos uma rota parte do depósito d e valor 0 caso contrário. As variáveis não negativas t_i representam o instante de início de serviço do cliente $i \in C$. As variáveis não negativas p_i representam a posição do cliente $i \in C$ na rota. Por fim, as variáveis não negativas z_i representam a corrente do nodo $i \in C$, garantindo que cada nodo está na rota de um e um só depósito [1].

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \sum_{d \in D} r_d y_d + \sum_{d \in D} \sum_{j \in V} b_d x_{dj} \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in C \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ji} - \sum_{j \in V} x_{ij} = 0, \quad \forall i \in C \quad (3)$$

$$\sum_{i \in C} x_{di} \leq k_d y_d, \quad \forall d \in D \quad (4)$$

$$\sum_{i \in C} x_{id} = \sum_{j \in C} x_{dj}, \quad \forall d \in D \quad (5)$$

$$z_i + (|D| - d) x_{di} \leq |D|, \quad \forall d \in D, i \in C \quad (6)$$

$$z_i - z_j \leq (|D| - 1)(1 - x_{ij} - x_{ji}), \quad \forall i, j \in C : (i, j) \in A \quad (7)$$

$$t_i + s_i + c_{ij} - \alpha(1 - x_{ij}) \leq t_j, \quad \forall i, j \in C : (i, j) \in A \quad (8)$$

$$e_i \leq t_i \leq l_i, \quad \forall i \in C \quad (9)$$

$$p_i + 1 - Q(1 - x_{ij}) \leq p_j, \quad \forall i, j \in C, i \neq j \quad (10)$$

$$1 \leq p_i \leq Q, \quad \forall i \in C \quad (11)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A \quad (12)$$

$$y_d \in \{0, 1\}, \quad \forall d \in D \quad (13)$$

$$z_i \geq 1, \quad \forall i \in C \quad (14)$$

$$t_i \geq c_{di} x_{di}, \quad \forall i \in C, d \in D \quad (15)$$

A função objetivo (1) minimiza o custo total de operação composto pelos custos de deslocação, custos fixos de abertura dos armazéns e custos fixos de utilização dos veículos. As restrições (2) garantem que todos os clientes são visitados, pois existe um arco a sair de cada cliente. As restrições (3) asseguram que o número de arcos que entra num cliente é igual ao número de arcos que sai desse mesmo cliente. As restrições (4) garantem que se um armazém d é utilizado, existem no máximo k_d arcos a sair desse depósito, o que corresponde ao número máximo de veículos nele existentes. As restrições (5) asseguram que o número de arcos que entra em cada depósito é igual ao número de arcos que sai desse mesmo depósito.

As restrições (6) identificam o depósito de origem do primeiro cliente visitado em cada rota, atribuindo-lhe um identificador único d . Em particular, para cada cliente $i \in C$ define-se um identificador $z_i \in [1, |D|]$, considerando o índice d de cada depósito $d \in D$ como o identificador da respetiva rota. A desigualdade $z_i + (|D| - d)x_{di} \leq |D|$ impõe que, se o arco (d, i) for utilizado

($x_{di} = 1$), então $z_i \leq d$; caso contrário ($x_{di} = 0$), a desigualdade torna-se redundante ($z_i \leq |D|$). As restrições (7) mantêm a consistência do identificador de depósito entre clientes consecutivos na mesma rota, assegurando paralelamente, e em conjunto com o conjunto de restrições anterior, que não há rotas com mais do que um armazém. Isto porque a desigualdade $z_i - z_j \leq (|D| - 1)(1 - x_{ij} - x_{ji})$ garante que, se dois clientes i e j são visitados consecutivamente ($x_{ij} = 1$), então $z_i \leq z_j$, caso contrário ($x_{ij} = x_{ji} = 0$), a desigualdade torna-se redundante ($z_i - z_j \leq |D| - 1$). O termo x_{ij} é utilizado para fortalecer a relação, uma vez que $x_{ij} + x_{ji} \leq 1$.

As restrições (8) impedem subcircuitos e definem os tempos de início de serviço ao longo da rota, garantindo que o tempo de início de serviço do cliente j é pelo menos o tempo de início de serviço do cliente i mais o tempo de serviço no cliente i , mais o tempo de deslocação entre i e j , se o veículo for de i para j . Quando o veículo não vai de i para j , a restrição torna-se redundante. Isto acontece porque o parâmetro α é definido como $\alpha = l_i + s_i + c_{ij} - e_j$, correspondendo ao valor máximo que a expressão $t_i + s_i + c_{ij} - t_j$ pode assumir numa solução admissível. As restrições (9) impõem as janelas temporais, garantindo que o início do serviço a cada cliente se encontra dentro da sua janela.

As restrições (10) definem a posição de cada cliente i na respetiva rota, sendo que, se o veículo for de i para j , a posição do cliente j é pelo menos igual à posição do cliente i mais uma unidade. As restrições (11) garantem que a posição de um cliente i está entre 1 e Q , que é o limite de clientes por rota definido.

As restrições (12)–(14) definem o domínio das variáveis x_{ij} , y_d e z_i , respetivamente.

Por fim, as restrições (15) definem que o tempo de chegada ao cliente i é sempre igual ou superior ao tempo de deslocação entre o armazém de partida d e o cliente i , se o veículo for de d para i . Se o veículo não for de d para i , então $t_i \geq 0$.

6 Resultados do Modelo em Programação Linear Inteira Mista

Para cada instância descrita anteriormente, o modelo em PLIM foi resolvido utilizando o *Gurobi 13.0.0*, com um limite de tempo de 1800 segundos. Registrou-se, para cada instância, o valor da melhor solução inteira encontrada, limite superior (LS), o valor do melhor limite inferior obtido (LI) e o valor da sua relaxação linear (LP).

A qualidade das soluções obtidas é avaliada através de dois indicadores de Gap. O primeiro, designado simplesmente por Gap, mede o desfasamento entre o limite superior e o limite inferior, no fim do tempo limite, sendo definido por

$$\text{Gap} = \frac{\text{LS} - \text{LI}}{\text{LS}} \times 100\%.$$

Quando Gap = 0%, estamos perante a solução ótima do problema.

O segundo indicador, denotado por Gap_{LP}, avalia a diferença entre a melhor solução admissível encontrada dentro do tempo limite e o valor da relaxação linear, e é dado por

$$\text{Gap}_{\text{LP}} = \frac{\text{LS} - \text{LP}}{\text{LS}} \times 100\%.$$

Os resultados obtidos para cada instância são apresentados na Tabela 4, nomeadamente o número total de armazéns abertos na solução ($|D^*|$), o número de armazéns novos abertos ($|D_{\text{nov}}^*|$), o número de veículos utilizados ($|vei|$), o valor do limite inferior (LI), o valor do limite superior (LS), o Gap, em percentagem, o valor da relaxação linear (LP), o Gap_{LP}, em percentagem, e o tempo de resolução em segundos (t). Os tempos de resolução associados à relaxação linear revelaram-se sempre residuais, tendo sido, no máximo, 0,9 segundos na instância PT-224, pelo que não são incluídos nas tabelas de resultados.

Tabela 4: Resultados obtidos pelo modelo em PLIM.

Instância	$ D^* $	$ D_{\text{nov}}^* $	$ vei $	LI	LS	Gap	LP	Gap _{LP}	t
CB-15	1	0	2	476,11	476,11	0,00	247,24	48,07	0,76
CB-30	1	1	2	563,65	563,65	0,00	228,64	59,44	32,69
CB-30-armz50	1	1	2	533,65	533,65	0,00	228,64	57,16	29,97
CB-64	1	1	4	775,90	826,94	6,17	416,15	49,68	1800,05
CB-64-armz50	1	1	4	746,02	776,94	3,98	416,15	46,44	1800,08
CB-64-armz50/40	2	1	4	737,45	773,19	4,62	416,15	46,18	1800,05
PAC-92	2	0	6	840,95	1063,21	20,90	416,36	60,84	1800,10
PAC-92-armz80	2	0	6	831,80	1020,94	18,53	416,36	59,22	1800,08
PAC-92-armz50	2	0	6	840,03	967,15	13,14	416,36	56,95	1800,08
BP-118	2	1	7	559,88	879,33	36,33	311,87	64,53	1800,11
BP-118-armz60	2	1	8	560,80	862,34	34,97	311,87	63,83	1800,22
Norte	2	1	7	1944,46	2032,37	4,33	1388,50	31,68	1800,07
Norte-armz60	2	0	6	1902,31	1948,89	2,39	1388,50	28,75	1800,06
Centro	3	0	6	1671,50	1928,01	13,30	1104,47	42,71	1800,07
Centro-armz60	3	0	7	1647,59	1782,01	7,54	1102,26	38,15	1800,08
Sul	2	1	6	1348,95	1600,16	15,70	860,42	46,23	1800,11
Sul-armz60	3	0	6	1318,31	1547,07	14,79	860,42	44,38	1800,08
PT-224	7	3	20	4430,43	5457,90	18,83	3163,83	42,03	1800,24
PT-224-armz60	8	1	19	4385,31	5195,56	15,60	3157,62	39,22	1800,24

O modelo em PLIM apenas encontrou a solução ótima em três das 19 instâncias, nomeadamente as instâncias CB-15, CB-30 e CB-30-armz50, todas de pequena dimensão com no máximo 30 clientes. Para as restantes instâncias, o *Gurobi* atingiu o limite de tempo de 1800 segundos sem garantia de

otimalidade, com um Gap médio de 12,06% (subindo para 14,45% quando se excluem as três instâncias cujo valor ótimo foi encontrado). As instâncias BP-118 e BP-118-armz60 destacam-se como os casos de maior dificuldade, com Gaps de 36,33% e 34,97%, respectivamente, valores significativamente maiores do que as instâncias PT-224 e PT-224-armz60, apesar de estas terem maior dimensão.

Quanto à decisão de abertura de armazéns, em 11 das 19 instâncias a solução inclui pelo menos um armazém novo além do existente. De notar que, nas variantes de custo CB-64-armz50/40, BP118-armz60 e PT-224-armz60 em que o custo de abertura dos armazéns existentes foi reduzido, o modelo selecionou na mesma a abertura de armazéns novos. Adicionalmente, à exceção da instância PT-224-armz60, o modelo manteve o mesmo número de armazéns novos face à instância base, sugerindo que os ganhos de deslocação obtidos associados às localizações propostas compensam o custo fixo adicional. Por outro lado, nas variantes de custo Norte-armz60 e Sul-armz60, a redução do custo de abertura dos armazéns existentes levou o modelo a deixar de selecionar os armazéns novos que tinha selecionado nas respetivas instâncias base, sugerindo que, nestas instâncias, os ganhos de deslocação associados às localizações propostas não compensam a diferença de custo face aos armazéns existentes.

Os valores do Gap_{LP} variaram entre 28,75% e 64,53%, com uma média de aproximadamente 48,71%, o que indica relaxações lineares de fraca qualidade. Estes valores elevados ajudam a explicar a dificuldade do modelo em resolver instâncias de maior dimensão.

A limitação mais evidente do modelo de PLIM prende-se com a escalabilidade. O modelo foi testado com a instância PT-Março e, nesta instância, não foi possível gerar o modelo em *Python*. Este resultado confirma que a abordagem exata, embora adequada para instâncias de pequena dimensão, não é praticável à escala do problema real, o que motiva o desenvolvimento de uma metaheurística.

7 Metaheurística ALNS

Dada a impossibilidade de resolver as instâncias de maior dimensão utilizando o modelo de PLIM, propõe-se uma metaheurística ALNS. Esta secção descreve o algoritmo proposto e cada um dos seus componentes: a heurística construtiva que gera a solução inicial, a pesquisa local, os operadores de destruição e reparação, e o mecanismo de seleção adaptativa.

7.1 O algoritmo ALNS proposto

O ALNS parte de uma solução admissível gerada por uma heurística construtiva e melhora-a de forma iterativa através de um processo de destruição e reparação: em cada iteração, um operador de destruição retira um subconjunto de clientes da solução corrente, e um operador de reparação reinsere-os, conduzindo a uma nova solução candidata que é depois melhorada por um procedimento de pesquisa local.

A metaheurística adotada neste TFM segue o esquema de um ALNS descrito no Algoritmo 1. O ciclo principal parte da solução inicial admissível, S_0 , gerada pela heurística construtiva (linha 1 do Algoritmo 1), descrita em detalhe na Secção 7.2. Antes de entrar no ciclo, esta solução é submetida a uma fase de pesquisa local, que utiliza um procedimento de RVND para pesquisar as vizinhanças, descrito na Secção 7.3, e que leva a solução da heurística construtiva até um ótimo local relativamente a todas as estruturas de vizinhança consideradas. Esta solução refinada é simultaneamente a solução corrente S e a melhor solução conhecida S^* .

Em cada iteração k do ciclo principal, o algoritmo executa quatro passos. Primeiro, seleciona um operador de destruição $d^- \in \Omega^-$, sendo Ω^- o conjunto dos operadores de destruição, e um operador de reparação $d^+ \in \Omega^+$, sendo Ω^+ o conjunto dos operadores de reparação, através de uma *roulette wheel* ponderada pelos pesos correntes (Secção 7.6). De seguida, aplica o operador de destruição, $S' \leftarrow d^-(S)$, removendo um subconjunto de clientes da solução corrente. Depois, aplica o operador de reparação, $S' \leftarrow d^+(S')$, reinserindo os clientes removidos. Por fim, aplica o RVND à solução reconstruída, em que cada vizinhança é explorada um número limitado de vezes, de modo a controlar o esforço computacional por iteração. A solução candidata obtida é aceite segundo o critério de aceitação descrito na Secção 7.6. Em cada iteração, os operadores selecionados recebem uma pontuação σ em função do resultado obtido, sendo os pesos dos operadores de destruição (w^-) e de reparação (w^+), atualizados periodicamente, com base nas pontuações acumuladas, conforme descrito na Secção 7.6.

O ciclo principal termina quando se atinge o número máximo de iterações $k_{\max}$ ou um limite de tempo $t_{\max}$, consoante o que ocorra primeiro. Em qualquer dos casos, a melhor solução encontrada S^* é ainda submetida a uma passagem final de pesquisa local sem limite de movimentos, de modo a garantir que a solução devolvida é um ótimo local relativamente a todas as vizinhanças consideradas. Esta intensificação final compensa o facto de, ao longo do ciclo, o RVND ser aplicado apenas de forma limitada (cada vizinhança explorada um número reduzido de vezes por iteração).

Algoritmo 1 ALNS para o V-LRP.

```
1:  $S_0 \leftarrow \text{HeurísticaConstrutiva}()$ 
2:  $S \leftarrow S^* \leftarrow \text{RVND}(S_0)$ 
3: Inicializar pesos  $w_j^- \leftarrow 1, \forall j \in \Omega^-; w_j^+ \leftarrow 1, \forall j \in \Omega^+$ 
4:  $k \leftarrow 0$ 
5: while  $k < k_{\max}$  e  $t < t_{\max}$  do
6:   Selecionar  $d^- \in \Omega^-$  e  $d^+ \in \Omega^+$  por roulette wheel
7:    $S' \leftarrow d^-(S)$ 
8:    $S' \leftarrow d^+(S')$ 
9:    $S' \leftarrow \text{RVND}(S')$ 
10:  if  $S'$  admissível e  $f(S') \leq (1 + \tau) f(S)$  then
11:     $S \leftarrow S'$ 
12:    if  $f(S') < f(S^*)$  then
13:       $S^* \leftarrow S'$ 
14:    end if
15:  end if
16:  Atribuir pontuação  $\sigma$  a  $d^-$  e  $d^+$  consoante o resultado obtido
17:   $k \leftarrow k + 1$  e atualizar  $t$ 
18:  if  $(k \bmod \varphi) = 0$  then
19:    Atualizar pesos  $w^-, w^+$  com base nas pontuações acumuladas
20:  end if
21: end while
22:  $S^* \leftarrow \text{RVND}(S^*)$ 
23: return  $S^*$ 
```

7.2 Heurística construtiva

A heurística construtiva gera a solução admissível que serve de ponto de partida para o ALNS e divide-se em duas fases, conforme descrito no Algoritmo 2. Na primeira fase, aplica-se uma heurística de localização-afetação do tipo gulosa. Começa-se com todos os armazéns abertos, $S = D$, e cada cliente $i \in C$ é afetado ao armazém mais próximo, $\alpha(i) = \arg \min_{d \in D} c_{di}$. De seguida, tenta-se fechar armazéns iterativamente: para cada armazém $d \in S$, simula-se o seu fecho redistribuindo os seus clientes pelos armazéns restantes com capacidade disponível e calcula-se a variação de custo $\delta(d) = Z'(d) - Z$, onde Z soma, para cada cliente, os custos de ida e volta entre o cliente e o armazém que o serve, acrescidos dos custos fixos dos armazéns abertos, e $Z'(d)$ é o valor correspondente após a redistribuição dos clientes de d . O armazém que reduz mais $\delta(d)$ é fechado. Este processo é repetido até que nenhum fecho de armazém seja benéfico, ($\delta(d) < 0$). Na segunda fase, constroem-se as rotas para cada armazém aberto através de uma adaptação da heurística de inserção de menor custo. Para cada armazém $d \in S$, inicializa-se uma rota $r_d = (d, i^*, d)$ com o cliente semente i^* escolhido entre os clientes ainda não visitados em nenhuma rota. Seleciona-se o cliente mais central, isto é, aquele cuja soma das distâncias aos restantes clientes por servir é menor, desde que permita formar uma rota admissível. De seguida, inserem-se sucessivamente os clientes $i \in U$ na posição entre os nodos consecutivos (u, w) que minimiza $\Delta_{iww} = c_{ui} + c_{iw} - c_{uw}$, respeitando as janelas temporais e a capacidade Q do veículo. Este processo é repetido até não existirem mais inserções admissíveis em r_d , ou até todos os nodos estarem numa rota. O processo de construção de rotas é repetido para todos os armazém em S .

Algoritmo 2 Heurística Construtiva para o V-LRP.

```
1:  $S \leftarrow D$ ;  $\alpha(i) \leftarrow \arg \min_{d \in D} c_{di}$  para todo  $i \in C$ 
2:  $C_d \leftarrow \{i \in C : \alpha(i) = d\}$ ,  $v_d \leftarrow \min(k_d, \lceil |C_d|/Q \rceil)$  para todo  $d \in S$ 
3:  $Z \leftarrow \sum_{i \in C} (c_{\alpha(i),i} + c_{i,\alpha(i)}) + \sum_{d \in S} (r_d + v_d b_d)$ 
4: while existe algum armazém  $d \in S$  cujo fecho reduz o custo total do
5:   for cada armazém  $d \in S$  do
6:     Fechar armazém  $d$ : reatribuir cada  $i \in C_d$  ao armazém  $s \in S \setminus \{d\}$  mais próximo com
       capacidade disponível. Seja  $Z'(d)$  o custo da solução obtida.
7:     Calcular  $\delta(d) \leftarrow Z'(d) - Z$ 
8:   end for
9:    $d^* \leftarrow \arg \min_{d \in S} \delta(d)$ 
10:  if  $\delta(d^*) < 0$  then
11:    Fechar armazém  $d^*$ , i. e.,  $S \leftarrow S \setminus \{d^*\}$ . Atualizar  $\alpha$ ,  $C_d$ ,  $v_d$  e  $Z$ .
12:  end if
13: end while
14: for cada armazém  $d \in S$  do
15:    $U \leftarrow C_d$ ;  $\mathcal{R}_d \leftarrow \emptyset$ 
16:   while  $U \neq \emptyset$  e  $|\mathcal{R}_d| < k_d$  do
17:     Iniciar nova rota  $r_d = (d, i^*, d)$  escolhendo  $i^* \in U$  como cliente semente admissível
18:     while  $|r_d| < Q + 2$  ou  $U \neq \emptyset$  do
19:       Determinar o cliente  $i \in U$  que minimiza o custo de inserção entre os nodos consecutivos
          $(u, w)$  de  $r$ ,  $\Delta_{iuv} = c_{ui} + c_{iv} - c_{uw}$ 
20:       if a inserção é admissível then
21:          $U \leftarrow U \setminus \{i\}$ 
22:       else
23:         break
24:       end if
25:     end while
26:      $\mathcal{R}_d \leftarrow \mathcal{R}_d \cup \{r_d\}$ 
27:   end while
28: end for
29: return Uma solução admissível.
```

A solução obtida, composta pelo conjunto de armazéns abertos, pela afetação dos clientes e pelas rotas de cada armazém, constitui o ponto de partida da parte iterativa do ALNS descrito na secção anterior.

7.3 Pesquisa local: *Randomized Variable Neighborhood Descent*

A eficácia do ALNS é potenciada pela integração de uma fase de pesquisa local que procura melhorar cada solução reconstruída. Adota-se aqui o RVND, uma variante aleatória do VND que explora sistematicamente um conjunto de estruturas de vizinhança numa ordem aleatória. A aleatorização da ordem em que as vizinhanças são percorridas evita o enviesamento associado a uma sequência fixa.

7.3.1 Estruturas de vizinhança

Dada uma solução admissível S , uma vizinhança $\mathcal{N}(S)$ é o conjunto de soluções admissíveis que podem ser obtidas a partir de S através de um único movimento. A própria solução S é incluída na sua vizinhança de modo a garantir que o ótimo local é recuperado quando nenhum movimento melhora a solução. A fase de pesquisa local explora vizinhanças que reorganizam clientes dentro de uma mesma rota (movimentos intra-rota), transferem clientes entre rotas (movimentos inter-rota) ou reatribuem clientes ou rotas entre depósitos (movimentos inter-depósito). Cada uma destas vizinhanças define-se como:

- $\mathcal{N}_{\text{rel}}^{\text{intra}}(S) = \{ S' \text{ admissível} : S' \text{ obtém-se de } S \text{ movendo um cliente para outra posição na mesma rota} \} \cup \{S\}$.
- $\mathcal{N}_{\text{swap}}^{\text{intra}}(S) = \{ S' \text{ admissível} : S' \text{ obtém-se de } S \text{ trocando as posições de dois clientes na mesma rota} \} \cup \{S\}$.
- $\mathcal{N}_{\text{dep}}(S) = \{ S' \text{ admissível} : S' \text{ obtém-se de } S \text{ deslocando uma rota inteira de um armazém aberto para outro armazém aberto} \} \cup \{S\}$.
- $\mathcal{N}_{\text{bloco},b}^{\text{inter}}(S) = \{ S' \text{ admissível} : S' \text{ obtém-se de } S \text{ movendo um bloco de } b \text{ clientes consecutivos de uma rota para outra (do mesmo ou de outro armazém)} \} \cup \{S\}$.

Na vizinhança $\mathcal{N}_{\text{dep}}$, se a rota deslocada era a única do armazém de origem, esse armazém é fechado.

7.3.2 Estratégia de exploração das vizinhanças e de pesquisa local

Para cada vizinhança avaliam-se todos os movimentos admissíveis e aplica-se o de maior redução de custo, obtendo a solução S' . Designa-se este processo por pesquisa. A pesquisa repete-se sobre a nova solução, até não haver melhorias possíveis ou se atingir o limite de pesquisas $\delta_{\mathcal{N}}$ associado a essa vizinhança, conforme descrito no Algoritmo 3. Assim, em cada iteração, calcula-se toda a vizinhança $\mathcal{N}(S)$ e seleciona-se o melhor vizinho S' (linha 2). Com $\delta_{\mathcal{N}} = +\infty$, a vizinhança é explorada até se atingir o ótimo local; com $\delta_{\mathcal{N}}$ finito, a exploração é interrompida ao fim de, no máximo, $\delta_{\mathcal{N}}$ cálculos de vizinhança.

Algoritmo 3 Explora($S, \mathcal{N}, \delta_{\mathcal{N}}$).

Require: solução inicial S , vizinhança $\mathcal{N}$, limite de pesquisas $\delta_{\mathcal{N}}$

```

1: for  $i = 1$  to  $\delta_{\mathcal{N}}$  do
2:   explorar  $\mathcal{N}(S)$  e obter  $S'$ 
3:   if  $S = S'$  then
4:     break
5:   end if
6:    $S \leftarrow S'$ 
7: end for
8: return  $S$ 

```

O RVND apresentado no Algoritmo 4 aplica esta exploração ao conjunto de vizinhanças Π . Entende-se por passagem a exploração de todas as vizinhanças de Π uma vez. O conjunto Π inclui $\mathcal{N}_{\text{bloco},2}^{\text{inter}}$ e $\mathcal{N}_{\text{bloco},3}^{\text{inter}}$, que correspondem à vizinhança $\mathcal{N}_{\text{bloco},b}^{\text{inter}}$ com blocos de dimensão $b = 2$ e $b = 3$, exploradas separadamente. Em cada passagem, o RVND gera aleatoriamente a ordem das vizinhanças e explora-as sucessivamente, aplicando a cada uma o seu limite de pesquisas $\delta_{\mathcal{N}}$. Estes limites constituem o vetor $\delta = (\delta_{\mathcal{N}})_{\mathcal{N} \in \Pi}$, ou seja, $\delta = (\delta_{\text{rel}}, \delta_{\text{swap}}, \delta_{\text{dep}}, \delta_{\text{bloco},2}, \delta_{\text{bloco},3})$. O procedimento termina quando uma passagem completa não produz nenhuma melhoria ou quando se atinge o número máximo de passagens γ . Com $\delta = +\infty$, entende-se que todos os $\delta_{\mathcal{N}}$ são iguais a $+\infty$. Assim, quando $\delta = +\infty$ e $\gamma = +\infty$, entende-se que a solução obtida é um ótimo local.

Algoritmo 4 RVND(S, δ, γ).

Require: solução inicial S , vetor de limites de pesquisa por vizinhança δ , limite de passagens γ

```
1:  $\Pi \leftarrow \{\mathcal{N}_{\text{rel}}^{\text{intra}}, \mathcal{N}_{\text{swap}}^{\text{intra}}, \mathcal{N}_{\text{dep}}, \mathcal{N}_{\text{bloco},2}^{\text{inter}}, \mathcal{N}_{\text{bloco},3}^{\text{inter}}\}$ 
2:  $p \leftarrow 0$ 
3: repeat
4:    $S_{\text{prev}} \leftarrow S$ 
5:   Gerar aleatoriamente a ordem das vizinhanças em  $\Pi$ 
6:   for cada  $\mathcal{N} \in \Pi$  pela ordem gerada do
7:      $S \leftarrow \text{Explora}(S, \mathcal{N}, \delta_{\mathcal{N}})$ 
8:   end for
9:    $p \leftarrow p + 1$ 
10: until  $S = S_{\text{prev}}$  ou  $p \geq \gamma$ 
11: return  $S$ 
```

Um aspeto central do desenho da metaheurística é a limitação do esforço de pesquisa local dentro do ciclo ALNS. Tal como argumentado por Kapancioglu e Bernardino [7], explorar exaustivamente as vizinhanças em todas as iterações é computacionalmente dispendioso, pelo que limitar o número de pesquisas constitui um compromisso entre o tempo computacional e a qualidade das soluções. Assim, a pesquisa local é limitada por dois parâmetros: o limite de pesquisas por vizinhança $\delta_{\mathcal{N}}$, e o limite de passagens γ do RVND, que restringe quantas vezes o conjunto de todas as vizinhanças é percorrido. Assim, tanto a pesquisa local inicial (sobre a solução obtida pela heurística construtiva) como a final (sobre a melhor solução encontrada) correm sem qualquer limite ($\delta = \gamma = +\infty$), até atingirem um ótimo local. Já a pesquisa local aplicada em cada iteração do ALNS é limitada por ambos: a exploração de cada vizinhança é interrompida ao fim de, no máximo, $\delta_{\mathcal{N}}$ pesquisas, e o RVND ao fim de, no máximo, γ passagens. A calibração do vetor δ e de γ é abordada na Secção 8.1.1.

Além disso, tanto na fase de pesquisa local como na reparação, restringe-se o conjunto de armazéns testados para cada cliente. Para cada cliente foi pré-calculado o conjunto dos seus armazéns candidatos, isto é, os armazéns situados a menos de duas horas de tempo de viagem do cliente. Sempre que um movimento ou inserção envolve a escolha de um armazém para servir um cliente, apenas se consideram os armazéns candidatos desse cliente. Esta restrição evita avaliar movimentos irrealistas, como servir um cliente do Algarve a partir de um armazém no Norte, reduzindo o esforço computacional sem comprometer a qualidade das soluções, dado que atribuições a armazéns muito distantes quase nunca são vantajosas.

7.4 Operadores de destruição

O conjunto Ω^- contém cinco operadores de destruição, escolhidos de modo a equilibrar diversificação e intensificação da pesquisa, bem como movimentos ao nível da decisão de localização. Excetuando os operadores de remoção de rota e de armazém completos, a quantidade de clientes removidos em cada iteração é uma percentagem $\beta \in [0, 1]$ do número total de clientes, arredondada por excesso para garantir a remoção de pelo menos um cliente. Esta percentagem não é fixa: em cada iteração, β é gerado aleatoriamente de um conjunto de valores definido na afinação de parâmetros (Secção 8.1.1). Os clientes removidos são guardados num *banco* de clientes [12], que constitui o conjunto R , para posterior reinserção pelo operador de reparação.

Os cinco operadores de destruição, e o seu funcionamento, são apresentados de seguida:

Remoção aleatória. Remove $\lceil \beta |C_S| \rceil$ clientes escolhidos aleatoriamente entre todos os clientes presentes na solução S , como descrito no Algoritmo 5. A sua natureza aleatória promove a diversificação.

Algoritmo 5 `destroy_random( $S, \beta$ )` — remoção aleatória.

- 1: $C_S \leftarrow$ todos os clientes presentes em S
 - 2: $q \leftarrow \lceil \beta |C_S| \rceil$
 - 3: $R \leftarrow q$ clientes gerados aleatoriamente de C_S
 - 4: remover R das rotas de S e eliminar rotas e armazéns vazios
 - 5: **return** S, R
-

Remoção dos piores clientes: Este operador remove os clientes com maior ganho de remoção, atuando como mecanismo de intensificação. Para cada cliente i , calcula-se o ganho associado à sua remoção, isto é, a redução do custo de viagem $g_i = c_{a,i} + c_{i,b} - c_{a,b}$, onde a e b são, respectivamente, o predecessor e o sucessor de i na sua rota. Removem-se os $\lceil \beta |C_S| \rceil$ clientes com maior g_i , ou seja, os que mais penalizam o custo da solução. Este procedimento está representado no Algoritmo 6.

Algoritmo 6 `destroy_worst( $S, \beta$ )` — remoção dos piores clientes.

- 1: **for** cada cliente i em S , com predecessor a e sucessor b **do**
 - 2: $g_i \leftarrow c_{a,i} + c_{i,b} - c_{a,b}$
 - 3: **end for**
 - 4: $R \leftarrow$ os $\lceil \beta |C_S| \rceil$ clientes com maior g_i
 - 5: remover R de S e eliminar rotas e armazéns vazios
 - 6: **return** S, R
-

Fecho de armazém: Escolhe aleatoriamente um armazém aberto e remove todos os clientes servidos na rota desse armazém, fechando-o, como descrito no Algoritmo 7. Este operador atua diretamente sobre a decisão de localização, forçando a reafetação de todos os clientes desse armazém na fase de reparação.

Algoritmo 7 `destroy_depot( $S$ )` — fecho de armazém.

- 1: $d \leftarrow$ armazém aberto escolhido ao acaso
 - 2: $R \leftarrow$ todos os clientes servidos por d
 - 3: remover todas as rotas de d e fechar d
 - 4: **return** S, R
-

Remoção da pior rota: Remove a rota r com o pior custo de viagem médio por cliente, isto é, $c(r)/|r|$, onde $c(r)$ é o custo de viagem da rota r e $|r|$ o número de clientes servidos na rota r . Se essa for a única rota do seu armazém, o armazém é fechado, conforme apresentado no Algoritmo 8.

Algoritmo 8 `destroy_worst_route( $S$ )` — remoção da pior rota.

- 1: $r^* \leftarrow \arg \max_r c(r)/|r|$
 - 2: $R \leftarrow$ clientes de r^*
 - 3: remover r^* de S
 - 4: se o armazém ficar sem rotas, fechá-lo
 - 5: **return** S, R
-

Remoção de sequência: O operador alinha os clientes de todas as rotas numa sequência L , percorrendo os armazéns pela ordem dos seus identificadores e, em cada armazém, as rotas pela ordem em que foram construídas. Remove então um bloco de $q = \lceil \beta |C_S| \rceil$ clientes consecutivos, a partir de um cliente escolhido ao acaso. A contagem é circular: ao chegar ao fim de L , prossegue desde o início. Este procedimento é descrito no Algoritmo 9. Na revisão de Voigt [12], os operadores de remoção baseados em sequências são identificados como os mais eficazes para problemas de roteamento.

Algoritmo 9 `destroy_sequence( $S, \beta$ )` — remoção de sequência.

- 1: $L \leftarrow$ lista dos clientes de todas as rotas, concatenados por armazém e, em cada armazém, pela ordem das rotas
 - 2: $n \leftarrow |L|$
 - 3: $q \leftarrow \min(\lceil \beta n \rceil, n)$
 - 4: $s \leftarrow$ índice inicial aleatório em $\{1, \dots, n\}$
 - 5: $R \leftarrow$ os q clientes de L a partir da posição s , percorrendo L de forma circular
 - 6: remover R de S e eliminar rotas e armazéns vazios
 - 7: **return** S, R
-

7.5 Operadores de reparação

O conjunto Ω^+ contém três operadores de reparação, que reinserem os clientes do *banco* R de clientes não servidos na solução. Todos respeitam a capacidade Q das rotas e as janelas temporais, e todos restringem os armazéns testados para cada cliente ao respectivo conjunto de armazéns candidatos, conforme descrito na Secção 7.1.

Inserção mais barata com ruído. Em cada iteração, o operador avalia o custo de inserir cada cliente não servido em todas as posições admissíveis das rotas existentes. Cada custo de inserção Δ é multiplicado por ruído, $\Delta' = \Delta(1 + \eta)$, com $\eta \in [-\eta_0, \eta_0]$. Das κ inserções de menor custo é gerada uma aleatoriamente e essa é a inserção efetuada. O ruído introduz diversificação no operador. Apenas são consideradas rotas já existentes, este operador não cria rotas nem abre armazéns novos. O Algoritmo 10 descreve este procedimento. O número de inserções candidatas κ e a amplitude do ruído η_0 são configurados na Secção 8.1.1.

Algoritmo 10 `repair_cheapest_noise( $S, R, \kappa, \eta_0$ )` — inserção mais barata com ruído.

- 1: **while** $R \neq \emptyset$ **do**
 - 2: $B \leftarrow \emptyset$
 - 3: **for** cada cliente $i \in R$ e cada dois nodos consecutivos (a, b) de cada rota existente **do**
 - 4: $\Delta \leftarrow c_{a,i} + c_{i,b} - c_{a,b}$
 - 5: $\Delta' \leftarrow \Delta(1 + \eta)$, com $\eta \sim \mathcal{U}(-\eta_0, \eta_0)$
 - 6: **if** a inserção é admissível e Δ' está entre os κ menores **then**
 - 7: atualizar B , mantendo as κ inserções de menor Δ'
 - 8: **end if**
 - 9: **end for**
 - 10: escolher ao acaso uma inserção de B e aplicá-la
 - 11: remover de R o cliente inserido
 - 12: **end while**
 - 13: **return** S
-

Inserção com arrependimento. Implementa uma inserção em que o arrependimento de cada cliente é calculado a partir das suas duas melhores inserções. Para cada cliente por inserir, calcula o custo da melhor e da segunda melhor inserção admissível e define o arrependimento como a diferença entre estes dois custos. Em cada passo, tal como representado no Algoritmo 11, insere o cliente com maior arrependimento, ou seja, aquele que mais seria penalizado se não fosse inserido na sua melhor posição. Trata-se de um operador com visão de futuro (*foresight*), identificado por Voigt [12] como dos que tendem a produzir soluções de melhor qualidade.

Algoritmo 11 `repair_regret`(S, R) — inserção com arrependimento.

```

1: while  $R \neq \emptyset$  do
2:   for cada cliente  $i \in R$  do
3:     determinar as duas inserções admissíveis de menor custo de  $i$ , incluindo a criação de nova rota
       em armazém aberto, de custos  $\Delta_i^{(1)} \leq \Delta_i^{(2)}$ 
4:      $\text{regret}_i \leftarrow \Delta_i^{(2)} - \Delta_i^{(1)}$ 
5:   end for
6:    $i^* \leftarrow \arg \max_{i \in R} \text{regret}_i$ 
7:   inserir  $i^*$  na sua melhor posição e remover  $i^*$  de  $R$ 
8: end while
9: return  $S$ 

```

Inserção com decisão de localização. Para cada cliente removido, este operador ordena os armazéns candidatos por ordem crescente de distância ao cliente e avalia, para cada um, a melhor inserção numa rota existente ou a criação de uma nova rota. De entre todas estas opções, escolhe a que apresenta menor custo global, como descrito no Algoritmo 12. Ao contrário dos restantes operadores, pode abrir armazéns novos, somando nesse caso o custo fixo de abertura r_d ao custo de inserção, de modo a que a abertura só ocorra quando for vantajosa. É, assim, o único operador de reparação que pode aumentar o número de armazéns abertos, complementando o operador `destroy_depot`.

Algoritmo 12 `repair_nearest_depot`(S, R) — inserção com decisão de localização.

```

1: for cada cliente  $i \in R$  do
2:    $\mathcal{D}_i \leftarrow$  armazéns candidatos de  $i$ , ordenados por proximidade
3:    $g^* \leftarrow \emptyset$ 
4:   for cada armazém  $d \in \mathcal{D}_i$  do
5:     avaliar a melhor inserção admissível de  $i$  numa rota de  $d$  ou numa nova rota de  $d$ 
6:     if  $d$  está fechado then
7:       somar o custo fixo  $r_d$  ao custo da nova rota
8:     end if
9:     atualizar  $g^*$  se esta opção reduzir o custo global
10:  end for
11:  aplicar  $g^*$ , abrindo  $d$  se necessário
12: end for
13: return  $S$ 

```

7.6 Seleção adaptativa de operadores e critério de aceitação

A seleção dos operadores de destruição e reparação é feita por *roulette wheel*: a cada operador $j \in \Omega^- \cup \Omega^+$ está associado um peso w_j , e a probabilidade de o operador ser escolhido é proporcional ao seu peso, $p_j = w_j / \sum_{i \in \Omega} w_i$, onde Ω é o conjunto Ω^- ou Ω^+ , consoante j seja um operador de destruição ou de reparação, respetivamente. Os pesos são inicializados todos a 1 e atualizados ao fim de cada φ iterações, a que se chama segmento, com base no desempenho observado nessas iterações.

O desempenho é medido através de um sistema de pontuações. Sempre que um operador é usado numa iteração, recebe uma pontuação σ que depende do resultado obtido: uma pontuação elevada se a solução candidata for a nova melhor solução (σ_1), uma pontuação intermédia se melhorar a solução corrente (σ_2), uma pontuação baixa se for aceite apesar de ser pior que a solução corrente (σ_3), e nenhuma pontuação se for rejeitada. No fim de cada φ iterações, o peso de cada operador $j \in \Omega^- \cup \Omega^+$ é atualizado pela média das pontuações que acumulou, segundo a regra

$$w_j \leftarrow (1 - \rho) w_j + \rho \frac{\pi_j}{u_j},$$

onde π_j é a soma das pontuações do operador no conjunto de φ iterações, u_j o número de vezes que foi usado nesse conjunto de iterações, e $\rho \in [0, 1]$ um fator de reação que controla a velocidade com que os pesos respondem ao desempenho do operador nas últimas iterações. Os contadores π_j e u_j são reinicializados no início de cada φ iterações, e impõe-se um valor mínimo aos pesos para garantir que nenhum operador é definitivamente excluído.

Quanto ao critério de aceitação, a solução candidata S' após a pesquisa local só é considerada se for admissível. Uma solução admissível é aceite como nova solução corrente se o seu custo não exceder o custo da solução corrente em mais do que uma margem τ , ou seja, se $f(S') \leq (1 + \tau) f(S)$. Este critério com margem permite aceitar pontualmente soluções ligeiramente piores, favorecendo a exploração do espaço de soluções. Sempre que uma solução aceite melhora a melhor solução conhecida, S^* é atualizada.

Os valores do comprimento do segmento φ , o fator de reação ρ , as pontuações $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e a margem de aceitação τ são apresentados e discutidos na Secção 8.1.1.

8 Resultados da Metaheurística ALNS

8.1 Ajuste de parâmetros e análise de componentes

8.1.1 Ajuste de parâmetros

Os parâmetros do ALNS foram calibrados experimentalmente seguindo uma estratégia sequencial, em que cada parâmetro é testado isoladamente considerando um conjunto de valores candidatos, mantendo-se os restantes fixos e fixando-se o valor escolhido antes de se passar ao parâmetro seguinte. Os testes incidiram sobre um conjunto de seis instâncias de dimensões distintas: CB-15, CB-30 e CB30-armz50, para as quais se conhece a solução ótima obtida pelo modelo de PLIM, e CB-64, PAC-92 e Centro-armz60, as duas últimas de maior dimensão, em que o modelo exato não atinge a otimalidade no tempo limite. Cada configuração de parâmetros foi executada com cinco sementes aleatórias distintas, $\{42, 43, 44, 45, 46\}$, restando-se, para cada instância, a melhor das cinco execuções.

O desempenho de cada configuração de parâmetros foi avaliado segundo três métricas. A primeira é o desvio (Gap) face à solução obtida do modelo de PLIM, dado por

$$\text{Gap}(\%) = \frac{z_{\text{melhor}} - z_{\text{PLIM}}}{z_{\text{PLIM}}} \times 100,$$

em que z_{melhor} é o valor da melhor solução obtida pela metaheurística e z_{PLIM} o valor obtido pelo modelo de PLIM. Valores negativos indicam que a metaheurística superou a solução do modelo de PLIM, ou seja, obteve uma solução de valor inferior, situação possível apenas nas instâncias de maior dimensão, em que o modelo exato não atinge a otimalidade no tempo limite. Para cada configuração, considera-se a média do Gap das seis instâncias. A segunda métrica, $\# \text{Best}$, regista o número de instâncias em que um valor obteve a solução de menor custo entre todos os valores testados para esse parâmetro. A terceira, T , corresponde ao tempo médio de execução nas seis instâncias, em segundos.

A configuração inicial considerou exploração das vizinhanças sem limite de pesquisas ($\delta = +\infty$), RVND sem limite de passagens ($\gamma = +\infty$), percentagem de remoção $\beta = \{0,20; 0,30\}$, segmento $\varphi = 50$, fator de reação $\rho = 0,20$, pontuações $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (25, 10, 0)$, número de inserções candidatas $\kappa = 3$, ruído $\eta_0 = 0,10$ e $k_{\text{max}} = 500$ iterações. Os parâmetros foram calibrados pela seguinte ordem: margem de aceitação (τ), limite de pesquisas na exploração das vizinhanças (δ), limite de passagens do RVND (γ), percentagem de remoção (β), comprimento do segmento (φ), fator de reação (ρ), pontuações (σ), número de inserções candidatas (κ), amplitude do ruído (η_0) e número de iterações (k_{max}). Recorde-se que $\delta = (\delta_{\mathcal{N}})_{\mathcal{N} \in \Pi}$ reúne os limites de pesquisa das cinco vizinhanças, pelo que cada configuração testada para δ corresponde a um vetor de cinco valores. No caso particular em que nenhum limite é utilizado, todos os $\delta_{\mathcal{N}}$ são iguais a $+\infty$, escrevendo-se $\delta = +\infty$.

Os resultados constam da Tabela 5. Para cada parâmetro, assinala-se a sombreado o valor que obteve o menor Gap médio, que corresponde ao valor adotado na configuração final. No caso do número de iterações k_{max} , três valores alcançaram o mesmo Gap médio, tendo-se optado pelo de menor tempo de execução.

A configuração final resultante da calibração resume-se na Tabela 6.

Tabela 5: Resumo da calibração de parâmetros do ALNS.

Parâmetro		Valores testados					
	Valor	0%	5%	10%	15%	20%	
τ	Gap	+0,38	-0,33	-0,16	-0,11	-0,15	
	#Best	2	5	3	4	4	
	T	6,9	7,1	7,0	7,1	7,1	
δ	Valor	$+\infty$	(3, 3, 3, 2, 2)	(4, 4, 4, 2, 2)			
	Gap	-0,33	-0,21	-0,37			
	#Best	4	5	4			
	T	6,8	6,5	6,5			
γ	Valor	2	4	$+\infty$			
	Gap	+0,04	-0,25	-0,37			
	#Best	3	5	6			
	T	5,7	6,2	6,5			
β	Valor	{0, 10; 0, 20}	{0, 10; 0, 20; 0, 30}	{0, 20; 0, 30}	{0, 30; 0, 40}	{0, 20; 0, 30; 0, 40}	{0, 20}
	Gap	-0,15	+0,10	-0,37	-0,14	-0,03	-0,23
	#Best	2	3	5	2	4	4
	T	4,9	5,6	6,5	8,4	7,5	5,7
φ	Valor	25	50	75	100	150	
	Gap	-0,07	-0,37	+0,03	-0,06	-0,03	
	#Best	3	6	3	3	4	
	T	6,4	6,6	6,6	6,5	7,0	
ρ	Valor	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	
	Gap	-0,28	-0,20	-0,09	-0,37	-0,18	
	#Best	5	4	4	4	4	
	T	6,8	6,6	6,6	6,6	6,6	
σ	Valor	(25, 10, 0)	(25, 10, 5)	(30, 15, 5)	(20, 10, 5)	(30, 20, 10)	
	Gap	-0,37	-0,23	+0,00	-0,04	-0,08	
	#Best	6	4	3	3	3	
	T	6,6	6,7	6,5	6,6	6,5	
κ	Valor	2	3	4	5		
	Gap	-0,05	-0,37	-0,13	-0,05		
	#Best	4	6	4	4		
	T	6,4	6,5	6,6	6,9		
η_0	Valor	0,00	0,05	0,10	0,20		
	Gap	-0,06	-0,09	-0,37	+0,05		
	#Best	3	3	6	3		
	T	6,5	6,6	6,6	6,5		
$k_{\max}$	Valor	200	300	500	750	1000	
	Gap	-0,11	-0,13	-0,37	-0,37	-0,37	
	#Best	4	4	6	6	6	
	T	2,8	4,0	6,5	9,6	12,8	

Sombreado = valor escolhido (melhor Gap médio). Gap (%) médio nas seis instâncias. #Best = n.º de instâncias em que a variante obteve o menor custo. $T(s)$ = tempo médio de execução nas seis instâncias. Os valores de δ correspondem, por ordem, a $(\delta_{\text{rel}}, \delta_{\text{swap}}, \delta_{\text{dep}}, \delta_{\text{bloco},2}, \delta_{\text{bloco},3})$.

Tabela 6: Resumo dos parâmetros finais adotados no ALNS.

Parâmetro	Descrição	Valor adotado
τ	Margem de aceitação	5%
δ	Limite de pesquisas por vizinhança	(4, 4, 4, 2, 2)
γ	Limite de passagens do RVND	$+\infty$
β	Percentagem de remoção	{0,20; 0,30}
φ	Comprimento do segmento	50
ρ	Fator de reação	0,20
σ	Pontuações	(25, 10, 0)
κ	Número de inserções candidatas	3
η_0	Amplitude do ruído	0,10
$k_{\max}$	Número máximo de iterações	500

8.1.2 Análise do impacto da pesquisa local e dos operadores

Para avaliar o contributo individual de cada componente do ALNS, conduziu-se uma análise em que se remove, de cada vez, a pesquisa local ou um dos operadores de destruição e reparação, mantendo todos os restantes ativos. Designa-se por ALNS completo a configuração utilizada até aqui, com a pesquisa local e todos os operadores ativos, e por variante cada versão obtida pela remoção de um deles. Cada variante foi executada com a configuração final de parâmetros indicada na Tabela 6, com as cinco sementes aleatórias {42, 43, 44, 45, 46} e sobre as mesmas seis instâncias de teste utilizadas na calibração.

O impacto de cada variante é medido pelo desvio relativo da sua melhor solução face à do ALNS completo, definido, para cada instância, por

$$\Delta\% = \frac{z_{\text{variante}} - z_{\text{completo}}}{z_{\text{completo}}} \times 100,$$

onde z_{variante} é o custo da melhor solução obtida pela variante e z_{completo} o da melhor solução do ALNS completo. Um $\Delta\%$ positivo indica que a remoção do componente piorou a solução, ao passo que um valor negativo indica que a variante obteve uma solução melhor do que o ALNS completo. A coluna $\bar{\Delta}\%$ apresenta a média deste desvio sobre as seis instâncias.

O tempo de execução é reportado na coluna T . Para cada instância regista-se o tempo médio por semente, em segundos, T corresponde à média desses tempos sobre as seis instâncias, em segundos. O ALNS completo, tomado como referência, apresentou um tempo médio de 6,4 segundos.

Os resultados obtidos constam da Tabela 7.

Tabela 7: Análise de componentes do ALNS: impacto da remoção da pesquisa local e de cada operador.

Variante	$\Delta\%$ por instância						$\bar{\Delta}\%$	T
	CB-15	CB-30	CB-30armz50	CB-64	PAC-92	Centro-armz60		
ALNS completo^a	—	—	—	—	—	—	—	6,4
Sem pesquisa local	0,00	+0,52	+0,55	+6,80	+3,39	-0,47	+1,80	2,4
<i>Operadores de destruição</i>								
Sem <code>destroy_random</code>	0,00	0,00	0,00	0,00	+0,95	+0,10	+0,18	6,7
Sem <code>destroy_worst</code>	0,00	0,00	0,00	+0,12	+1,28	+0,05	+0,24	6,3
Sem <code>destroy_depot</code>	0,00	+0,52	+0,55	+1,86	+1,22	-0,13	+0,67	6,2
Sem <code>destroy_worst_route</code>	0,00	+0,52	0,00	0,00	+1,36	-0,20	+0,28	6,7
Sem <code>destroy_sequence</code>	0,00	+0,65	0,00	+2,79	+1,82	-0,19	+0,84	6,4
<i>Operadores de reparação</i>								
Sem <code>repair_cheapest_noise</code>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	+0,02	+0,00	5,9
Sem <code>repair_nearest_depot</code>	0,00	+0,52	+0,55	+1,81	+1,37	+1,35	+0,93	7,3
Sem <code>repair_regret</code>	0,00	0,00	+0,55	0,00	+0,42	-0,04	+0,16	6,2

^a Solução de referência, com custos por instância de 476,11 (CB-15), 563,65 (CB-30), 533,65 (CB-30armz50), 826,94 (CB-64), 1054,73 (PAC-92) e 1756,81 (Centro-armz60).

O desvio médio das variantes situou-se entre 0,00% e +1,80%, confirmando que cada componente contribui, de forma geral, para a qualidade das soluções obtidas. Ao nível das instâncias individuais, observam-se alguns desvios negativos, todos na instância Centro-armz60, a única em que a remoção de operadores conduziu a soluções melhores do que as do ALNS completo. Estes desvios negativos, de pequena magnitude, podem dever-se à natureza estocástica do ALNS, em que a remoção de um operador altera as escolhas aleatórias do algoritmo e pode, pontualmente, conduzir a uma solução ligeiramente melhor.

O maior impacto coube à pesquisa local uma vez que a sua remoção degradou a solução em 1,80% em média, o desvio mais elevado de toda a análise, evidenciando o seu papel fundamental na melhoria das soluções reconstruídas a cada iteração. Em contrapartida, é também a variante mais rápida (2,4 segundos), o que era expectável, dado que se elimina por completo a fase de exploração de vizinhanças.

Destaca-se o operador `repair_cheapest_noise`, cuja remoção resultou num desvio médio nulo (+0,00%). Assim, a sua ausência não prejudicou a qualidade das soluções e, simultaneamente, reduziu o tempo de execução para 5,9 segundos, o menor entre todas as variantes que removeram operadores. Uma vez que este operador não acrescenta qualidade e aumenta o tempo, optou-se por excluí-lo do ALNS, sendo os resultados das secções seguintes obtidos sem ele.

Por fim, note-se que a remoção de alguns operadores aumenta o tempo de execução face ao ALNS completo, que registou um tempo médio de 6,4 segundos. É o caso, por exemplo, dos operadores `repair_nearest_depot` (7,3 segundos), `destroy_random` (6,7 segundos) e `destroy_worst_route` (6,7 segundos). Tal sugere que o tempo de execução não depende apenas do número de operadores ativos, mas também do custo computacional de cada um e da forma como a sua ausência altera a frequência com que os restantes operadores são selecionados.

8.2 Resultados da Metaheurística ALNS

Esta secção apresenta os resultados da metaheurística ALNS. Na Secção 8.2.1, a metaheurística é avaliada comparando-a com o modelo de PLIM, sobre as mesmas instâncias de teste. Na Secção 8.2.2, a metaheurística é aplicada a duas instâncias reais, cada uma correspondente a um dia completo de operação da Vortex com níveis de procura muito distintos, para os quais não é possível construir o modelo de PLIM.

8.2.1 Instâncias de teste e desempenho face ao modelo de PLIM

Nesta secção apresentam-se os resultados obtidos pela metaheurística, com os parâmetros finais da calibração de parâmetros apresentados na Tabela 6, para as instâncias de teste utilizadas na avaliação do modelo de PLIM na Secção 6, de modo a permitir uma comparação direta entre as duas abordagens.

Cada instância foi resolvida com cinco sementes aleatórias distintas, $\{42, 43, 44, 45, 46\}$ e com limite de tempo t_{max} de oito horas. Para cada instância registou-se o valor da *melhor* solução encontrada, o da *pior* solução e a *média* dos valores das soluções das cinco execuções, bem como a média dos tempos de execução das cinco corridas, em segundos.

A qualidade das soluções é medida pelo desvio relativo (Gap) face ao limite superior (LS) obtido pelo modelo de PLIM. Para uma solução heurística com valor z , o Gap é definido por

$$\text{Gap}(\%) = \frac{z - \text{LS}}{\text{LS}} \times 100,$$

pelo que um Gap negativo indica que a metaheurística obteve uma melhor solução que a obtida pelo modelo de PLIM. Aplicando esta definição à melhor solução, à pior e à média das cinco execuções obtêm-se, respetivamente, o Gap da melhor solução, o Gap da pior solução e o Gap médio.

Define-se ainda uma métrica de desvio, dada pela diferença entre o Gap da pior solução e o Gap da melhor solução. Este valor mede a dispersão dos resultados entre sementes: quanto menor, mais próximas são a melhor e a pior solução e, portanto, mais robusta é a metaheurística face à aleatoriedade.

A Tabela 8, apresenta, para cada instância, o limite superior obtido pelo modelo de PLIM (LS), o tempo de resolução do modelo em PLIM (t_{PLIM}), em segundos, o valor da melhor solução encontrada pela metaheurística (Melhor Solução), o Gap da melhor solução encontrada (Gap melhor), o Gap médio das cinco execuções (Gap médio), o Gap da pior solução (Gap pior), o desvio entre o Gap da pior solução e melhor solução (Desvio), e o tempo médio de execução da metaheurística (t), em segundos.

Tabela 8: Resultados da metaheurística sobre as instâncias de teste.

Instância	LS	t_{PLIM}	Melhor solução	Gap melhor	Gap médio	Gap pior	Desvio	t
CB-15	476,11*	0,76	476,11	0,00	0,00	0,00	0,00	0,20
CB-30	563,65*	32,69	563,65	0,00	0,42	0,52	0,52	1,50
CB-30-armz50	533,65*	29,97	533,65	0,00	0,68	1,74	1,74	1,50
CB-64	826,94	1800,05	826,94	0,00	2,69	11,31	11,31	5,60
CB-64-armz50	776,94	1800,08	783,19	0,80	2,01	3,48	2,67	6,00
CB-64-armz50/40	773,19	1800,05	773,19	0,00	2,56	6,94	6,94	6,00
PAC-92	1063,21	1800,10	1054,73	-0,80	-0,02	0,41	1,20	15,00
PAC-92-armz80	1020,94	1800,08	1030,18	0,91	1,24	1,49	0,59	14,70
PAC-92-armz50	967,15	1800,08	955,51	-1,20	-0,39	0,27	1,47	15,10
BP-118	879,33	1800,11	855,80	-2,68	-1,79	-0,27	2,41	25,50
BP-118-armz60	862,34	1800,22	817,12	-5,24	-4,72	-4,44	0,80	24,80
Norte	2032,37	1800,07	2091,78	2,92	3,37	3,97	1,04	14,40
Norte-armz60	1948,89	1800,06	1982,18	1,71	3,63	6,25	4,54	13,20
Centro	1928,01	1800,07	1891,02	-1,92	-0,91	0,05	1,97	15,40
Centro-armz60	1782,01	1800,08	1756,81	-1,41	-0,61	-0,05	1,36	14,60
Sul	1600,16	1800,11	1644,40	2,76	3,42	4,33	1,57	10,70
Sul-armz60	1547,07	1800,08	1543,57	-0,23	0,71	1,31	1,53	10,70
PT-224	5457,90	1800,24	5380,90	-1,41	-0,23	0,80	2,21	75,50
PT-224-armz60	5195,56	1800,24	5144,31	-0,99	-0,32	0,52	1,50	71,10
Média	1591,34	1519,22	1584,48	-0,36	0,62	2,03	2,39	17,97

[*] O limite superior (LS) corresponde à solução ótima obtida pelo modelo de PLIM.

Em termos de qualidade, a metaheurística obteve um Gap médio da melhor solução de $-0,36\%$, ou seja, em média, a melhor solução da metaheurística superou o limite superior do modelo de PLIM. Nas três instâncias de menor dimensão resolvidas até à otimalidade pelo modelo de PLIM (CB-15, CB-30 e

CB-30-armz50), a metaheurística obteve a solução ótima, demorando, em média 1,07 segundos, valor inferior ao obtido no modelo em PLIM (21,14 segundos). Em cinco instâncias igualou o limite superior e em nove superou-o, atingindo a maior melhoria na BP-118-armz60, com um Gap de $-5,24\%$. A metaheurística obteve uma solução com valor pior que o limite superior do modelo de PLIM em cinco instâncias (PAC-92, PAC-92-armz80, Norte, Norte-armz60 e Sul). Apesar disso, nestas instâncias o Gap foi reduzido, sendo o maior de apenas $2,92\%$, na instância Norte.

Quanto à consistência, o desvio entre a pior e a melhor solução manteve-se baixo, com uma média de $2,39\%$. Este valor é um bom indicador de robustez, mostrando que a qualidade da solução é, em geral, pouco sensível à semente aleatória. Destacam-se, no entanto, as instâncias CB-64 e CB-64-armz50/40, com desvios de 11,31 e 6,94 pontos percentuais, respetivamente, claramente acima das restantes. Ainda assim, nas instâncias de maior dimensão o desvio volta a ser mais baixo, o que mostra que este não tem tendência a aumentar com a dimensão das instâncias.

Para analisar as estruturas das soluções obtidas pelo modelo de PLIM e pelo ALNS, a Tabela 20, em anexo, sintetiza os armazéns abertos nas soluções obtidas por cada abordagem em cada instância de teste. Nas instâncias do distrito de Castelo Branco (CB-15 a CB-64-armz50/40), dos quatro armazéns disponíveis, apenas o de Covilhã (N) nunca foi selecionado em nenhuma das soluções. Note-se que, destes quatro armazéns, apenas o de Castelo Branco (E) foi considerado para o restante conjunto de instâncias. Já os armazéns São João da Madeira (N), Beja (N), MARL (E) e Pombal (E) nunca foram abertos em nenhuma solução, sendo de notar que dois deles, MARL e Pombal, são armazéns existentes. Quanto à decisão de localização, as duas abordagens abriram exatamente o mesmo conjunto de armazéns em 11 das 19 instâncias, divergindo nas restantes oito. Dessas oito, a metaheurística obteve uma solução melhor que o modelo de PLIM em cinco, PAC-92-armz50, BP-118, BP-118-armz60, PT-224 e PT-224-armz60, e pior em três, CB-64-armz50, PAC-92-armz80 e Norte. Nos três casos de Gap positivo, em que a metaheurística obteve uma solução pior que o modelo em PLIM, apenas na CB-64-armz50 abriu mais um armazém que o modelo exato. Em PAC-92-armz80 e Norte abriu o mesmo número de armazéns, diferindo apenas nas suas localizações. Já nos casos de Gap negativo, a metaheurística alcançou um custo inferior mantendo o número de armazéns em PAC-92-armz50 e abrindo menos um que a solução obtida pelo modelo exato em BP-118, BP-118-armz60, PT-224 e PT-224-armz60. Importa ainda distinguir os casos em que o Gap não é nulo mas que o conjunto de armazéns coincide, como é o caso das instâncias PAC-92, Centro, Centro-armz60, Sul-armz60, Norte-armz60 e Sul. Nestas, a diferença de custo face ao PLIM resulta apenas da afetação dos clientes e das rotas, e não da decisão de localização, pelo que, para o objetivo de dimensionamento da rede, as soluções obtidas pelas duas abordagens coincidem.

Contudo, é no tempo de computação que a metaheurística se revela mais vantajosa, algo que se verifica até nas instâncias mais pequenas. Enquanto o modelo de PLIM atingiu o limite de 1800 segundos na maioria das instâncias, com um tempo médio de 1519,22 segundos, a metaheurística resolveu todas as instâncias num tempo médio de 17,97 segundos, sendo aproximadamente 85 vezes mais rápida. Esta diferença torna-se decisiva nas instâncias de maior dimensão, como foi o caso da instância PT-Março referida na Secção 6, o modelo de PLIM nem sequer chega a ser gerado em *Python*.

Assim, concluímos que a metaheurística produz soluções de qualidade equivalente ou superior, e em tempos muito inferiores, confirmando a sua adequação para a resolução do problema à escala real.

8.2.2 Escalabilidade e aplicação ao caso real

Validada a qualidade da metaheurística por comparação com o modelo exato na secção anterior, avalia-se agora a sua aplicação às instâncias reais, PT-Março, PT-Março-armz60, PT-Agosto e PT-Agosto-armz60, para as quais o modelo de PLIM nem é construído pelo *Python*. Cada instância

representa um dia real de operação da Vortex, com o conjunto completo de clientes com entregas agendadas em Portugal Continental.

Dada a dimensão das instâncias, cada uma foi resolvida com uma única semente aleatória, escolhida ao acaso entre as cinco sementes $\{42, 43, 44, 45, 46\}$. Foi ainda imposto um limite de tempo $t_{\max} = 8$ por execução. Os resultados de cada dia analisam-se nas subsecções seguintes.

8.2.2.1 Resultados do dia de baixa procura

A Tabela 9 apresenta os resultados para o dia 25 de março, para as instâncias PT-Março e PT-Março-armz60. Registou-se ainda, para cada instância, a média, o mínimo e o máximo do número de veículos por armazém aberto. O tempo de execução t é agora registado em horas, mais adequado à dimensão destas instâncias. As duas execuções terminam dentro do limite de tempo, em cerca de quatro horas e meia, e a solução obtida contém nove e onze armazéns, respetivamente.

Tabela 9: Resultados da metaheurística para o dia de baixa procura.

Instância	$ D^* $	$ vei $	Custo	t	Veíc./armazém			Armazéns abertos
					Méd.	Mín.	Máx.	
PT-Março	9	108	17 752,18	4,4	12,0	2	33	Lisboa (E), Pombal (E), Castelo Branco (E), Vila Real (E), São João da Madeira (N), Braga (N), Évora (E), Algarve (E), Beja (N)
PT-Março-armz60	11	107	17 250,71	4,5	9,7	4	31	MARL (E), Coimbra (E), Pombal (E), Castelo Branco (E), Porto (E), Vila Real (E), Braga (N), Évora (E), Algarve (E), Beja (N), Viseu (N)

Na instância PT-Março-armz60, o custo total desce 2,82%, de 17 752,18 para 17 250,71 u.m. A redução do custo de abertura dos armazéns existentes torna vantajoso abrir mais instalações, passando de nove para onze armazéns. Sete mantêm-se abertos em ambas as soluções, Pombal, Castelo Branco, Vila Real, Évora, Algarve, Beja e Braga, enquanto Lisboa e S. João da Madeira dão lugar a MARL, Coimbra, Porto e Viseu na variante de menor custo. A Figura 2 e a Figura 3 ilustram as soluções obtidas para o dia 25 de março, sobrepondo os armazéns abertos ao mapa de densidade de clientes, nas instâncias PT-Março e PT-Março-armz60, respetivamente. A Tabela 10 resume, para cada instância, os armazéns abertos na sua solução. As Tabelas 21 e 22, no Anexo, detalham o número de veículos por armazém em cada solução. Em ambas as instâncias a distribuição de veículos por armazém é desigual. Na PT-Março, Lisboa concentra o maior número de veículos (33) e Beja o menor (2), enquanto que na PT-Março-armz60, o maior número de veículos passa a partir do MARL (31) e o menor de Évora, Beja e Viseu (4). A média por armazém desce de 12,0 para 9,7 veículos, em linha com a abertura de mais instalações e a consequente repartição da frota. Esta repartição acompanha de perto a densidade de clientes visível nas Figuras 2 e 3: os armazéns com mais veículos situam-se nas zonas de maior concentração de procura, enquanto os de menor frota servem regiões mais dispersas e com menos procura.

Dos 17 armazéns candidatos, quatro não são abertos em nenhuma das duas soluções (Maia, Aveiro, Santarém e Setúbal), o que indica que, para a procura deste dia, as suas localizações não são competitivas face às restantes uma vez que há armazéns próximos que conseguem cobrir os clientes daquela área. Destaca-se o caso da Maia, um armazém existente que não é aberto mesmo na instância PT-Março-armz60, em que o custo de abertura dos existentes é reduzido. Neste dia, a sua localização é coberta de forma mais eficiente pelos restantes armazéns da zona, como o Porto. Observa-se ainda a abertura simultânea de Évora e Beja em ambas as soluções, dois armazéns geograficamente próximos

numa zona de menor densidade de clientes. Em conjunto, utilizam apenas nove veículos na PT-Março (sete em Évora e dois em Beja) e oito na PT-Março-armz60 (quatro em cada), o que sugere que um único armazém poderia, em princípio, satisfazer a procura de ambos. Ainda assim, em ambas as soluções são os dois abertos, o que se justifica pela estrutura de custos e pelas restrições de janelas temporais consideradas. Em trabalho futuro, poderá avaliar-se a hipótese de abrir apenas um destes armazéns e o respetivo impacto no custo total e no cumprimento das janelas temporais.

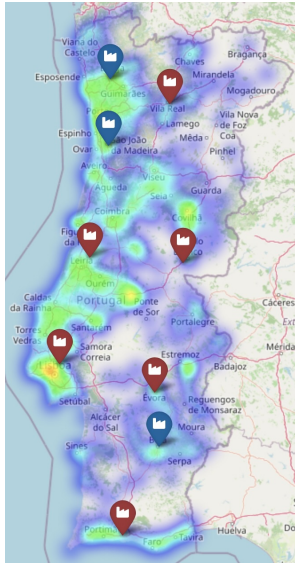


Figura 2: Distribuição dos clientes e armazéns abertos na instância PT-Março. Os marcadores a vermelho indicam armazéns existentes (E) e os marcadores a azul armazéns novos (N).

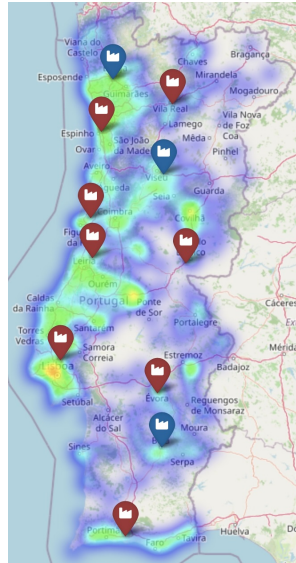


Figura 3: Distribuição dos clientes e armazéns abertos na instância PT-Março-armz60. Os marcadores a vermelho indicam armazéns existentes (E) e os marcadores a azul armazéns novos (N).

Tabela 10: Armazéns abertos nas soluções do dia de baixa procura.

Armazém	PT-Março	PT-Março-armz60
Lisboa (E)	×	
S. J. da Madeira (N)	×	
MARL (E)		×
Coimbra (E)		×
Porto (E)		×
Viseu (N)		×
Pombal (E)		×
Castelo Branco (E)	×	×
Vila Real (E)	×	×
Braga (N)	×	×
Évora (E)	×	×
Algarve (E)	×	×
Beja (N)	×	×

Até aqui, a análise incidiu apenas sobre as soluções obtidas pela metaheurística. Importa agora confrontá-las com a operação real, comparando, para cada serviço (cliente), o armazém a que foi efetivamente afeto com o armazém que lhe foi atribuído nas soluções da metaheurística. Esta comparação é feita apenas para a variante PT-Março-armz60, que favorece a abertura dos armazéns já existentes, permitindo avaliar quanto se altera face à operação real mesmo no cenário que menos penaliza a estrutura atual. Desta análise, resultam três situações distintas: o cliente mantém-se no mesmo armazém (*Não mudou*), é realocado para outro armazém existente (*Mudou para existente*), ou é realocado para um armazém novo (*Mudou para novo*). A Tabela 11 apresenta a repartição global dos serviços pelas três situações, em percentagem do total. A Tabela 12 detalha-a por armazém de afetação real, mostrando, em cada linha, como se distribuem pelas três situações os serviços que esse armazém realizava na operação real.

Tabela 11: Comparação entre a afetação real dos clientes e a solução obtida, na instância PT-Março-armz60.

Situação	% de serviços
Não mudou	52,46
Mudou para existente	28,69
Mudou para novo	18,85
Total	100,00

Tabela 12: Comparação entre a afetação real e a solução obtida, por armazém de afetação real, na instância PT-Março-armz60.

Armazém (real)	Mudou p/ existente	Mudou p/ novo	Não mudou
Algarve	2,07	22,80	75,13
Castelo Branco	20,27	2,70	77,03
Coimbra	29,69	7,81	62,50
Évora	0,00	44,26	55,74
Lisboa	100,00	0,00	0,00
Maia	0,75	99,25	0,00
MARL	0,51	0,00	99,49
Pombal	15,89	0,00	84,11
Porto	12,07	27,56	60,36
Vila Real	8,86	22,78	68,35
Total	28,69	18,85	52,46

A negrito assinala-se, em cada linha, a situação com maior percentagem de clientes.

No total, 52,46% dos clientes mantêm-se no mesmo armazém em que são servidos na operação real. Coincidir em cerca de metade das afetações mostra que a proposta da metaheurística está, em parte, alinhada com a operação atual, mas a realocação da outra metade aponta que deveria ser feita uma reorganização na forma como os clientes são distribuídos pelos armazéns. O número de armazéns utilizados é também próximo, uma vez que a operação real recorre a 10 armazéns e a solução obtida pela metaheurística abre 11 na instância PT-Março-armz60. Olhando para cada armazém, verifica-se que Algarve, Castelo Branco, MARL e Pombal conservam mais de 70% dos seus clientes, encontrando-se bem posicionados face à procura que servem. Nos armazéns que não são abertos na solução obtida, os clientes são realocados de forma concentrada, como detalha a Tabela 27 no Anexo: os de Lisboa passam a ser servidos quase na totalidade pelo MARL (97,48%), o armazém existente mais próximo, e os da Maia por Braga (99,25%), um armazém novo da mesma região. Já os clientes que na operação atual são servidos por Évora repartem-se entre o próprio armazém (55,74%) e Beja (44,26%), refletindo a proximidade entre os dois armazéns do interior sul.

8.2.2.2 Dia de maior procura e repartição em zonas

A resolução das instâncias PT-Agosto e PT-Agosto-armz60 foi interrompida pelo limite de oito horas antes de atingir as 500 iterações previstas. Na PT-Agosto, a melhor solução obtida tem um custo de 24018,42 u.m. e abre 11 armazéns, como apresentado na Tabela 14. Já na PT-Agosto-armz60, a melhor solução obtida até à interrupção, com um custo de 24144,33 u.m., mantém abertos os 17 armazéns candidatos, o que não é uma boa solução do ponto de vista operacional e mostra que o ALNS não chegou a fechar armazéns dentro do tempo disponível. Uma vez que ambas as instâncias foram interrompidas pelo limite de tempo antes de concluir as iterações, e que na PT-Agosto-armz60 não se

obteve uma solução de planeamento válida, utilizou-se uma abordagem alternativa para o dia de maior procura.

Optou-se por dividir a instância em duas zonas geográficas, resolvidas separadamente. O agrupamento dos distritos em duas zonas teve por base a distribuição espacial dos clientes, representada no mapa de densidade da Figura 4, e a fronteira entre as zonas segue os limites administrativos dos distritos. A zona Norte reúne os distritos de Viana do Castelo, Braga, Vila Real, Bragança, Porto, Aveiro, Viseu, Guarda, Coimbra, Leiria e Castelo Branco. Já a zona Sul reúne os distritos de Santarém, Lisboa, Portalegre, Évora, Setúbal, Beja e Faro. Os distritos junto à fronteira entre as duas zonas partilham armazéns candidatos, como Castelo Branco, Santarém e Pombal, o que permite a cada zona recorrer a instalações próximas dessa fronteira. Cada zona dá origem a uma instância própria, **Ago-Norte** e **Ago-Sul**, e à respetiva versão com estrutura de custos reduzidos, **Ago-Norte-armz60** e **Ago-Sul-armz60**. A Tabela 13 resume as características das quatro instâncias.

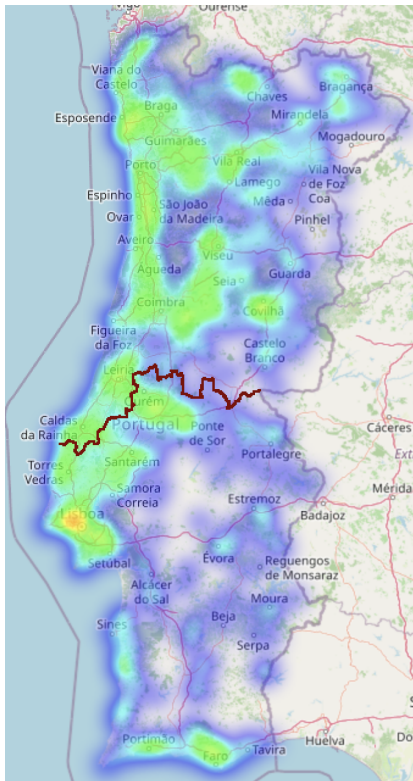


Figura 4: Fronteira (a vermelho) da divisão de Portugal Continental nas zonas Norte e Sul, traçada sobre o mapa de densidade de clientes da instância PT-Agosto.

Tabela 13: Características das instâncias Ago-Norte, Ago-Sul, Ago-Norte-armz60 e Ago-Sul-armz60.

Zona	$ C $	$ D $	k_d	r_d exist.	r_d novos	b_d
Ago-Norte	1344	11	50	100	100	10
Ago-Sul	1505	9	50	100	100	10
Ago-Norte-armz60	1344	11	50	60	100	10
Ago-Sul-armz60	1505	9	50	60	100	10

Resolvem-se agora as quatro instâncias Ago-Norte, Ago-Sul, Ago-Norte-armz60 e Ago-Sul-armz60 de forma separada. A junção das soluções das zonas Norte e Sul de cada instância dá origem à respetiva solução final, designada **PT-Agosto-zonas** e **PT-Agosto-armz60-zonas**. Os resultados são apresentados na Tabela 14.

Tabela 14: Resultados da metaheurística para dia de maior procura.

	$ D^* $	$ vei $	Custo	t (h)	Veíc./armazém			Armazéns abertos
					Méd.	Mín.	Máx.	
PT-Agosto	11	158	24 018,42	8,0 [†]	14,4	3	45	MARL (E), Pombal (E), Castelo Branco (E), Porto (E), Vila Real (E), Braga (N), Évora (E), Algarve (E), Beja (N), Setúbal (N), Viseu (N)
Ago-Norte	7	74	13 456,93	2,6	10,6	4	19	Maia (E), Vila Real (E), Castelo Branco (E), Aveiro (N), Braga (N), Viseu (N), Santarém (N)
Ago-Sul	4	80	10 816,17	3,1	20,0	6	48	Lisboa (E), Évora (E), Algarve (E), Santarém (N)
PT-Agosto-zonas	10 [‡]	154	24 173,10	5,7 [§]	15,4	4	48	—
PT-Agosto-armz60	17	160	24 144,33	8,0 [†]	9,41	3	22	Lisboa (E), MARL (E), Coimbra (E), Pombal (E), Castelo Branco (E), Santarém (N), Porto (E), Maia (E), Vila Real (E), S. J. da Madeira (N), Aveiro (N), Braga (N), Évora (E), Algarve (E), Beja (N), Setúbal (N), Viseu (N)
Ago-Norte-armz60	7	72	13 132,89	2,9	10,3	4	21	Maia (E), Vila Real (E), Castelo Branco (E), Coimbra (E), Pombal (E), Braga (N), Viseu (N)
Ago-Sul-armz60	7	81	10 407,53	3,2	11,6	2	29	Lisboa (E), MARL (E), Castelo Branco (E), Évora (E), Algarve (E), Beja (N), Santarém (N)
PT-Agosto-armz60-zonas	13 ^{‡‡}	153	23 480,42	6,1 ^{§§}	11,8	2	29	—

[†] Atingiu o limite de 8 horas.

[‡] Santarém (N) é aberto nas duas zonas; contam-se 10 armazéns distintos. O custo apresentado desconta a abertura duplicada de Santarém (100 u.m.).

^{‡‡} Castelo Branco (E) é aberto nas duas zonas; contam-se 13 armazéns distintos. O custo apresentado desconta a abertura duplicada de Castelo Branco (60 u.m.).

[§] Soma dos tempos das duas zonas; 3,1 h se resolvidas em paralelo.

^{§§} Soma dos tempos das duas zonas; 3,2 h se resolvidas em paralelo.

Na instância PT-Agosto, cada zona é resolvida em menos de três horas e meia. As duas soluções somam 24 273,10 u.m., mas Santarém é aberto em ambas as zonas e, numa operação real, a instalação abriria uma única vez. Foram por isso descontadas 100 u.m. a este custo, correspondentes à abertura duplicada de um armazém novo, pelo que o custo da solução combinada PT-Agosto-zonas é de 24 173,10 u.m., 0,64% acima do valor da instância PT-Agosto. Esta diferença de custo é compensada pela rapidez: cada zona é resolvida por completo, sem atingir o limite de tempo, e no conjunto consome muito menos tempo que a instância completa, 5,7 horas em série ou 3,1 horas em paralelo. A solução por zonas abre 10 armazéns, menos um do que a instância completa. O número de veículos é próximo nas duas abordagens, 154 contra 158, com uma média de 15,4 veículos por armazém na solução por zonas e 14,4 na instância completa. Em ambas as soluções a distribuição dos veículos pelos armazéns é desigual e acompanha a densidade de clientes: na PT-Agosto, MARL concentra o maior número de veículos (45) e Évora o menor (3), enquanto que na solução por zonas, Lisboa lidera com 48 e o Castelo Branco fica-se por 4. A distribuição completa por armazém consta das Tabelas 23 e 25, no Anexo.

Destaca-se a seleção de Santarém na zona Norte, apesar de nenhum cliente desta zona pertencer ao distrito de Santarém. O armazém é aberto por servir os clientes dos distritos mais próximos, como Leiria e Coimbra. A sua abertura também na zona Sul confirma o posicionamento central face à procura de ambos os lados da fronteira.

Na variante PT-Agosto-armz60, cada zona é igualmente resolvida sem atingir o limite de tempo, e no conjunto a resolução demora 6,1 horas em série ou 3,2 horas em paralelo. À semelhança do dia de baixa procura, a redução do custo de abertura dos armazéns existentes torna-os mais atrativos: a solução da Ago-Sul-armz60 passa a abrir sete armazéns, face a quatro na Ago-Sul, reforçando o recurso a armazéns existentes como MARL e Castelo Branco. Neste caso, é o armazém de Castelo Branco que é aberto nas duas zonas. Foram descontadas 60 u.m. a este custo, correspondentes à abertura duplicada de um armazém existente, pelo que o custo da solução combinada PT-Agosto-armz60-zonas é de 23 480,42 u.m. Também na PT-Agosto-armz60-zonas a distribuição dos veículos pelos armazéns é marcada por grandes diferenças: Lisboa concentra 29 veículos e Évora apenas dois, com o detalhe por armazém na Tabela 26, no Anexo. A repartição dos veículos pelos 17 armazéns da solução PT-Agosto-armz60, ainda que sem validade operacional, consta da Tabela 24.

As Figuras 5, 6 e 7 ilustram as soluções das instâncias PT-Agosto, PT-Agosto-zonas e PT-Agosto-armz60-zonas, sobrepondo os armazéns abertos ao mapa de densidade de clientes. Não foi gerado um mapa para a solução da instância PT-Agosto-armz60 por esta não ser operacionalmente válida. Destaca-se a abertura de armazéns geograficamente muito próximos nas zonas de maior densidade de procura: na PT-Agosto-armz60-zonas, MARL e Lisboa são ambos abertos na área metropolitana de Lisboa, a região mais densa do país. Por serem tão próximos, no mapa os dois marcadores quase se sobrepõem (Figura 7). O mesmo se observa a Norte, com a Maia e Braga a servirem a concentração de clientes da área do Porto. A abertura de dois armazéns próximos nestas zonas de maior procura sugere que o volume de entregas aí concentrado beneficia de mais do que uma instalação para o servir. Assim, a repartição mostra ser uma abordagem adequada para o dia de maior procura nas duas instâncias. Na PT-Agosto, permite resolver o problema dentro de um tempo inferior, a troco de um aumento de custo reduzido. Na PT-Agosto-armz60, é o que torna possível obter uma boa solução do ponto de vista operacional, já que a instância PT-Agosto-armz60 não chegou a fechar armazéns dentro do tempo disponível.

Na Tabela 15 estão resumidos os armazéns abertos na solução das instâncias PT-Agosto, PT-Agosto-zonas e PT-Agosto-armz60-zonas.

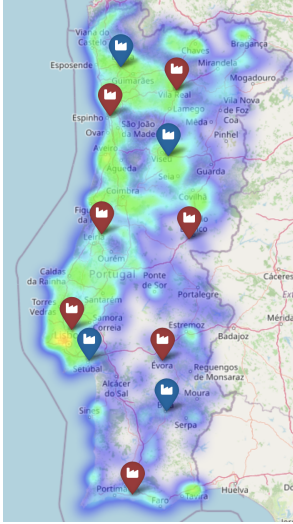


Figura 5: Distribuição dos clientes e armazéns abertos na instância PT-Agosto. Os marcadores a vermelho indicam armazéns existentes (E) e os marcadores a azul armazéns novos (N).

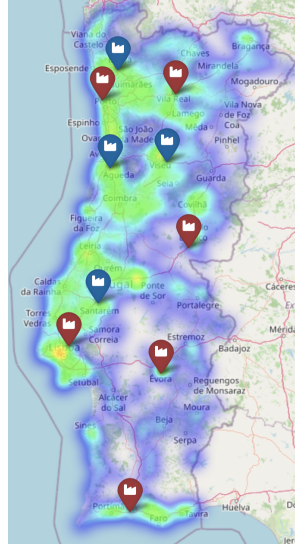


Figura 6: Distribuição dos clientes e armazéns abertos na instância PT-Agosto-zonas. Os marcadores a vermelho indicam armazéns existentes (E) e os marcadores a azul armazéns novos (N).

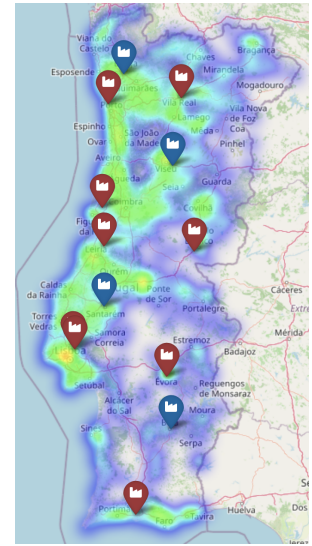


Figura 7: Distribuição dos clientes e armazéns abertos na instância PT-Agosto-armz60-zonas. Os marcadores a vermelho indicam armazéns existentes (E) e os marcadores a azul armazéns novos (N).

Tabela 15: Armazéns abertos em cada instância para o dia de maior procura.

Armazém	PT-Agosto	PT-Agosto-zonas	PT-Agosto-armz60-zonas
Braga (N)	×	×	×
Maia (E)		×	×
Porto (E)	×		
Vila Real (E)	×	×	×
Viseu (N)	×	×	×
Aveiro (N)		×	
Coimbra (E)			×
Pombal (E)	×		×
Castelo Branco (E)	×	×	×
Santarém (N)		×	×
MARL (E)	×		×
Lisboa (E)		×	×
Setúbal (N)	×		
Évora (E)	×	×	×
Beja (N)	×		×
Algarve (E)	×	×	×

À semelhança do dia de baixa procura, compara-se agora a afetação real dos clientes com a proposta pela solução da metaheurística para o dia 6 de agosto. A comparação é feita com a variante PT-Agosto-armz60-zonas pela mesma razão: é a que favorece a abertura dos armazéns já existentes e permite avaliar quanto se altera face à operação real mesmo no cenário que menos penaliza a estrutura atual. A Tabela 16 apresenta a repartição global dos serviços e a Tabela 17 detalha-a por armazém de afetação real, à semelhança da Secção 8.2.2.1

Tabela 16: Comparação entre a afetação real dos clientes e a solução obtida, na instância PT-Agosto-armz60-zonas.

Situação	% de serviços
Não mudou	40,19
Mudou para existente	38,43
Mudou para novo	21,38
Total	100,00

Tabela 17: Comparação entre a afetação real e a solução obtida, por armazém de afetação real, na instância PT-Agosto-armz60-zonas.

Armazém (real)	Mudou p/ existente	Mudou p/ novo	Não mudou
Algarve	0,00	17,89	82,11
Castelo Branco	0,00	5,77	94,23
Coimbra	0,00	6,25	93,75
Évora	15,28	44,44	40,28
Lisboa	48,68	11,08	40,24
Maia	0,00	74,78	25,22
MARL	100,00	0,00	0,00
Pombal	14,72	36,80	48,48
Porto	74,73	25,27	0,00
Vila Real	1,25	10,83	87,92
Total	38,43	21,38	40,19

A negrito assinala-se, em cada linha, a situação com maior percentagem de clientes.

Na instância PT-Agosto-armz60-zonas, que representa o dia de maior procura, 40,19% dos clientes mantêm-se no mesmo armazém em que são servidos na operação real, uma percentagem inferior à do dia de baixa procura, o que é expectável dado o maior volume de entregas e a consequente reorganização da rede. A maioria dos clientes realocados transita para outros armazéns existentes (38,43%) e apenas 21,38% para armazéns novos. O número de armazéns utilizados afasta-se também do da operação real: esta recorre a 10 armazéns, enquanto a solução PT-Agosto-armz60-zonas abre 13. Olhando para cada armazém, Algarve, Castelo Branco, Coimbra e Vila Real conservam mais de 80% dos seus clientes, encontrando-se bem posicionados face à procura que servem. Nos restantes, a realocação é mais acentuada: a totalidade dos clientes do MARL transita para Lisboa, enquanto cerca de metade dos de Lisboa passa para o MARL. A solução obtida pela metaheurística limita-se a redistribuir a procura entre dois armazéns muito próximos na zona de maior densidade. No Norte, os clientes da Maia transferem-se maioritariamente para Braga (74,78%), um armazém novo da mesma região. O detalhe destes fluxos consta da Tabela 28, em anexo.

8.3 Síntese e implicações para a operação

As secções anteriores resolveram quatro instâncias reais da operação da Vortex, representativas de dois dias de procura distinta e, para cada um, duas estruturas de custo. Analisam-se agora estes resultados como um todo, avaliando as suas implicações para a operação da Vortex. A Tabela 18 apresenta, para as quatro instâncias, o número de clientes, de armazéns abertos, de veículos utilizados e o custo total, bem como três indicadores que relacionam estes valores: o custo médio por cliente, o número médio de clientes por veículo e o número médio de clientes por armazém. Para o dia de maior procura consideram-se as soluções repartidas PT-Agosto-zonas e PT-Agosto-armz60-zonas, e os custos apresentados já descontam a abertura duplicada dos armazéns selecionados em ambas as zonas.

Tabela 18: Indicadores de dimensão e custo das soluções obtidas para as instâncias reais.

	PT-Março	PT-Março-armz60	PT-Agosto-zonas	PT-Agosto-armz60-zonas
Clientes ($ C $)	1851	1851	2849	2849
Armazéns abertos ($ D^* $)	9	11	10	13
Veículos ($ vei $)	108	107	154	153
Custo total	17 752,18	17 250,71	24 173,10	23 480,42
Custo médio p/ cliente	9,59	9,32	8,48	8,24
Nº médio de clientes p/ veículo	17,1	17,3	18,5	18,6
Nº médio de clientes p/ armazém	205,7	168,3	284,9	219,2

O custo por cliente é mais baixo no dia de maior procura (8,48 e 8,24 u.m.) do que no dia de baixa procura (9,59 e 9,32 u.m.), apesar do maior volume de entregas. Este efeito de escala explica-se pela maior densidade de clientes em agosto, que permite construir rotas mais cheias e diluir melhor os custos fixos de abertura dos armazéns. No mesmo sentido, o número de clientes por veículo e por armazém é superior no dia de maior procura, refletindo um maior aproveitamento quer da frota quer das instalações. Em ambos os dias, as variantes armz60 apresentam um custo por cliente ligeiramente inferior ao das variantes base, consequência direta da redução do custo de abertura dos armazéns existentes.

A Tabela 19 resume a seleção de cada armazém candidato ao longo das quatro soluções, ordenada pelo número total de soluções em que cada armazém é aberto.

Tabela 19: Seleção de cada armazém candidato nas soluções das instâncias reais.

Armazém	Tipo	PT-Março	PT-Março-armz60	PT-Agosto-zonas	PT-Agosto-armz60-zonas	Total
Castelo Branco	E	×	×	×	×	4
Vila Real	E	×	×	×	×	4
Braga	N	×	×	×	×	4
Algarve	E	×	×	×	×	4
Évora	E	×	×	×	×	4
Beja	N	×	×		×	3
Pombal	E	×	×		×	3
Lisboa	E	×		×	×	3
Viseu	N		×	×	×	3
MARL	E		×		×	2
Coimbra	E		×		×	2
Maia	E			×	×	2
Santarém	N			×	×	2
Porto	E		×			1
S. J. da Madeira	N	×				1
Aveiro	N			×		1
Setúbal	N					0

Cinco armazéns são abertos em todas as quatro soluções, independentemente do dia e da estrutura de custos: Castelo Branco, Vila Real, Braga, Algarve e Évora, sendo o de Braga o único armazém novo. São localizações selecionadas tanto no dia de baixa procura como no dia de maior procura e em ambas as estruturas de custo, o que as torna candidatas naturais a uma operação permanente. Logo a seguir, Beja, Pombal, Lisboa e Viseu são abertos em três das quatro soluções.

Num segundo grupo estão os armazéns de seleção condicional, abertos consoante o dia ou a estrutura de custos, como o MARL, Coimbra, Maia e Santarém. A redução do custo de abertura dos armazéns existentes nas variantes PT-Março-armz60 e PT-Agosto-armz60-zonas desloca a seleção para instalações já disponíveis, como o MARL e Coimbra. Isto sugere que a decisão de abrir um armazém novo não é determinada apenas pelo seu custo de abertura, mas sobretudo pela sua localização: os armazéns novos que persistem ao longo das soluções, como Braga e Viseu, fazem-no por vantagem de posicionamento face à procura.

No extremo oposto, Setúbal nunca é selecionado em nenhuma das quatro soluções. Aveiro, Porto e

São João da Madeira são abertos uma única vez. A não seleção de Setúbal, um armazém novo, indica que a sua localização não é competitiva face às restantes em nenhum dos cenários considerados, sendo a procura da sua zona coberta de forma mais eficiente por armazéns vizinhos.

Reforça-se ainda a observação feita para o dia de baixa procura quanto à abertura simultânea de Évora e Beja, dois armazéns geograficamente próximos no interior sul, ambos abertos na maioria das soluções. A proximidade entre os dois e o reduzido número de veículos que utilizam levanta a questão de saber se um único armazém não bastaria para servir a procura da zona, hipótese que se deixa para trabalho futuro.

Os resultados foram apresentados à Vortex, empresa cuja operação serviu de base a este estudo. Na avaliação feita pela empresa, a metaheurística foi considerada bastante adequada ao problema de dimensionamento e afetação da sua rede, e os resultados obtidos foram tidos como realistas e coerentes com a operação atual. Foi igualmente reconhecido que há margem para explorar estruturas de custos e de capacidade adicionais, ajustando ainda mais a metodologia às condições específicas da operação. A metaheurística desenvolvida está, no entanto, preparada para acomodar essas variações. Esta validação junto da empresa reforça a aplicabilidade da abordagem proposta.

Em síntese, a abordagem proposta mostra-se adequada ao problema de localização e afetação da rede da Vortex: identifica um conjunto coerente de armazéns a manter, distingue as localizações cuja vantagem depende do cenário e produz soluções realistas a uma escala para a qual o modelo de PLIM é impraticável. A sua flexibilidade na definição de custos, capacidades e procura permite adaptá-lo a diferentes cenários de planeamento, confirmando-o como uma ferramenta útil de apoio à decisão.

9 Conclusões e Trabalho Futuro

Este trabalho abordou o problema de localização e roteamento com múltiplos depósitos e janelas temporais aplicado à distribuição de eletrodomésticos de grandes formatos da Vortex, o V-LRP, com o objetivo de construir uma ferramenta de apoio à decisão capaz de avaliar o dimensionamento da rede de armazéns da empresa e o impacto da abertura de novas localizações.

O problema foi formulado como um modelo em PLIM, resolvido de forma exata com o *Gurobi*. Por este se revelar adequado apenas a instâncias de pequena dimensão, obtendo a solução ótima em três das dezanove instâncias de teste e não chegando a ser gerado em *Python* para um dia completo de operação, desenvolveu-se em alternativa uma metaheurística ALNS com pesquisa local RVND. Nas instâncias de teste, esta obteve soluções de qualidade equivalente ou superior à do modelo em PLIM, com um desvio médio de $-0,36\%$ face ao limite superior do PLIM, em tempos de execução cerca de 85 vezes inferiores. Foi esta eficiência que viabilizou a aplicação a instâncias de dimensão real.

A aplicação ao caso real considerou dois dias de procura distinta, um de baixa procura, em março, e um de maior procura, em agosto, e, para cada dia, duas estruturas de custo. No dia de maior procura, o elevado número de clientes esgotou o limite de oito horas de execução, pelo que se recorreu à divisão do país em duas zonas, Norte e Sul, resolvidas separadamente. Esta estratégia produziu soluções de boa qualidade num tempo muito inferior, com um aumento de custo apenas marginal, mostrando que a decomposição é uma abordagem adequada para o dia de maior procura.

Da análise conjunta das soluções, os armazéns distribuem-se por três grupos: cinco que são abertos em todas as soluções, um conjunto de seleção condicional, que depende do dia e da estrutura de custos, e os que nunca são selecionados. Verificou-se ainda que a decisão de abrir um armazém novo é determinada sobretudo pela sua localização, e não apenas pelo seu custo de abertura. A comparação com a operação real mostrou que a rede atual está, em larga medida, bem posicionada face à procura, e que a metaheurística identifica com clareza as localizações que acrescentam valor à rede e aquelas que não o fazem, respondendo assim às questões que motivaram o trabalho.

Os resultados foram apresentados à Vortex, que considerou a abordagem adequada e os resultados realistas e coerentes com a sua operação. Em conjunto, o trabalho entrega uma ferramenta de apoio à decisão flexível e validada, capaz de produzir soluções de qualidade a uma escala para a qual o modelo exato é impraticável, e que permite avaliar diferentes cenários de custos, capacidades e procura no planeamento estratégico da rede da Vortex.

Apesar dos resultados alcançados, o trabalho deixa em aberto várias direções de investigação, umas relativas ao desempenho computacional e à representatividade dos dados, outras à sua aproximação à operação real.

A primeira diz respeito à representatividade das instâncias. Cada instância real corresponde a um único dia, que não capta necessariamente a distribuição espacial habitual da procura, ficando as decisões de localização condicionadas aos clientes desse dia em concreto. A solução mais imediata, considerar vários dias de histórico, é inviável no tempo de computação disponível: a resolução de um único dia chegou a esgotar o limite de oito horas, pelo que resolver muitos seria muito demorado. Uma alternativa seria construir um único dia representativo a partir de um histórico mais alargado, por exemplo de seis meses, gerado por amostragem proporcional à densidade de clientes observada ao longo desse período, captando o padrão habitual da procura sem aumentar a dimensão das instâncias a resolver. Em paralelo, a reimplementação da metaheurística numa linguagem de programação compilada permitiria reduzir significativamente os tempos de execução, tornando possível repetir a resolução de cada instância com várias sementes aleatórias, em vez de uma única como na aplicação à escala real, e avaliar assim a robustez das soluções, à semelhança do que foi feito nas instâncias de teste.

Uma segunda direção prende-se com o refinamento da estrutura de custos e de capacidades. Em três das quatro soluções, foram abertos simultaneamente Évora e Beja, dois armazéns geograficamente próximos e com poucos veículos afetos, o que sugere que a procura da zona poderia ser servida por um único armazém. Uma hipótese a explorar seria a imposição de um número mínimo de veículos por armazém aberto, analisando o seu efeito sobre a abertura de instalações com pouca utilização. Mais genericamente, seria útil rever todos os custos e capacidades do problema, aproximando-os o mais possível dos valores reais da operação.

Relacionada com a sugestão anterior está a própria função objetivo. Atualmente, o custo de deslocação é medido em minutos de viagem, enquanto os custos fixos de abertura de armazéns e de utilização de veículos são expressos em unidades monetárias, pelo que a função objetivo combina unidades distintas. Uma evolução natural seria converter o tempo de viagem num custo monetário, por exemplo através de um custo por minuto associado ao trabalho do motorista, obtendo uma função objetivo integralmente em unidades monetárias e custos finais diretamente interpretáveis. Por aplicar um fator uniforme ao termo de deslocação já existente, esta conversão não alteraria as soluções obtidas, apenas a sua expressão em unidades monetárias. Caso se pretenda incorporar explicitamente o custo de combustível, que depende da distância percorrida e não do tempo, seria necessário extrair também as distâncias em quilómetros, disponíveis na mesma biblioteca OSMnx utilizada para os tempos de viagem, e acrescentar um termo proporcional a essa distância. Neste caso, por o tempo e a distância não serem perfeitamente equivalentes, as soluções poderiam diferir ligeiramente das atuais. Ainda no que diz respeito aos tempos de viagem, estes poderiam passar a depender da hora do dia, refletindo as variações de trânsito ao longo do período de operação e aproximando os tempos de entrega das condições reais.

Uma terceira direção consiste em alargar o âmbito dos serviços considerados. Na construção das instâncias foram excluídos os serviços de instaladores, que exigem mais tempo de serviço, e os serviços de recolha, no cliente e em loja, estes últimos por poderem implicar uma entrega posterior, eventualmente em dia distinto. Estes serviços teriam tratamentos distintos no problema. As recolhas de equipamentos usados realizadas em simultâneo com a entrega não requerem roteamento adicional, mas obrigam a considerar um tempo de serviço acrescido no cliente. Já as recolhas no cliente e em loja constituem pontos de paragem próprios, que teriam de ser roteados tal como as entregas, aumentando o número de nodos a visitar. Em qualquer dos casos, a inclusão destes serviços tornaria o problema mais fiel à operação, mas exigiria modelar o tempo de serviço de forma mais granular e, sobretudo, considerar a capacidade física das carrinhas, que se torna relevante quando às entregas se somam recolhas a transportar de volta ao armazém.

Por fim, no que toca à estrutura da metaheurística, a comparação entre o modelo de PLIM e a metaheurística mostrou que as divergências entre as duas abordagens se concentraram, sobretudo, nos armazéns selecionados. Justifica-se, por isso, investir em operadores adicionais que atuem diretamente sobre o conjunto de armazéns abertos, complementando os operadores `destroy_depot` e `repair_nearest_depot` já existentes, de modo a explorar mais sistematicamente o espaço das decisões de localização.

Referências

- [1] Bektas, T., Gouveia, L., & Santos, D. (2020). Compact formulations for multi-depot routing problems. *Computers and Operations Research*, 124, 105084.
- [2] Bernardino, R., & Paias, A. (2024). The family capacitated vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research*, 314, 836–853.
- [3] Cunha, C. B., Massarotto, D. F., Fornazza, S. L., & Mendes, A. B. (2024). An ALNS metaheuristic for the family multiple traveling salesman problem. *Computers and Operations Research*, 169, 106750.
- [4] Dantzig, G. B., & Ramser, J. H. (1959). The truck dispatching problem. *Management Science*, 6(1), 80–91.
- [5] Doan, T. T., Bostel, N., & Hà, M. H. (2021). The vehicle routing problem with relaxed priority rules. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 10, 100039.
- [6] Gendreau, M., & Potvin, J.-Y. (Eds.). (2019). *Handbook of Metaheuristics* (3rd ed.). Springer.
- [7] Kapancioglu, T., & Bernardino, R. (2025). An iterated local search algorithm for the traveling purchaser problem. *European Journal of Operational Research*, 324(3), 759–772.
- [8] Polacek, M., Hartl, R. F., Doerner, K., & Reimann, M. (2004). A variable neighborhood search for the multi depot vehicle routing problem with time windows. *Journal of Heuristics*, 10(6), 613–627.
- [9] Ropke, S., & Pisinger, D. (2006). An adaptive large neighborhood search heuristic for the pickup and delivery problem with time windows. *Transportation Science*, 40(4), 455–472.
- [10] Sacramento, D., Pisinger, D., & Ropke, S. (2019). An adaptive large neighborhood search metaheuristic for the vehicle routing problem with drones. *Transportation Research Part C*, 102, 289–315.
- [11] Shaw, P. (1998). Using constraint programming and local search methods to solve vehicle routing problems. In *International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming* (pp. 417–431). Springer.
- [12] Voigt, S. (2025). A review and ranking of operators in adaptive large neighborhood search for vehicle routing problems. *European Journal of Operational Research*, 322(2), 357–375.
- [13] Zhang, X., Dai, X., Lou, P., & Hu, J. (2025). A multi-strategy ALNS for the VRP with flexible time windows and delivery locations. *Applied Sciences*, 15(10), 4995.

Anexos



Figura 8: Distribuição dos clientes de Castelo Branco no dia 23 julho de 2025. O marcador vermelho indica o armazém existente e os marcadores azuis os armazéns propostos.

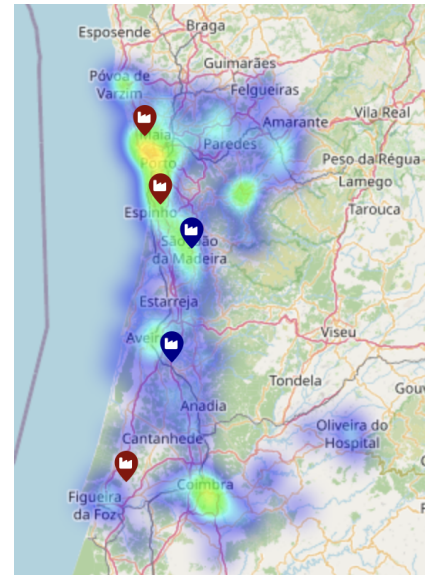


Figura 9: Distribuição dos clientes de Porto, Aveiro e Coimbra no dia 9 de fevereiro de 2026. Os marcadores a vermelho indicam os armazéns existentes e os marcadores azuis os armazéns propostos.

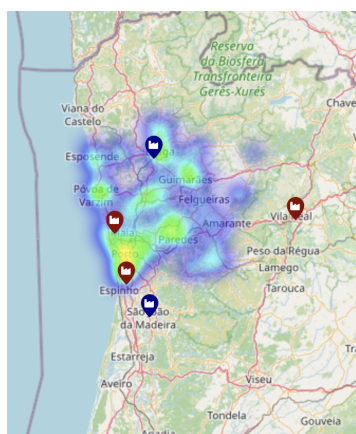


Figura 10: Distribuição dos clientes de Braga e Porto no dia 9 de fevereiro de 2026. Os marcadores a vermelho indicam os armazéns existentes e os marcadores azuis os armazéns propostos.

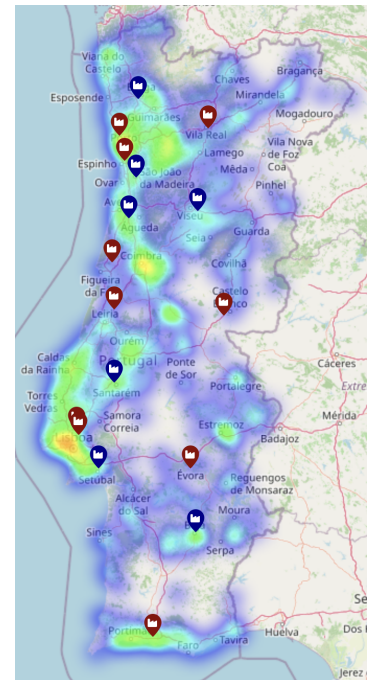


Figura 11: Distribuição dos clientes de Portugal Continental no dia 9 de fevereiro de 2026. Os marcadores a vermelho indicam os armazéns existentes e os marcadores azuis os armazéns propostos.

Tabela 20: Armazéns abertos em cada instância: Modelo em PLIM vs. Metaheurística.

	CB-15		CB-30		CB-30-armz50		CB-64		CB-64-armz50*		CB-64-armz50/40		PAC-92		PAC-92-armz80*		PAC-92-armz50		BP-118		BP-118-armz60		Norte*		Norte-armz60*		Centro		Centro-armz60		Sul*		Sul-armz60		PT-224		PT-224-armz60			
Armazém	P	M	P	M	P	M	P	M	P	M	P	M	P	M	P	M	P	M	P	M	P	M	P	M	P	M	P	M	P	M	P	M	P	M	P	M	P	M		
Braga (N)																																								
Maia (E)																																								
Porto (E)																																								
Vila Real (E)																																								
Viseu (N)																																								
Aveiro (N)																																								
Coimbra (E)																																								
Santarém (N)																																								
Castelo Branco (E)	x	x																																						
Centro CB (N)																																								
Sul CB (N)																																								
Lisboa (E)			x	x	x	x	x	x	x																															
Évora (E)																																								
Setúbal (N)																																								
Algarve (E)																																								

P = Solução obtida no modelo em PLIM, M = Solução obtida pela Metaheurística.

Uma cruz indica que o armazém é aberto na respetiva solução.

* Instâncias em que a metaheurística obteve uma solução pior que o limite superior do PLIM (gap positivo).

Os armazéns Centro Castelo Branco e Sul Castelo Branco foram abreviados para «Centro CB» e «Sul CB».

Tabela 21: Veículos por armazém — PT-Março.

Armazém	Veículos
Lisboa (E)	33
Braga (N)	15
S. João da Madeira (N)	15
Pombal (E)	14
Algarve (E)	9
Castelo Branco (E)	7
Évora (E)	7
Vila Real (E)	6
Beja (N)	2
Total	108

Tabela 22: Veículos por armazém — PT-Março-armz60.

Armazém	Veículos
MARL (E)	31
Porto (E)	15
Braga (N)	12
Pombal (E)	12
Algarve (E)	9
Castelo Branco (E)	6
Vila Real (E)	5
Coimbra (E)	5
Évora (E)	4
Beja (N)	4
Viseu (N)	4
Total	107

Tabela 23: Veículos por armazém — PT-Agosto. Tabela 24: Veículos por armazém — PT-Agosto-armz60.

Armazém	Veículos
MARL (E)	45
Porto (E)	21
Braga (N)	17
Pombal (E)	14
Algarve (E)	14
Setúbal (N)	13
Vila Real (E)	10
Viseu (N)	10
Castelo Branco (E)	7
Beja (N)	4
Évora (E)	3
Total	158

Armazém	Veículos
Braga (N)	12
Vila Real (E)	12
Maia (E)	13
Porto (E)	6
S. João da Madeira (N)	4
Aveiro (N)	7
Viseu (N)	8
Coimbra (E)	3
Pombal (E)	6
Castelo Branco (E)	7
MARL (E)	15
Lisboa (E)	22
Santarém (N)	11
Setúbal (N)	12
Évora (E)	4
Beja (N)	4
Algarve (E)	14
Total	160

Tabela 25: Veículos por armazém — PT-Agosto-zonas.

Armazém	Veículos
Lisboa (E)	48
Maia (E)	19
Santarém (N)	18
Algarve (E)	15
Aveiro (N)	14
Braga (N)	12
Vila Real (E)	11
Viseu (N)	7
Évora (E)	6
Castelo Branco (E)	4
Total	154

Tabela 26: Veículos por armazém — PT-armz60-zonas.

Armazém	Veículos
Lisboa (E)	29
Maia (E)	21
MARL (E)	18
Algarve (E)	15
Braga (N)	12
Vila Real (E)	12
Coimbra (E)	9
Santarém (N)	9
Viseu (N)	7
Pombal (E)	7
Castelo Branco (E)	7
Beja (N)	5
Évora (E)	2
Total	153

Tabela 27: Distribuição dos clientes de cada armazém utilizado na vida real (linhas) pelos armazéns da solução obtida pela metaheurística (colunas), em percentagem. Instância PT-Março-armz60.

Real \ Modelo	Algarve	Beja	Braga	C. Branco	Coimbra	Évora	MARL	Porto	Pombal	V. Real	Viseu
Algarve	75,13	22,80				2,07					
Castelo Branco				77,03		20,27					2,70
Coimbra					62,50				29,69		7,81
Évora		44,26				55,74					
Lisboa				0,25			97,48		2,27		
Maia			99,25					0,75			
MARL						0,51	99,49				
Pombal				6,54	5,14		4,21		84,11		
Vila Real			11,39					8,86		68,35	11,39
Porto			15,72	0,46	9,34			60,36		2,28	11,85

Células sombreadas: clientes que permanecem no mesmo armazém. A negrito, o destino com maior percentagem em cada linha. Percentagens de 0,0% omitidas.

Tabela 28: Distribuição dos clientes de cada armazém real (linhas) pelos armazéns da solução obtida pela metaheurística (colunas), em percentagem. Instância PT-Agosto-armz60-zonas.

Real \ Modelo	Algarve	Beja	Braga	C. Branco	Coimbra	Évora	Lisboa	Maia	MARL	Pombal	Santarém	V. Real	Viseu
Algarve	82,11	17,57											
Castelo Branco				94,23							0,32		5,77
Coimbra					93,75								6,25
Évora		44,44		11,11		40,28	4,17						
Lisboa							40,24		45,65	3,03	11,08		
Maia			74,78					25,22					
MARL							100,00						
Pombal				3,03	11,69					48,48	36,80		
Porto			7,60	1,77	13,07			58,66				1,24	17,67
Vila Real			3,33					1,25				87,92	7,50

Células sombreadas: clientes que permanecem no mesmo armazém.
A negrito, o destino com maior percentagem em cada linha. Percentagens de 0,0% omitidas.