



Mestrado
MÉTODOS QUANTITATIVOS PARA A DECISÃO
ECONÓMICA E EMPRESARIAL

Trabalho Final de Mestrado
DISSERTAÇÃO

TEORIA DO CONTROLO ÓTIMO E APLICAÇÕES À TOMADA DE
DECISÃO

Pedro Costa Escária

Orientação: Prof. Doutor Filipe Serra de Oliveira

Outubro-2022

GLOSSÁRIO

AE Equação Adjunta.

EDO Equação Diferencial Ordinária.

PMP Princípio Máximo Pontryagin.

PMP₀ Princípio Máximo Pontryagin com $U^* = \mathbb{R}^k$.

PNL Produto Nacional Líquido.

TC Condição de Transversalidade.

TFM Trabalho Final Mestrado.

RESUMO

A Teoria de Controlo Ótimo permite encontrar o controlo ótimo para sistemas dinâmicos. Isto é, permite encontrar as entradas de controlo que resultem em um comportamento desejado para o sistema, tais como minimizar o consumo de energia, maximizar a produção ou manter o sistema dentro de certos limites. Este trabalho final de mestrado apresenta esta teoria e ilustra as potencialidades da sua utilização.

Numa primeira fase, são apresentados os conceitos elementares da Matemática que ajudam a compreender melhor os teoremas clássicos e as equações que deram origem à Teoria de Controlo Ótimo. Esta teoria é descrita posteriormente, sendo demonstrados dois dos principais teoremas importantes para a sua compreensão: o caso particular do Teorema de Pontryagin e o Teorema de Mangasarian.

No final, são apresentados exemplos clássicos e práticos que ilustram possíveis formas de aplicação desta teoria.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria de Controlo; Princípio do Máximo de Pontryagin; Teorema Mangasarian; Cálculo de Variações

ÍNDICE

Glossário	i
Resumo	ii
Índice	iii
Lista de Gráficos	iv
Agradecimentos	v
1 Introdução	1
2 Noções Elementares de Matemática	4
2.1 Formas Quadráticas	6
2.2 Concavidade de Funções	7
3 Introdução ao Cálculo de Variações	11
4 Teoria de Controlo	15
5 Teoria de Controlo vs Cálculo de Variações	28
6 Análise Crítica de Exemplos Clássicos	31
6.1 Exemplo Clássico de Estratégia de Negócio	32
6.2 Exemplo Clássico de Otimização de Poupança	35
7 Comentários Finais	43
8 Referências	44

LISTA DE GRÁFICOS

1	Problema de <i>Brachistochrone</i>	3
2	Paraboloide e Plano Tangente	8
3	Concavidade - Caso de funções de uma variável real	9
4	<i>Bussiness Strategy</i> : Caso A	33
5	<i>Bussiness Strategy</i> : Caso B	34
6	<i>Optimal Savings</i> : Consumo $C(t)$ - Caso $f = bK$	38
7	<i>Optimal Savings</i> : Stock de Capital e Produto Nacional Líquido $K(t)$ e $Y(t)$ - Caso $f = bK$	38
8	<i>Optimal Savings</i> : Investimento $\dot{K}(t)$ - Caso $f = bK$	39
9	<i>Optimal Savings</i> : Função Objetivo $J(t)$ - Caso $f = bK$	39
10	<i>Optimal Savings</i> : Stock de Capital $K(t)$ - Caso $f(K) = aK^2$	40
11	<i>Optimal Savings</i> : Investimento $\dot{K}(t)$ - Caso $f(K) = aK^2$	40
12	<i>Optimal Savings</i> : Consumo $C(t)$ - Caso $f(K) = aK^2$	41
13	<i>Optimal Savings</i> : Utilidade $U(t)$ - Caso $f(K) = aK^2$	41
14	<i>Optimal Savings</i> : Produto Nacional Líquido $Y(t)$ - Caso $f(K) = aK^2$	42

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos aqueles que, de alguma forma, fizeram com que fosse possível realizar esta dissertação de mestrado. Contribuíram com importantes apoios e incentivos, sem os quais não teria sido possível terminar este projeto. Estou muito grato.

Em primeiro lugar quero agradecer ao Prof. Doutor Filipe Oliveira, do Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade de Lisboa, por me ter orientado durante este trabalho. O seu apoio e disponibilidade foram cruciais. Agradeço, ainda, todo o conhecimento que me transmitiu.

À minha família, quero expressar a minha gratidão, por toda a paciência e apoio que me deram enquanto realizei este trabalho. Obrigada por partilharem comigo o vosso conhecimento e experiência, cada conversa que tivemos foi um estímulo para não desistir. Susana, Vítor, Sofia e Teresa dedico-vos este trabalho.

E, finalmente agradeço, à Cátia, por toda a ajuda, companhia e força que me deu. Foi com constante cuidado e espírito de incentivo que me acompanhou durante estes meses. Obrigada pela sua paciência e tempo que foram essenciais para a conclusão deste trabalho.

1 INTRODUÇÃO

A Matemática, cuja terminologia grega remete para o conhecimento e a aprendizagem (Pianigiani, 1907), é a ciência do raciocínio lógico e abstrato que estuda a teoria dos números (quantidades), a geometria (espaço e medidas) (Oxford, 2012), o cálculo (variações, crescimento e decréscimo) (Ramana, 2007), a combinação de estruturas (padrões formais de conectividade) (Kneebone, 1963) e a estatística. Socorrendo-se de notação simbólica alusiva à aritmética, à álgebra e à análise, não possui uma definição consensual no seio da comunidade científica (Tobies, 2012), na medida em que múltiplos autores divergem acerca da sua condição enquanto ciência natural, ramo das humanidades ou forma de arte (Tobies, 2012).

Em 2017, Yadav, D. K. procurou encontrar uma definição exata e simples para a "Matemática", concluindo tratar-se do "estudo dos pressupostos, das suas propriedades e aplicações" (Yadav, 2017 pág. 35). Atualmente, estes diferentes princípios são aplicados de forma transversal no quotidiano. Desde a Economia, a Contabilidade e as Finanças, à Física e Química, à Biologia, à Geologia, à Programação e até à Comunicação, sem esquecer a Computação, a Logística, a Automatização e a Otimização de sistemas, processos e dados.

Muitas destas áreas estão associadas a sistemas que evoluem com o tempo, conhecidos por Sistemas Dinâmicos. De acordo com Ross (2015), o seu controlo é estudado pela Teoria de Controlo Ótimo, durante um período de tempo, tendo como intuito otimizar uma função objetivo.

Esta Teoria constitui uma extensão do Cálculo de Variações (assente no contributo de McShane) e deve-se essencialmente ao trabalho desenvolvido por Pontryagin e Bellman na década de 1950 (Bryson, 1996). Os autores propõem um método geral cujo problema de controlo abrange uma função custo, dependente do estado e das variáveis de controlo. O controlo ótimo é dado por um conjunto de equações diferenciais representativas dos caminhos das variáveis que minimizam a função custo.

Para tal, o controlo pode ser obtido através do princípio máximo de Pontryagin (uma condição necessária também conhecida como princípio mínimo de Pontryagin ou simplesmente princípio de Pontryagin), ou resolvendo a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (uma condição suficiente) (Ross, 2009).

O presente trabalho procura compreender algumas das aplicações da Teoria do Controlo Ótimo, aprofundando o conhecimento sobre a mesma e sobre o impacto que possui no processo de tomada de decisão. Em virtude de permitir resolver diversos problemas de otimização num intervalo de tempo, esta Teoria apoia os diversos setores da sociedade

a identificar as ações que devem ser levadas a cabo para alcançar objetivos pretendidos (Luenberger, 1979).

A Teoria de Controlo e o Cálculo de Variações estão relacionados, na medida em que ambos envolvem a otimização de sistemas dinâmicos. No contexto da Teoria de Controlo, o objetivo passa por encontrar as melhores condições para controlar a evolução de um sistema ao longo do tempo, geralmente com o intuito de maximizar o desempenho ou minimizar o erro. Por sua vez, o Cálculo de Variações procura obter a curva que minimiza ou maximiza um integral determinado, através da identificação das funções que melhor descrevem o comportamento de uma variável dependente de tempo ou espaço.

A Teoria de Controlo recorre ao Cálculo de Variações para resolver problemas que pretendem encontrar a melhor forma de controlar um sistema dinâmico - por exemplo, a melhor entrada de um sistema que maximize a saída desejada. De modo a compreender com maior profundidade o Cálculo de Variações, dever-se-á conhecer o enquadramento histórico que norteia o resultado da equação de Euler Lagrange.

Leonhard Euler (1707-1783) foi um famoso matemático suíço do século XVIII, aluno de Johann Bernoulli, cujos ensinamentos desenvolveu como base do Cálculo de Variações, para resolver problemas isoperimétricos de minimização e maximização. Este tipo de questões atraiu e desafiou outros autores como Newton ou Leibniz. Euler foi o primeiro a solucionar o problema da rotação de um corpo rígido usando as três componentes da velocidade angular e variáveis cinéticas. O seu contributo para a Matemática foi marcante, tanto a nível qualitativo como quantitativo (Cline 2017).

Já Joseph Louis Lagrange (1736-1813), matemático italiano, foi aluno de Euler e desenvolveu o seu trabalho paralelamente. Em 1788, publicou a conceituada tese sobre mecânica analítica intitulada "Mécanique Analytique", cuja técnica permite resolver o problema mecânico sem recorrer a considerações geométricas, tendo apenas por base o vetor de quantidade cinética e potencial de energia.

Lagrange também introduziu o conceito dos multiplicadores indeterminados para resolverem as condições auxiliares, que tem um papel vital na teoria mecânica. William Hamilton, uma figura relevante na formulação analítica da mecânica clássica, apelidou Lagrange de "Shakespeare da Matemática", tendo em conta a "extraordinária beleza, elegância e profundidade dos métodos Lagrangianos". Lagrange foi também o pioneiro de outras inúmeras contribuições para a Matemática. A título ilustrativo, juntamente com Euler e d'Alembert, desenvolveu grande parte das equações diferenciais parciais.(Cline 2017).

A primeira aplicação conhecida do Cálculo de Variações decorreu sobre o problema

de *brachistochrone*. Dados dois pontos $A = (t_0, x_0)$ e $B = (t_1, x_1)$ num plano vertical, o tempo necessário para uma partícula se deslocar ao longo de uma curva de A para B , apenas sob a influência da gravidade, dependerá da forma da curva. O problema passa por encontrar a forma da curva através da qual a partícula se move o mais depressa possível como ilustrado na figura 1, (Sydsaeter et al 2005).

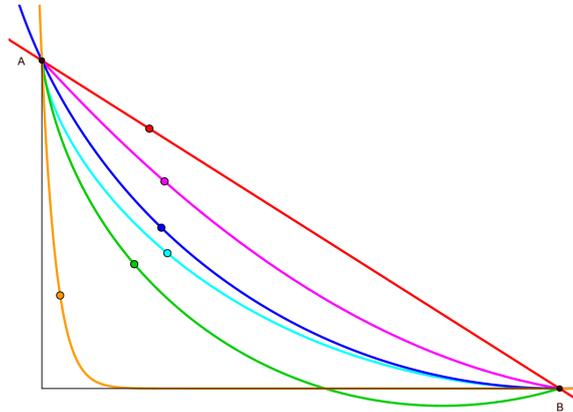


Fig. 1: Problema de *Brachistochrone*

Uma reação inicial ao problema pode considerá-lo fácil, na medida em que percebeção que uma reta unindo A e B é a solução. No entanto, este pressuposto não está correto. Em 1696, o matemático suíço John Bernoulli provou que a solução pertence a parte de uma curva conhecida como cicloide, na qual a partícula pode acelerar rapidamente, seguindo uma direção quer vertical como horizontal, antes da curva se achatar ao se aproximar do ponto B , (Sydsaeter et al 2005). Recorrendo a física elementar, é possível demonstrar que o problema de *brachistochrone* se reduz a uma minimização pela seguinte expressão

$$\min \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt \text{ sujeito a } x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1.$$

A Teoria de Controlo e o Cálculo de Variações são disciplinas matemáticas que têm aplicações em vários campos, incluindo a economia. Na economia, a Teoria de Controlo é usada para modelar e controlar sistemas económicos, enquanto o Cálculo de Variações é usado para resolver problemas relacionados à otimização.

O principal modelo apresentado neste estudo recorre à metodologia e à linguagem neoclássica, nomeadamente a conceitos como stock de capital agregado, funções de produção agregadas e funções de utilidade para consumidores representativos (muitas vezes com horizontes infinitos), elementos fundamentais das teorias modernas de crescimento económico.

Baseado na obra de Frank Ramsey (1928), inspirado em economistas clássicos como

Adam Smith (1776), David Ricardo (1817) e Thomas Malthus (1798), e contemporâneo de autores como Allyn Young (1928), Frank Knight (1944) e Joseph Schumpeter (1934), este modelo procurou introduzir novas ideias à teoria do crescimento.

De entre elas, destacam-se as abordagens básicas ao comportamento competitivo e à dinâmica de equilíbrio, o papel dos rendimentos decrescentes e a sua relação com a acumulação de capital físico e humano, a interação entre o PIB per capita e a taxa de crescimento da população. De igual modo, abrange os efeitos do progresso tecnológico na especialização do trabalho e descobertas de novos bens e métodos de produção, a par do papel do poder monopolista como incentivo ao avanço tecnológico.

Nesta tese, utilizam-se métodos matemáticos modernos de otimização dinâmica e equações diferenciais para discutir o modelo apresentado por Ramsey (1928). Este modelo constitui uma ilustração adequada da aplicação da teoria do controlo na economia, pois o tratamento de Ramsey da otimização doméstica ao longo do tempo ultrapassa largamente a sua aplicação à teoria do crescimento. Atualmente, assume-se enquanto base das discussões da teoria do consumo, da definição de preços dos ativos ou mesmo da teoria dos ciclos económicos. As condições de otimização que Ramsey (e Fisher, 1930) introduziram aos economistas ainda hoje são a pedra angular da análise económica moderna em muitas áreas e a função de utilidade intertemporalmente separável de Ramsey é tão amplamente usada quanto a função de produção de Cobb-Douglas.

2 NOÇÕES ELEMENTARES DE MATEMÁTICA

Nesta secção, vamos cobrir os conceitos básicos de matemática que são essenciais para uma compreensão mais aprofundada da Teoria de Controlo. Vamos revisar conceitos como as funções de classe C^1 , a regra da cadeia, máximos e mínimos de funções, além de introduzir novos conceitos, como as formas quadráticas e a concavidade de funções. Além disso, abordaremos exemplos, a fim de garantir que os conceitos sejam facilmente compreendidos e aplicáveis. Ao final desta secção, os leitores terão uma base sólida de conhecimento matemático para seguir em frente na compreensão do restante documento.

As funções de classe C^1 são funções matemáticas que possuem uma primeira derivada contínua. Em outras palavras, uma função é da classe C^1 se sua derivada existe e é contínua em todo o seu domínio. A continuidade da primeira derivada é importante em muitas aplicações matemáticas, incluindo o cálculo de mínimos e máximos, a resolução de equações diferenciais e a análise de estabilidade.

Para uma melhor compreensão dos resultados futuramente demonstrados, começemos por introduzir a regra da derivação composta, nos termos do elencado em (Sund, 2014).

Teorema 2.1 - Regra da Cadeia

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de classe C^1 . Suponhamos que $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow D$ diferenciável. A função composta $f \circ \vec{r} = f \circ (r_1, \dots, r_n) : I \rightarrow \mathbb{R}$ fica assim bem definida. Seja $g(t) = f(\vec{r}(t))$. Então, g é diferenciável e

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dr_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dr_n}{dt}. \quad (2.1)$$

Em (Sund, 2014), procede-se ainda à definição de máximo e mínimo global, máximo e mínimo local e ponto estacionário, como de seguida se descreve.

Definição 2.1 Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $\vec{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in D$.

O vetor \vec{x}^* é dito maximizante global de f se $f(\vec{x}^*)$ é máximo global de f , ou seja, se $\forall \vec{x} \in D, f(\vec{x}^*) \geq f(\vec{x})$.

O vetor \vec{x}^* é dito minimizante global de f se $f(\vec{x}^*)$ é mínimo global de f , isto é, se $\forall \vec{x} \in D, f(\vec{x}^*) \leq f(\vec{x})$.

O vetor \vec{x}^* é dito maximizante local de f se $\exists r > 0 : f(\vec{x}^*) \geq f(\vec{x})$ para todo o \vec{x} tal que $\|\vec{x} - \vec{x}^*\| < r$.

O vetor \vec{x}^* é dito minimizante local de f se $\exists r > 0 : f(\vec{x}^*) \leq f(\vec{x})$ para todo o \vec{x} tal que $\|\vec{x} - \vec{x}^*\| < r$.

Finalmente, um ponto estacionário (ou crítico) de f é um ponto \vec{x}^* tal que $\nabla f(\vec{x}^*) = \vec{0}$, isto é, todas as derivadas parciais de f em \vec{x} são nulas:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^*) = \vec{0}.$$

Propriedade 2.1 Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $\vec{x}^* \in \text{int}(D)$ um extremo local de f . Então \vec{x}^* é um ponto estacionário de f .

Prova: Seja (e_1, \dots, e_n) a base canónica de \mathbb{R}^n (isto é, a i ésima coordenada de e_i é 1 e as restantes são nulas). Por exemplo, se x^* for um minimizante local, $f(\vec{x}^* + h\vec{e}_i) - f(\vec{x}^*) \geq 0$ para h suficientemente pequeno, pois $f(x^*)$ é mínimo local da função.

- Quando $h \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{h} > 0$, pelo que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^*) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[f(\vec{x}^* + h\vec{e}_i) - f(\vec{x}^*)]}{h} \geq 0.$$

- Caso $h \rightarrow 0^-$, tem-se $\frac{1}{h} < 0$, e assim temos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^*) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{[f(\vec{x}^* + h\vec{e}_i) - f(\vec{x}^*)]}{h} \leq 0.$$

Concluindo,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}^*) = 0, (1 \leq i \leq n).$$

■

2.1 Formas Quadráticas

Segundo a definição de (Sydsaeter et al 2005), uma forma quadrática de n variáveis é uma função Q da forma

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{ij} x_i x_j + \dots + a_{nn} x_n^2 \quad (2.2)$$

onde a_{ij} são constantes. Supondo que $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $A = (a_{ij})$ então, pela definição do produto matricial,

$$Q(x_1, \dots, x_n) = Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$$

Note-se que substituindo a_{ij} e a_{ji} por $\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ não se alteram os valores da forma quadrática Q , pelo que vamos considerar que a matriz A é simétrica.

Definição 2.2 - Classificação das Formas Quadráticas

Uma forma quadrática Q é

- definida positiva se $Q(\vec{x}) > 0$ para todo o $\vec{x} \neq 0$;
- semidefinida positiva se $\forall \vec{x}, Q(\vec{x}) \geq 0$, e se existir $\vec{y} \neq 0$ tal que $Q(\vec{y}) = 0$;
- definida negativa se $Q(\vec{x}) < 0$ para todo o $\vec{x} \neq 0$;
- semidefinida negativa se $\forall \vec{x}, Q(\vec{x}) \leq 0$, e se existir $\vec{y} \neq 0$ tal que $Q(\vec{y}) = 0$;
- indeterminada se existirem vetores \vec{x} e \vec{y} tais que $Q(\vec{x}) > 0$ e $Q(\vec{y}) < 0$.

Observa-se que uma forma quadrática indeterminada assume valores negativos e positivos.

O seguinte teorema, de que omitimos a demonstração, permite na prática classificar facilmente, em muitas situações, formas quadráticas.

Teorema 2.2 (Sydsaeter et al 2005) (Teorema 1.8.2), considere-se a forma quadrática

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}),$$

com a matriz simétrica $A = (a_{ij})_{n \times n}$ associada. Seja $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os valores próprios (reais) de A^1 . Tem-se então que:

- (a) Q é definida positiva $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$.
- (b) Q é semidefinida positiva $\Leftrightarrow \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$, sendo 0 valor próprio.
- (c) Q é definida negativa $\Leftrightarrow \lambda_1 < 0, \dots, \lambda_n < 0$.
- (d) Q é semidefinida negativa $\Leftrightarrow \lambda_1 \leq 0, \dots, \lambda_n \leq 0$, sendo 0 valor próprio.
- (e) Q é indefinida $\Leftrightarrow A$ tem os valores próprios com sinais opostos.

Após a apresentação destes conceitos elementares, abordar-se-á brevemente a concavidade de funções, tópico particularmente relevante na teoria de controlo ótimo.

2.2 Concavidade de Funções

Definição 2.3 Seja D um subconjunto convexo de \mathbb{R}^n e seja f uma função de valores reais definida em D . Diz-se que f é côncava se satisfizer a seguinte inequação

$$f(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}) \geq tf(\vec{x}) + (1-t)f(\vec{y}), \quad (2.3)$$

para todo o $\vec{x}, \vec{y} \in D$ e para todo o $t \in [0, 1]$. A função é dita convexa se $-f$ for côncava, isto é, se a inequação (2.3) se verificar para a desigualdade contrária (\leq).

A função f será estritamente côncava se

$$f(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}) > tf(\vec{x}) + (1-t)f(\vec{y}), \quad (2.4)$$

para todo o $\vec{x}, \vec{y} \in D$ e todo o $t \in]0, 1[$, sendo estritamente convexa se se alterar a orientação da desigualdade ($<$) na inequação (2.4).

Nota: Se $D \subset \mathbb{R}^2$ e se f for de classe C^1 , de um ponto de vista geométrico, pode provar-se que f é côncava se a superfície de equação $z = f(x, y)$ estiver "por baixo" dos planos tangentes a essa superfície, como se pode observar na figura 2.

¹Note-se que as matrizes simétricas são diagonalisáveis. Possuem portanto n valores próprios contados com a ordem de multiplicidade

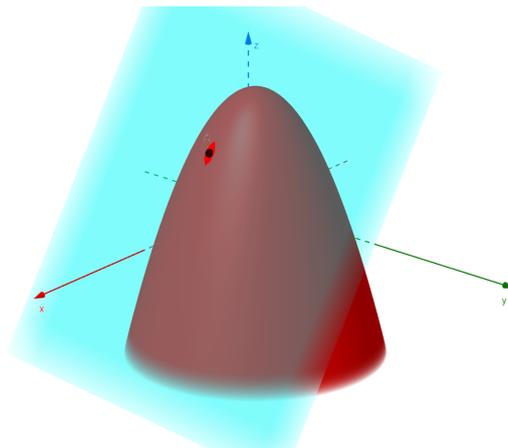


Fig. 2: Parabolóide e Plano Tangente

A equação para o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(\vec{y}, f(\vec{y}))$ é

$$z = \nabla f(\vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) + f(\vec{y})$$

Logo f é côncava se para todo o $\vec{x}, \vec{y} \in D$ se tiver a desigualdade

$$f(\vec{x}) \leq z = \nabla f(\vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) + f(\vec{y}).$$

Para uma melhor compreensão deste conceito seguem-se algumas caracterizações das funções côncavas em casos particulares, bem como alguns exemplos.

Caso de funções de uma variável

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e suponhamos que dados quaisquer dois pontos P e Q do gráfico de f , onde $P = (x_p, y_p)$ e $Q = (x_q, y_q)$, a corda $[PQ]$ situa-se "abaixo" do gráfico de f .

Dado,

$$w = tx_p + (1 - t)x_q \quad t \in [0, 1].$$

A equação da ordenada do ponto de $[PQ]$ de abcissa w é descrita por

$$tf(x_p) + (1 - t)f(x_q).$$

Logo, $\forall t \in [0, 1]$, $f(w) = f(tx_p + (1 - t)x_q) \geq tf(x_p) + (1 - t)f(x_q)$,

como se observa da figura 3. Reencontra-se assim a desigualdade (2.3) da Definição 2.3.

Se f for diferenciável, pode provar-se, sendo $h = x - x_0$, que f é côncava se

$$\forall x_0 \in D, \forall h, f(x_0 + h) \leq hf'(x_0) + f(x_0), \quad (2.5)$$

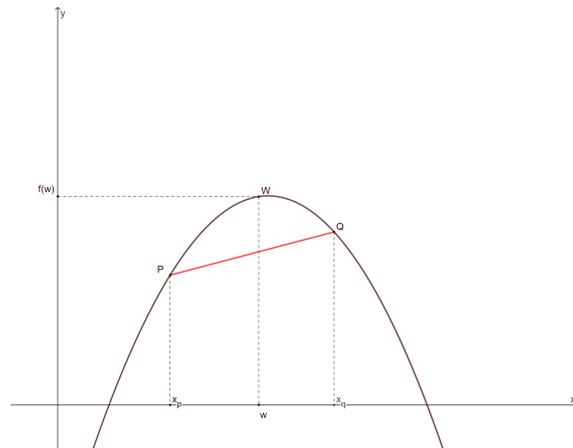


Fig. 3: Concavidade - Caso de funções de uma variável real

o que corresponde à ideia do gráfico de f se situar "abaixo" das tangentes, princípio já ilustrado acima no caso de funções de duas variáveis.

Caso de funções de várias variáveis

De forma análoga à desigualdade (2.5) correspondente ao caso de uma variável, pode provar-se que

Propriedade 2.2 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ e $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ diferenciável.*

$$f \text{ é côncava} \Leftrightarrow f(x_0 + \vec{h}) \leq \vec{h} \nabla f(x_0) + f(x_0),$$

com $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)$.

Caso de funções de uma variável de classe C^2

Propriedade 2.3 *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ e $f \in C^2(D)$. A função f é côncava se e só se os declives das retas tangentes ao seu gráfico não crescerem, isto é, se f' for não crescente:*

$$f \text{ é côncava} \Leftrightarrow f'' \leq 0.$$

Caso de funções de várias variáveis de classe C^2

Para funções de várias variáveis de classe C^2 , apresenta-se o teorema 2.3.1 de (Sydsaeter et al 2005)

Teorema 2.3 *Seja $f \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ aberto e convexo. Então:*

$$(a) \text{ } f \text{ é convexa} \Leftrightarrow f''_{11} \geq 0, f''_{22} \geq 0 \text{ e } f''_{11} f''_{22} - f''_{12}^2 \geq 0,$$

(b) f é côncava $\Leftrightarrow f''_{11} \leq 0, f''_{22} \leq 0$ e $f''_{11}f''_{22} - f''_{12}{}^2 \geq 0$,

(c) $f''_{11} > 0$ e $f''_{11}f''_{22} - f''_{12}{}^2 > 0 \Rightarrow f$ é estritamente convexa,

(d) $f''_{11} < 0$ e $f''_{11}f''_{22} - f''_{12}{}^2 > 0 \Rightarrow f$ é estritamente côncava.

Além da influência exercida sobre as funções quadráticas, a concavidade tem implicações no âmbito dos máximos e mínimos locais. Atente-se à proposição 10 de (Sund, 2014).

Proposição 2.1 *Seja f uma função real de classe C^1 definida num conjunto aberto e convexo D de \mathbb{R}^n e seja $\vec{x}^* \in D$, valem as seguintes propriedades:*

Se f é côncava, então \vec{x}^ é um máximo local para f se e só se $\nabla f(\vec{x}^*) = \vec{0}$.*

Se f é convexa, então \vec{x}^ é um mínimo local para f se e só se $\nabla f(\vec{x}^*) = \vec{0}$.*

De modo a expressar melhor o conjunto de propriedades apresentadas para o estudo de concavidade de funções, apresenta-se os seguintes exemplos.

Exemplo 2.1 - *Funções Afins*

Considere-se $f(x, y) = ax + by$, onde a e b são constantes reais.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

A matriz Hessiana de f é definida por

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz Hessiana deste tipo de funções é nula, logo f é simultaneamente côncava e convexa. Este resultado também decorre trivialmente da Definição (2.3).

Exemplo 2.2 - *Funções de tipo $y^2 + ay + bx$*

Considere-se $f(x, y) = y^2 + ay + bx$, onde a e b são constantes reais.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = b, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

A matriz Hessiana de f é definida por

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A partir da diagonal da matriz H , pode afirmar-se que os valores próprios são 0 e 2. Como ambos são não negativos, então H é semidefinida positiva, logo f é convexa.

Exemplo 2.3 - Funções de tipo $ax + \frac{b}{y}$

Considere-se $f(x, y) = ax + \frac{b}{y}$, onde a e b são constantes reais.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{b}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2b}{y^3} \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

A matriz Hessiana de f é definida por

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2b}{y^3} \end{bmatrix}$$

À semelhança do exemplo anterior, pode afirmar-se, a partir da diagonal da matriz H , que os valores próprios são 0 e $\frac{2b}{y^3}$. H é semidefinida positiva ou negativa consoante o sinal do valor próprio $\frac{2b}{y^3}$, logo f é convexa se $\frac{2b}{y^3} \geq 0$, ou é côncava se $\frac{2b}{y^3} \leq 0$, ou é simultaneamente convexa e côncava se $b = 0$.

Exemplo 2.4 - Funções de tipo $ax + be^{-y}$

Considere-se $f(x, y) = ax + be^{-y}$, onde a e b são constantes reais.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -be^{-y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = be^{-y} \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

A matriz Hessiana de f é definida por

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & be^{-y} \end{bmatrix}$$

Também neste caso, a partir da diagonal da matriz H , se pode afirmar que os valores próprios são 0 e be^{-y} . H é semidefinida positiva ou negativa consoante o sinal do valor próprio be^{-y} . Como $e^{-y} > 0$ para qualquer valor ou função de y , logo f é convexa se $b \geq 0$, ou é côncava se $b \leq 0$, ou é simultaneamente convexa e côncava se $b = 0$.

3 INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE VARIAÇÕES

A teoria de controlo ótimo consiste numa generalização moderna da teoria clássica do cálculo de variações, que oferece um método único para o tratamento de problemas dinâmicos gerais de otimização num espaço de tempo contínuo (Sydsaeter et al 2005).

Tal como elencado pelos autores, a teoria mais recente é atualmente utilizada por um elevado número de economistas, mesmo quando o problema pode ser resolvido através do cálculo de variações. Por conseguinte, estudantes de economia interessados em problemas dinâmicos de otimização devem fazer um esforço adicional para aprender os princípios básicos da teoria de controlo ótimo.

Não obstante, os autores defendem que é mais fácil compreender a metodologia moderna tendo em consideração o conhecimento prévio da teoria clássica. Com efeito, a história do cálculo de variações é bastante longa, tendo alguns dos seus principais resultados sido obtidos por Euler e Lagrange no século XVIII. Por sua vez, em (Sund, 2014) constata-se que o problema básico de cálculo de variações consiste na determinação de um máximo ou mínimo de um integral da forma

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad (3.1)$$

onde F é uma função de classe C^2 de três variáveis, $x = x(t)$ é uma função qualquer de classe C^2 no intervalo $[t_0, t_1]$ e \dot{x} é a derivada de x , tal que

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{e} \quad x(t_1) = x_1, \quad (3.2)$$

onde x_0 e x_1 são números dados.

Funções x de classe C^2 e que satisfazem as equações de pontos extremos (3.2), dizem-se funções admissíveis.

O lema que se segue, segundo ilustrado por (Sund, 2014), será muito útil para a compreensão e desenvolvimento das demonstrações que serão apresentadas mais adiante.

Lema 3.1 - *Lema Fundamental do Cálculo de Variações*

Assume-se que $f : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e que

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) \mu(t) dt = 0,$$

para todas as funções contínuas μ . Então $f(t) = 0$ para todo o t no intervalo $[t_0, t_1]$.

Demonstração 3.1 - *Lema 3.1*

Se existir um $\tau \in]t_0, t_1[$ tal que $f(\tau) \neq 0$, diz-se $f(\tau) > 0$, então $f(t) > 0$ para todo t em um intervalo $[\tau - \epsilon, \tau + \epsilon]$ de τ uma vez que f é contínua. Escolhe-se a função μ tal que

μ é de classe C^2 e

$$\mu \geq 0, \mu(\tau - \epsilon) = \mu(\tau + \epsilon) = 0, \mu > 0 \text{ em }]\tau - \epsilon, \tau + \epsilon[,$$

e $\mu = 0$ fora do intervalo $] \tau - \epsilon, \tau + \epsilon[$. Pode-se, por exemplo, deixar

$$\begin{cases} (t - (\tau - \epsilon))^3((\tau + \epsilon) - t)^3, & t \in]\tau - \epsilon, \tau + \epsilon[\\ 0, & t \notin]\tau - \epsilon, \tau + \epsilon[, \end{cases}$$

que é de classe C^2 . Então

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\mu(t)dt = \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} f(t)\mu(t)dt > 0$$

uma vez que, $\mu(t)f(t) > 0$ e $\mu(t)f(t)$ é contínua no intervalo aberto $] \tau - \epsilon, \tau + \epsilon[$. Assim, obtém-se uma contradição. ■

Teorema 3.1 - Teorema Principal do Cálculo de Variações, Teorema 1 de (Sund, 2014)

Assume-se F uma função de C^2 definida em \mathbb{R}^3 . Considere-se o integral

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt \quad (3.3)$$

Se a função x^* maximiza ou minimiza o integral (3.3) para todas as funções x^* de C^2 em $[t_0, t_1]$ e satisfaz as condições de pontos extremos

$$x(t_0) = x_0 \text{ e } x(t_1) = x_1,$$

então, x^* satisfaz a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \right) = 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (3.4)$$

Em sentido inverso, se uma função admissível $x(t)$ verificar a equação de Euler-Lagrange, e simultaneamente $(x, \dot{x}) \mapsto F(t, x, \dot{x})$ for côncava (convexa) para todo $t \in [t_0, t_1]$, então a função $x(t)$ resolve o problema de maximização (minimização) de (3.3). As funções de $x(t)$ que verificam a equação (Euler-Lagrange) são designadas pontos estacionários ou pontos extremos.

Considere-se agora o problema de maximizar/minimizar o integral (3.3) mas com condições extremas diferentes, mediante as quais o valor extremo $x(t_0)$ das funções admissíveis é fixado e o valor do extremo $x(t_1)$ é livre. Obtém-se o seguinte resultado

Teorema 3.2 - *Condição de Mangasarian do cálculo de variações*

Assume-se que x_0 é um número dado. Uma condição necessária para uma função x^* de classe C^2 resolver o problema

$$\max(\min) \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) \text{ é livre}, \quad (3.5)$$

é que satisfaça a equação de Euler-Lagrange (3.4) e ainda a condição, dita de transversalidade,

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right|_{t=t_1} = 0. \quad (3.6)$$

Se a função $F(t, x, \dot{x})$ for côncava (convexa) nas variáveis (x, \dot{x}) para cada $t \in [t_0, t_1]$, então qualquer função admissível x^* que satisfaça a equação de Euler-Lagrange e a condição (3.6) resolve o problema de maximização (minimização).

Exemplo 3.1 *Considere-se o seguinte problema*

$$\begin{cases} \max \int_0^1 (x - \dot{x}^2) dt, \\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

Seja $f(t, x, \dot{x}) = x - \dot{x}^2$ e assumamos x^* ótimo para todo $t \in [0, 1]$. Então, pelo teorema de Euler,

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\dot{x}} f(t, x^*, \dot{x}^*) = \nabla_x f(t, x^*, \dot{x}^*), \quad \text{onde } \nabla_{\dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \text{ e } \nabla_x = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = -2\dot{x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} = -2 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \dot{x}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x} \partial x} = 0.$$

A matriz Hessiana de f é definida por

$$H_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A partir da diagonal desta matriz, afirma-se que os valores próprios são 0 e -2. Como os valores próprios são não positivos e 0 é valor próprio, H é semidefinida negativa e logo f é côncava.

Tem-se também

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = -2\dot{x} \text{ e } \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} = -2\ddot{x}.$$

Atendendo à equação de Euler

$$-2\ddot{x} = 1 \Leftrightarrow \ddot{x} = -\frac{1}{2}.$$

Primitivando a expressão e sendo $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$\dot{x}(t) = -\frac{t}{2} + C_1,$$

$$x(t) = -\frac{t^2}{4} + C_1t + C_2.$$

Dada a Condição de Transversalidade (TC), $\nabla_{\dot{x}}f(t_1, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1)) = 0$ com $t_1 = 1$

$$\dot{x}(1) = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{2} + C_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = C_1,$$

$$x(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{0}{4} + \frac{0}{2} + C_2 \Leftrightarrow 0 = C_2.$$

A função $x(t) = -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2}$ é maximizante

$$\max \int_0^1 -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} - \left(-\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 dt$$

O máximo do integral é pois

$$\begin{aligned} \int_0^1 -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} - \left(-\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 dt &= \int_0^1 -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4} dt = \int_0^1 -\frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{4} dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

4 TEORIA DE CONTROLO

Tal como referido anteriormente, em (Sydsaeter et al 2005) descreve-se a teoria de controlo ótimo na qualidade de extensão moderna do cálculo de variações. Segundo os autores, enquanto a equação de Euler-Lagrange, o resultado principal da última teoria, foi descoberta em 1744, o princípio do máximo, central na teoria de controlo ótimo, só foi desenvolvido na década de 1950, por diversos matemáticos russos (Pontryagin et al 1962).

Este princípio oferece as condições de otimização necessárias para um vasto leque de problemas dinâmicos, abrangendo todas as premissas que decorrem da teoria clássica, podendo também ser aplicado a um conjunto mais alargado de problemas.

Desde 1960, múltiplos estudos têm recorrido à teoria de controlo, aplicando-a, a título ilustrativo, à análise do crescimento económico, da tributação, da regulação da informação assimétrica, do controlo de inventário e da extração de recursos naturais e irrigações, entre outros (Sydsaeter et al 2005).

Numa primeira instância, importa clarificar a notação principal que será utilizada. Considere-se uma função u - a função de controlo - que corresponde às escolhas que um agente pode fazer a cada instante. A função pertence a um conjunto U que é fixo e fechado em \mathbb{R}^k , designado por espaço de controlo.

Definida a função u , determina-se a trajetória - função x - que constitui a única solução da equação diferencial com condição inicial $x(t_0) = \alpha$. Face ao exposto, o par $(x(t), u(t))$ é solução admissível, se cumprir as restrições do problema em estudo, por exemplo, $\dot{x}(t) = g(t, x, u)$ e $x(t_0) = \alpha$, onde g é uma função de classe C^1 .

Entre todas as soluções admissíveis, pretende-se encontrar a solução ótima, isto é, aquela que maximiza o funcional $J(u)$ - a função objetivo. O par que maximiza o funcional é denotado por (x^*, u^*) , onde u^* é o controlo ótimo e x^* a trajetória ótima associada. Os controlos admissíveis u pertencem a $KC([t_0, t_1])$ que denota a classe de funções contínuas por troços no intervalo $[t_0, t_1]$. Denote-se ainda por KC^1 o subconjunto de KC das funções cuja derivada existe exceto num número finito de pontos, sabendo que a derivada se encontra em KC . Atendendo ao proposto em (Calogero, 2014), o presente trabalho interessa-se pelo seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u) dt, \\ \dot{x}(t) = g(t, x, u), \\ x(t_0) = \alpha, \\ \max_{u \in \mathcal{C}} J(u), \\ \mathcal{C} = \{u : [t_0, t_1] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^k, u \text{ admissível}\}. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

onde t_1 está fixo, f e g são de classe C^1 e U é convexo e fechado. O controlo $u \in KC^1$ diz-se admissível se

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = g(t, x, u), \\ x(t_0) = \alpha, \end{array} \right.$$

admitir uma solução única. O conjunto de todos os controlos admissíveis será denotado por $\mathcal{C}_{(t_0, \alpha)}$. O problema (4.1) é considerado o mais simples da teoria de controlo.

Considere-se a função

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

à qual se atribui a designação de multiplicador.

Define-se a função *Hamiltoniana* $H: [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda \cdot g(t, x, u).$$

Tem-se então o seguinte resultado fundamental:

Teorema 4.1 - *Princípio do Máximo de Pontryagin*

No problema (4.1), sejam f e g funções de classe C^1 . Seja u^* um controlo ótimo e x^* a trajetória associada. Então, de acordo com o teorema 2.1 de (Calogero, 2014), existe um multiplicador $\lambda^* : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínuo tal que:

i) $\lambda^* \neq 0$ (O multiplicador é não trivial)

ii) (*Princípio Máximo Pontryagin (PMP)*) Para todo o $t \in [t_0, t_1]$,

$$u^*(t) \in \arg \max_{v \in U} H(t, x^*(t), v, \lambda^*(t)) \text{ isto é,}$$

$$H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) = \max_{v \in U} H(t, x^*(t), v, \lambda^*(t)). \quad (4.2)$$

Caso de $U^* = \mathbb{R}^k$ (PMP_0), a equação (4.2) pode ser reescrita como se segue:

$$\nabla_u H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) = 0. \quad (4.3)$$

iii) (*Equação Adjunta (AE)*)

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\nabla_x H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) \text{ para quase todo } t \in [t_0, t_1]. \quad (4.4)$$

iv) (*TC*)

$$\lambda^*(t_1) = 0. \quad (4.5)$$

Exemplo 4.1

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \int_1^3 x + 2t(1 - e^t)u dt, \\ \dot{x} = 2x + 4ut, \\ x(1) = 0, \\ 0 \leq u \leq 2. \end{array} \right.$$

Considerem-se as seguintes funções auxiliares para o Hamiltoniano $f(t, x, u) = x + 2t(1 - e^t)u$ e $g(t, x, u) = 2x + 4ut$. O Hamiltoniano tem a seguinte expressão:

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u) = x + 2t(1 - e^t)u + \lambda(2x + 4ut).$$

Aplicação do Princípio do Máximo: assume-se que (x^, u^*) é o par ótimo que resolve o problema. Seja $\lambda(t)$ uma função contínua em todo o $t \in [1, 3]$ e $u^*(t)$ o mínimo do Hamiltoniano $H(t, x(t), u(t), \lambda(t))$, pode-se dizer*

$$H(t, x^*(t), u(t), \lambda(t)) \geq H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)),$$

$$\lambda(3) = 0 \quad (TC),$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\nabla_x H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = -1 - 2\lambda \quad (AE),$$

$$\dot{\lambda}(t) + 2\lambda = -1.$$

Pode-se observar que e^{2t} é o fator integrante da Equação Diferencial Ordinária (EDO) e multiplicando-o na equação anterior tem-se

$$\dot{\lambda}(t)e^{2t} + 2e^{2t}\lambda = -e^{2t} \Leftrightarrow (e^{2t}\lambda(t))' = -(e^{2t})' \Leftrightarrow e^{2t}\lambda(t) = -\frac{e^{2t}}{2} + C \Leftrightarrow \lambda(t) = -\frac{1}{2} + Ce^{-2t}.$$

Como $\lambda(3) = 0$ então $-\frac{1}{2} + Ce^{-6} = 0$, o que implica $C = \frac{1}{2}e^6$. Substituindo na expressão de $\lambda(t)$ obtida segue-se

$$\lambda(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^6e^{-2t} \Leftrightarrow \lambda(t) = -\frac{1}{2} + \frac{e^{-2t+6}}{2} \Leftrightarrow \lambda(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t+6} - 1).$$

Aplicando a propriedade (4.2) para o problema verifica-se

$$\min_{0 \leq u \leq 2} (x^* + 2t(1 - e^t)u + \lambda(2x^* + 4tu)) = x^* + 2t(1 - e^t)u^* + \lambda(2x^* + 4tu^*) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \min_{0 \leq u \leq 2} 2t(1 - e^t)u + 4\lambda tu = 2t(1 - e^t)u^* + 4\lambda tu^*$$

$$\Leftrightarrow \min_{0 \leq u \leq 2} u(2t(1 - e^t) + 4\lambda t) = u^*(2t(1 - e^t) + 4\lambda t), \text{ onde } u^* \text{ minimiza a expressão}$$

$$u^* = \begin{cases} 0 & \text{se } 2t(1 - e^t) + 4\lambda t > 0, \\ 2 & \text{se } 2t(1 - e^t) + 4\lambda t < 0. \end{cases}$$

Como se pretende minimizar, a escolha do valor de u vai depender do sinal da equação $2t(1 - e^t) + 4\lambda t$. Sendo $\lambda(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t+6} - 1)$ obtém-se

$$\begin{cases} 2t(1 - e^t) + 4\frac{1}{2}(e^{-2t+6} - 1)t > 0 \\ 2t(1 - e^t) + 4\frac{1}{2}(e^{-2t+6} - 1)t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t(1 - e^t) + 2(e^{-2t+6} - 1)t > 0 \\ 2t - 2te^t + 2te^{-2t+6} - 2t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^t < e^{-2t+6} \\ e^t > e^{-2t+6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -2t + 6 \\ t > -2t + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t < 6 \\ 3t > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 2, \\ t > 2. \end{cases}$$

Atualizando a expressão de u^* que é definida por

$$u^* = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2, \\ 2 & \text{se } t > 2. \end{cases}$$

Caso $t < 2 \Rightarrow u = 0$

$$\dot{x} = 2x \Rightarrow (xe^{-2t})' = 0 \Leftrightarrow xe^{-2t} = C \Leftrightarrow x = Ce^{2t}.$$

Sabendo que $x(1) = 0$ então $C = 0$.

Caso $t > 2 \Rightarrow u = 2$

$$\dot{x} = 2x + 8t \Rightarrow (xe^{-2t})' = 8te^{-2t}.$$

Realizando um cálculo auxiliar para se obter a primitiva de $8te^{-2t}$ temos

$$\begin{aligned} \int 8te^{-2t} dt &= \int -4t(-2e^{-2t}) dt = [-4te^{-2t}] - \int -4(e^{-2t}) dt = \\ &= [-4te^{-2t}] - \int 2(-2)e^{-2t} dt = -4te^{-2t} - 2e^{-2t}. \end{aligned}$$

Primitivando a igualdade, obtém-se

$$xe^{-2t} = -4te^{-2t} - 2e^{-2t} + C \Leftrightarrow x = -4t - 2 + Ce^{2t}.$$

Sabendo que $x(t) = 0$ em $1 \leq t \leq 2 \Rightarrow x(2) = 0$. Seja $t = 2$

$$0 = -8 - 2 + Ce^4 \Rightarrow C = 10e^{-4}.$$

Deste modo,

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 \leq t \leq 2, \\ -4t - 2 + 10e^{2t-4} & \text{se } 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Este é a expressão do candidato a mínimo que se irá confirmar após apreciar o Teorema de Mangasarian.

Exemplo 4.2

$$\begin{cases} \max \int_0^2 (2x - 4u) dt, \\ \dot{x} = u + x, \\ x(0) = 5, \\ 0 \leq u \leq 2. \end{cases}$$

Assumam-se as seguintes funções auxiliares para o Hamiltoniano $f(t, x, u) = 2x - 4u$ e

$g(t, x, u) = u + x$. Sabe-se que $t \in [0, 2]$. Seja λ uma função contínua no intervalo $[0, 2]$. O Hamiltoniano tem a seguinte expressão

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + g(t, x, u) = 2x - 4u + \lambda(u + x).$$

Aplicando a propriedade (4.4) verifica-se

$$\dot{\lambda}(t) = -\nabla_x H(t, x, u, \lambda) = -(2 + \lambda) = -2 - \lambda \Leftrightarrow \dot{\lambda}(t) + \lambda(t) = -2.$$

O fator integrante do funcional é e^t da EDO e multiplicando-o na equação anterior tem-se

$$\dot{\lambda}e^t + \lambda e^t = -2e^t \Leftrightarrow (\lambda(t)e^t)' = -2e^t.$$

Primitivando a igualdade, obtém-se

$$\lambda(t)e^t = -2e^t + C \Leftrightarrow \lambda(t) = -2 + Ce^{-t}.$$

Como $\lambda(2) = 0$ observa-se $0 = -2 + Ce^{-2} \Leftrightarrow C = 2e^2$, obtendo a seguinte expressão para $\lambda^*(t)$

$$\lambda^*(t) = -2 + 2e^{2-t}.$$

Aplicando a propriedade (4.2) para o problema deduz-se

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq u \leq 2} \left(2x^* - 4u + \lambda^*(u + x^*) \right) &= 2x^* - 4u^* + \lambda^*(u^* + x^*) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \max_{0 \leq u \leq 2} -4u + \lambda^*u = -4u^* + \lambda^*u^* \\ &\Leftrightarrow \max_{0 \leq u \leq 2} u(\lambda^* - 4) = u^*(\lambda^* - 4), \text{ onde } u^* \text{ maximiza a expressão.} \end{aligned}$$

Caso $\lambda^*(t) \leq 4$

$$-2 + 2e^{2-t} \leq 4 \Leftrightarrow 2e^{2-t} \leq 6 \Leftrightarrow e^{2-t} \leq 3 \Leftrightarrow \ln e^{2-t} \leq \ln 3 \Leftrightarrow 2-t \leq \ln 3 \Leftrightarrow t \geq 2 - \ln 3.$$

Caso $\lambda^*(t) > 4$

$$-2 + 2e^{2-t} > 4 \Leftrightarrow 2e^{2-t} > 6 \Leftrightarrow e^{2-t} > 3 \Leftrightarrow \ln e^{2-t} > \ln 3 \Leftrightarrow 2-t > \ln 3 \Leftrightarrow 2 - \ln 3 > t.$$

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 2 - \ln 3 \leq t, \\ 2 & \text{se } 2 - \ln 3 > t. \end{cases}$$

Caso $0 \leq t < 2 - \ln 3 \Rightarrow u = 2$

$\dot{x} = u + x$ com $x(0) = 5$. Sabe-se que, $0 \leq t < 2 - \ln 3 \Rightarrow u = 2$. Com efeito,

verifica-se que

$$\dot{x} = 2 + x \Leftrightarrow \dot{x} - x = 2.$$

O fator integrante do funcional é e^{-t} . Multiplicando ambos os lados da equação pelo fator integrante, alcança-se o seguinte resultado

$$\dot{x}e^{-t} - xe^{-t} = 2e^{-t} \Leftrightarrow (xe^{-t})' = 2e^{-t} \Leftrightarrow xe^{-t} = -2e^{-t} + C \Leftrightarrow x = -2 + Ce^t.$$

Com o intuito de descobrir o valor de C , $x(0) = 5 \Rightarrow 5 = -2 + C \Leftrightarrow C = 7$. Assim, tem-se a seguinte equação para $x(t)$

$$x(t) = -2 + 7e^t.$$

Caso 2 - $\ln 3 \leq t \leq 2 \Rightarrow u = 0$ e $\dot{x} = u + x$ com $x(t) = 5$.

$$\dot{x} = x \Leftrightarrow \dot{x} - x = 0.$$

O fator integrante do funcional é e^{-t} . Multiplicando ambos os lados da equação pelo fator integrante, alcança-se o seguinte resultado

$$\dot{x}e^{-t} - xe^{-t} = 0 \Leftrightarrow (xe^{-t})' = 0 \Leftrightarrow xe^{-t} = C \Leftrightarrow x = Ce^t.$$

Com o intuito de descobrir o valor de C , $x(2 - \ln 3) = 5 \Rightarrow 5 = Ce^{2 - \ln 3} \Leftrightarrow 5 = C \frac{e^2}{e^{\ln 3}} \Leftrightarrow 5 = C \frac{e^2}{3} \Leftrightarrow C = 15e^{-2}$, logo

$$x(t) = 15e^{t-2}$$

Deste modo,

$$x^*(t) = \begin{cases} -2 + 7e^t & \text{se } 0 \leq t < 2 - \ln 3, \\ 15e^{t-2} & \text{se } 2 - \ln 3 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Esta é a expressão do candidato a máximo, que se irá confirmar após apreciar o Teorema de Mangasarian.

Teorema 4.2 - Caso Particular, Teorema 2.2 de (Calogero, 2014)

Considere-se o problema (4.1) tal que o espaço de controlo é $U = \mathbb{R}^k$ e o conjunto

$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(t_0, \alpha)}$ dos controlos admissíveis é não vazio e aberto:

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u) dt, \\ \dot{x}(t) = g(t, x, u), \\ x(t_0) = \alpha, \\ \max_{u \in \mathcal{C}} J(u), \\ \mathcal{C} = \{u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^k, u \in C([t_0, t_1])\}. \end{array} \right. \quad (4.6)$$

onde $f \in C^1([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^{n+k})$ e $g \in C^1([t_0, t_1] \times \mathbb{R}^{n+k})$.

Seja u^* um controlo ótimo e x^* a trajetória ótima associada. Então, existe um multiplicador $\lambda^* : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável tal que

$$(PMP_0) \quad \nabla_u H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) = 0, \forall t \in [t_0, t_1], \quad (4.7)$$

$$(AE) \quad \nabla_x H(t, x^*(t), v, \lambda^*(t)) = -\dot{\lambda}^*(t), \forall t \in [t_0, t_1], \quad (4.8)$$

$$(TC) \quad \lambda^*(t_1) = 0, \quad (4.9)$$

onde $H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda \cdot g(t, x, u)$.

Demonstração 4.1 - Teorema 4.2

Seja u^* controlo ótimo e x^* a trajetória correspondente que maximiza e resolve o problema (4.6).

Pretende-se demonstrar que existe $\lambda^* : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz as condições (4.7), (4.8) e (4.9).

Começando por definir uma função contínua $h = (h_1, \dots, h_k) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^k$, supõe-se que \mathcal{C} é um conjunto aberto. $\forall \epsilon^2 \in \mathbb{R}^k$ define-se $u_\epsilon : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^k$, onde $u_\epsilon \in C([t_0, t_1])$ é controlo admissível, tal que

$$u_\epsilon = u^* + h \cdot \epsilon = (u_1^* + \epsilon_1 h_1, \dots, u_k^* + \epsilon_k h_k).$$

Seja $x_\epsilon : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^k$ a trajetória associada a u_ϵ . Se $\epsilon = 0$, é possível retirar as seguintes conclusões:

$$u_0(t) = u^*(t) \quad x_0(t) = x^*(t) \quad \text{e, pela definição do problema, tem-se que } x_\epsilon(t_0) = \alpha.$$

² ϵ é um valor muito reduzido que torna u_ϵ numa vizinhança muito próxima de u^*

Considerando que h está fixo, define-se $J_h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$J_h(\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_\epsilon(t), u_\epsilon(t)) dt,$$

$$\dot{x}_\epsilon = g(t, x_\epsilon(t), u_\epsilon(t)) \Leftrightarrow 0 = g(t, x_\epsilon(t), u_\epsilon(t)) - \dot{x}_\epsilon.$$

$J_h(0) \geq J_h(\epsilon)$, uma vez que $\epsilon = 0 \Rightarrow u_0(t) = u^*(t)$, que, por sua vez, é um controle ótimo que maximiza o funcional $J_h(\epsilon)$. Por definição, conclui-se que 0 é um máximo global e, como tal é um ponto crítico em $J_h(\epsilon)$. Logo, $\nabla J_h(0) = 0$.

Seja $\lambda(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um multiplicador

$$J_h(\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_\epsilon, u_\epsilon) dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_\epsilon, u_\epsilon) + \lambda g(t, x_\epsilon, u_\epsilon) - \lambda g(t, x_\epsilon, u_\epsilon) dt =$$

$$J_h(\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_\epsilon, u_\epsilon) + \lambda(g(t, x_\epsilon, u_\epsilon) - \dot{x}_\epsilon(t)) dt.$$

Sabe-se que $g(t, x_\epsilon, u_\epsilon) - \dot{x}_\epsilon(t) = 0$ e que $f(t, x_\epsilon, u_\epsilon) + \lambda g(t, x_\epsilon, u_\epsilon) = H(t, x_\epsilon, u_\epsilon, \lambda)$, que é o Hamiltoniano. Obtém-se então a seguinte equação

$$J_h(\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} H(t, x_\epsilon, u_\epsilon, \lambda) - \dot{x}_\epsilon(t) dt.$$

Integrando por partes, obtém-se

$$J_h(\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} H(t, x_\epsilon, u_\epsilon, \lambda) + \dot{\lambda} x_\epsilon(t) dt - \lambda x_\epsilon(t) \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Sabe-se que

$$\nabla_\epsilon J_h(\epsilon) = \left(\frac{\partial J_h}{\partial \epsilon_1}(\epsilon), \dots, \frac{\partial J_h}{\partial \epsilon_i}(\epsilon), \dots, \frac{\partial J_h}{\partial \epsilon_k}(\epsilon) \right).$$

Para compreender melhor o comportamento e propriedades do funcional, recorre-se a apenas de uma das derivadas parciais, uma vez que o raciocínio é equivalente para as restantes.

Sabe-se que $\nabla_\epsilon u_\epsilon(t) = \frac{\partial}{\partial \epsilon_i}(u_1^* + \epsilon_1 h_1, \dots, u_k^* + \epsilon_k h_k) = (0, \dots, h_i, \dots, 0) = h$ e $\nabla_\epsilon x_\epsilon(t_0) = 0$, uma vez que, $x_\epsilon(t_0) = \alpha$, sendo α uma constante.

$$\frac{\partial J_h}{\partial \epsilon_i}(\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} H(t, x_\epsilon, u_\epsilon, \lambda) + \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} \dot{\lambda} x_\epsilon(t) dt - \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} \lambda x_\epsilon(t) \Big|_{t_0}^{t_1}$$

Aplicando a derivação em cadeia, pode-se verificar o caso com uma coordenada, no caso

particular de $x_\epsilon, u_\epsilon \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_i} H(t, x_\epsilon, u_\epsilon, \lambda) = \frac{\partial H}{\partial x_\epsilon} \cdot \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon_i} + \frac{\partial H}{\partial u_\epsilon} \cdot \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \epsilon_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_i} \dot{\lambda} x_\epsilon(t) = \dot{\lambda} \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon_i}(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_i} \lambda x_\epsilon(t) = \lambda \frac{\partial x_\epsilon}{\partial \epsilon_i}(t).$$

Com base nesta informação, reescreve-se o problema de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_h}{\partial \epsilon_i}(\epsilon) = & \int_{t_0}^{t_1} \nabla_x H(t, x_\epsilon, u_\epsilon, \lambda) \cdot \nabla_{\epsilon_i} x_\epsilon(t) + \nabla_u H(t, x_\epsilon, u_\epsilon, \lambda) \cdot \nabla_{\epsilon_i} u_\epsilon(t) + \\ & + \dot{\lambda}(t) \nabla_{\epsilon_i} x_\epsilon(t) dt - \lambda(t) \nabla_{\epsilon_i} x_\epsilon(t) \Big|_{t_0}^{t_1}. \end{aligned}$$

Realizando as substituições convenientes, advém

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_h}{\partial \epsilon_i}(\epsilon) = & \int_{t_0}^{t_1} \nabla_x H(t, x_\epsilon, u_\epsilon, \lambda) \cdot \nabla_{\epsilon_i} x_\epsilon(t) + \nabla_u H(t, x_\epsilon, u_\epsilon, \lambda) \cdot \nabla_{\epsilon_i} u_\epsilon(t) + \dot{\lambda} \nabla_{\epsilon_i} x_\epsilon(t) dt \\ & - \lambda(t_1) \nabla_{\epsilon_i} x_\epsilon(t_1) + \lambda(t_0) \nabla_{\epsilon_i} x_\epsilon(t_0) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial J_h}{\partial \epsilon_i}(\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\nabla_x H(t, x_\epsilon, u_\epsilon, \lambda) + \dot{\lambda}(t) \right) \cdot \nabla_{\epsilon_i} x_\epsilon(t) + \nabla_u H(t, x_\epsilon, u_\epsilon, \lambda) \cdot h dt - \lambda(t_1) \nabla_{\epsilon_i} x_\epsilon(t_1).$$

Se $\epsilon = 0$, como evidenciado anteriormente $\frac{\partial J_h}{\partial \epsilon_i}(0) = 0$, uma vez que $\nabla J_h(0) = 0$. Seja λ que satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -\nabla_x H(t, x^*, u^*, \lambda) \text{ para } t \in [t_0, t_1] & (4.8) \\ \lambda(t_1) = 0 & (4.9) \end{cases}$$

Como $\nabla_x H(t, x^*, u^*, \lambda) = \nabla_x f(t, x^*, u^*) + \lambda \nabla_x g(t, x^*, u^*)$, a equação diferencial é linear em λ . Por hipótese, existe uma solução única que resolve a equação diferencial ordinária. Seja $\lambda = \lambda^*$ com $\lambda \in AC[t_0, t_1]$.

Simplificando a derivada parcial e substituindo λ por λ^* , segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_h}{\partial \epsilon_i}(\epsilon) = & \int_{t_0}^{t_1} \left(\nabla_x H(t, x_\epsilon, u_\epsilon, \lambda^*) + \dot{\lambda}^*(t) \right) \cdot \nabla_{\epsilon_i} x_\epsilon(t) \\ & + \nabla_u H(t, x_\epsilon, u_\epsilon, \lambda^*) \cdot h_i dt - \lambda^*(t_1) \nabla_{\epsilon_i} x_\epsilon(t_1) \end{aligned}$$

Aplicando as propriedades de λ^* , conclui-se que

$$\frac{\partial J_h}{\partial \epsilon_i}(\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \nabla_u H(t, x_\epsilon, u_\epsilon, \lambda^*) \cdot h_i dt$$

$$\frac{\partial J_h}{\partial \epsilon_i}(0) = 0 \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \nabla_u H(t, x_\epsilon, u_\epsilon, \lambda^*) \cdot h_i dt = 0$$

$\forall i$ com $1 \leq i \leq k$ e $h = (h_1, \dots, h_k) \in C[t_0, t_1]$. Sendo h uma função fixada qualquer e contínua, a derivada parcial do funcional $\frac{\partial J_h}{\partial \epsilon_i}(0) = 0$, logo

$$\nabla_u H(t, x_\epsilon, u_\epsilon, \lambda^*) = 0, \text{ ou seja, condição (4.7) é respeitada.}$$

Desta forma, encontra-se $\lambda^* : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínuo, que satisfaz as condições propostas do teorema. ■

No âmbito do estudo do problema (4.1), (Calogero, 2014), pelo teorema 2.3, constata que um dos principais resultados para que a condição suficiente do controlo seja ótima se deve ao seguinte teorema.

Teorema 4.3 - Teorema Mangasarian

Considere-se o problema (4.1) com $f \in C^1$ e $g \in C^1$. Seja o espaço de controlo U convexo. Seja u^* um controlo extremal, x^* a trajetória associada e $\lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$ o multiplicador associado. Considere-se a função Hamiltoniana H e suponha-se que a função $(x, u) \mapsto H(t, x, u, \lambda^*)$ é côncava $\forall t \in [t_0, t_1]$.

Então u^* é ótimo.

Observação: Caso o problema (4.1) seja de minimização o hamiltoniano terá de ser uma função convexa.

Exemplo 4.3

$$\begin{cases} \min \int_1^3 x + 2t(1 - e^t)u dt, \\ \dot{x} = 2x + 4ut, \\ x(1) = 0, \\ 0 \leq u \leq 2. \end{cases}$$

Observam-se as seguintes funções auxiliares para o Hamiltoniano $f(t, x, u) = x + 2t(1 - e^t)u$ e $g(t, x, u) = 2x + 4ut$. O Hamiltoniano tem a seguinte expressão:

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda g(t, x, u) = x + 2t(1 - e^t)u + \lambda(2x + 4ut)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 1 + 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 2t(1 - e^t) + 4t\lambda, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} = \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} = 0.$$

A matriz Hessiana de H é definida por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz hessiana é nula, logo o Hamiltoniano é convexo. Deste modo, conclui-se, pelo teorema de Mangasarian, que o par (x^*, u^*) obtido anteriormente no exemplo (4.1) com as seguintes expressões

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2, \\ 2 & \text{se } t > 2. \end{cases}$$

$$x^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 \leq t \leq 2, \\ -4t - 2 + 10e^{2t-4} & \text{se } 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

é mínimo.

Exemplo 4.4

$$\begin{cases} \max \int_0^2 (2x - 4u) dt \\ \dot{x} = u + x \\ x(0) = 5 \\ 0 \leq u \leq 2 \end{cases}$$

Observam-se as seguintes funções auxiliares para o Hamiltoniano $f(t, x, u) = 2x - 4u$ e $g(t, x, u) = u + x$. Sabe-se que $t \in [0, 2]$. Seja λ função contínua no intervalo $[0, 2]$. O Hamiltoniano tem a seguinte expressão

$$H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + g(t, x, u) = 2x - 4u + \lambda(u + x),$$

As derivadas parciais,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 2 + \lambda, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial u} = -4 + \lambda, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial u} = \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial x} = 0.$$

A matriz Hessiana de H é nula, logo o Hamiltoniano é côncavo. Deste modo, conclui-se, pelo teorema de Mangasarian, que o par (x^*, u^*) obtido anteriormente no exemplo

(4.2) com as seguintes expressões

$$x^*(t) = \begin{cases} -2 + 7e^t & \text{se } 0 \leq t \leq 2 - \ln 3 \\ 15e^{t-2} & \text{se } 2 - \ln 3 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 2 - \ln 3 < t, \text{ isto é, } \lambda^*(t) < 4 \\ 2 & \text{se } 2 - \ln 3 > t, \text{ isto é, } \lambda^*(t) > 4 \end{cases}$$

é máximo.

Demonstração 4.2 - Teorema 4.3, no caso $U = \mathbb{R}^k$

Assume-se que $u^* : [t_0, t_1] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^k$, $x^* : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $\lambda^* : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Hipóteses:

1) As propriedades (4.7), (4.8) e (4.9) do caso particular da teorema de Pontryagin são válidas.

2) a função $(x, u) \mapsto H(t, x, u, \lambda^*)$ é côncava $\forall t \in [t_0, t_1]$.

Tese: pretende-se mostrar que u^ é ótimo.*

Sendo $H(t, x, u, \lambda^*)$ uma função côncava, por definição obtém-se a seguinte inequação

$$H(t, x, u, \lambda^*) \leq \nabla H(t, x, u, \lambda^*)((x, u) - (x^*, u^*)) + H(t, x^*, u^*, \lambda^*) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H(t, x, u, \lambda^*) \leq \nabla_x H(t, x, u, \lambda^*) \cdot (x - x^*) + \nabla_u H(t, x, u, \lambda^*) \cdot (u - u^*) + H(t, x^*, u^*, \lambda^*)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall u \in U$$

Considerando (4.8) e (4.7)

$$H(t, x, u, \lambda^*) \leq -\dot{\lambda}^* \cdot (x - x^*) + H(t, x^*, u^*, \lambda^*).$$

Como o Hamiltoniano é definido por $H(t, x, u, \lambda) = f(t, x, u) + \lambda \cdot g(t, x, u)$ e $\dot{x} = g(t, x, u)$ segue-se

$$f(t, x, u) + \lambda^* \cdot g(t, x, u) \leq -\dot{\lambda}^* \cdot (x - x^*) + f(t, x^*, u^*) + \lambda^* \cdot g(t, x^*, u^*)$$

$$\Leftrightarrow f(t, x, u) + \lambda^* \cdot \dot{x} \leq -\dot{\lambda}^* \cdot (x - x^*) + f(t, x^*, u^*) + \lambda^* \cdot \dot{x}^* \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(t, x, u) \leq -\dot{\lambda}^* \cdot (x - x^*) + f(t, x^*, u^*) + \lambda^* \cdot (\dot{x}^* - \dot{x})$$

Pode-se observar, pela derivação da multiplicação em ordem a t que

$$\dot{\lambda}^* \cdot (x - x^*) + \lambda^* \cdot (\dot{x} - \dot{x}^*) = \left(\lambda^* \cdot (x - x^*) \right)' = \frac{d}{dt}(\lambda^* \cdot (x - x^*))$$

Obtém-se assim a seguinte expressão

$$f(t, x, u) \leq -\left(\lambda^* \cdot (x - x^*) \right)' + f(t, x^*, u^*)$$

Escrevendo a equação inicial do problema, verifica-se que

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u) dt \leq \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^*, u^*) dt - \frac{d}{dt}(\lambda^* \cdot (x - x^*)) dt$$

Aplicando o teorema fundamental do cálculo

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u) dt \leq \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^*, u^*) dt - \left[\lambda^*(t)(x(t) - x^*(t)) \right]_{t_0}^{t_1}$$

$$\Leftrightarrow \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u) dt \leq \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^*, u^*) dt - \lambda^*(t_1)(x(t_1) - x^*(t_1)) + \lambda^*(t_0)(x(t_0) - x^*(t_0))$$

Sabe-se que $x(t_0) = x^*(t_0) = \alpha$ e pela condição de transversalidade (4.9), confirma-se que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u) dt &\leq \int_{t_0}^{t_1} f(t, x^*, u^*) dt \\ \Leftrightarrow J(u) &\leq J(u^*), \end{aligned}$$

ou seja, u^* é ótimo. □

5 TEORIA DE CONTROLO VS CÁLCULO DE VARIAÇÕES

Na secção anterior, apresentou-se o Teorema Principal do Cálculo de Variações. Na presente parte, comprovar-se-á que o Teorema de Euler-Lagrange é uma consequência do Teorema de Pontryagin de Controlo Ótimo, segundo o disposto por Calogero (2014) e o calculado para efeitos de demonstração neste Trabalho Final Mestrado (TFM). Na Teoria de Controlo, o controlo é designado por u . Para comprovar a ligação entre estas duas ferramentas, considera-se $u = \dot{x} = g(t, x, u)$ e o espaço de controlo U é \mathbb{R}^n . Reescrevendo

o problema inicial (4.1),

$$\left\{ \begin{array}{l} J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x}) dt, \\ x(t_0) = \alpha, \\ \max_{x \in KC^1} J(x). \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Diz-se $x^* \in KC^1$ é ótimo em (5.1) se

$$J(x) \leq J(x^*), \quad \forall x \in KC^1, \quad x(t_0) = \alpha.$$

Deste modo, chega-se ao seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{x \in KC^1} \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x}) dt, \\ x(t_0) = \alpha, \end{array} \right. \quad (5.2)$$

com $\alpha \in \mathbb{R}^n$ fixado. Geralmente, $x \in KC^1$ é utilizado no cálculo de variações. No entanto, uma vez que não existe interesse nesse pressuposto, assume-se $x \in C^1$.

Reescrevendo a Equação de Euler (3.4) para \mathbb{R}^n .

$$\frac{d}{dt} \left(\nabla_{\dot{x}} f(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \right) = \nabla_x f(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \quad (5.3)$$

De seguida, utilizam-se as propriedades (4.7), (4.8) e (4.9) do Teorema de Pontryagin para obter a expressão (5.3).

Considere-se o Hamiltoniano $H(t, x^*, u^*, \lambda^*) = f(t, x^*, u^*) + \lambda^* g(t, x^*, u^*)$. Substituindo $u = g(t, x, u)$ deduz-se que

$$\begin{aligned} H(t, x^*, u^*, \lambda^*) &= f(t, x^*, u^*) + \lambda^* u^* \\ \nabla_x H(t, x^*, u^*, \lambda^*) &= -\dot{\lambda}^*(t) \Leftrightarrow \nabla_x (f(t, x^*, u^*) + \lambda^* u^*) = -\dot{\lambda}^*(t) \\ &\Rightarrow \nabla_x f(t, x^*, u^*) = -\dot{\lambda}^*(t) \\ \nabla_u H(t, x^*, u^*, \lambda^*) &= 0 \Leftrightarrow \nabla_u (f(t, x^*, u^*) + \lambda^* u^*) = 0 \\ &\Rightarrow \nabla_u f(t, x^*, u^*) + \lambda^* = 0 \\ &\nabla_u f(t, x^*, u^*) = -\lambda^* \end{aligned} \quad (5.4)$$

Calculando a derivada em ordem a t , observa-se que

$$\frac{d}{dt} \left(\nabla_u f(t, x^*, u^*) \right) = -\dot{\lambda}^*.$$

Utilizando (5.4), substituindo-se $-\dot{\lambda}^*$ por $\nabla_x f(t, x^*, u^*)$ e obtém-se

$$\frac{d}{dt} \left(\nabla_u f(t, x^*, u^*) \right) = \nabla_x f(t, x^*, u^*).$$

Aplicando a igualdade de $\dot{x} = u$, chega-se à expressão (5.3). Por conseguinte, confirma-se a possibilidade de obter a condição de transversalidade do cálculo de variações, tal como estudado nas presentes notas e em Calogero (2014). A equação (4.9) e $\nabla_u f(t, x^*, u^*) = -\lambda^*$ implicam

$$\nabla_{\dot{x}} f(t, x^*(t_1), \dot{x}^*(t_1)) = 0.$$

Após a análise efetuada, recuperar-se-á o exemplo 3.1 no âmbito do Cálculo de Variações para proceder à sua resolução através do princípio do máximo.

Exemplo 5.1 *Considere-se o seguinte problema*

$$\begin{cases} \max \int_0^1 (x - u^2) dt, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Seja u^* o controlo ótimo e x^* a trajetória associada com $t \in [0, 1]$. Considere-se $f(t, x, u) = x - u^2$ e $g(t, x, u) = u$. Por definição, parte-se da seguinte função Hamiltoniana

$$H(t, x, u, \lambda) = x - u^2 + \lambda u.$$

Pretende-se averiguar se existe um λ^* que satisfaça as seguintes equações

$$\begin{cases} \nabla_u H(t, x^*, u^*, \lambda^*) = 0, \forall t \in [0, 1], \\ \nabla_x H(t, x^*, u^*, \lambda^*) = -\dot{\lambda}^*(t), \forall t \in [0, 1], \\ \lambda^*(t_1) = \lambda^*(1) = 0, \end{cases}$$

$$\nabla_u H(t, x^*, u^*, \lambda^*) = -2u^* + \lambda^* = 0 \Leftrightarrow \lambda^*(t) = 2u^*(t) \Leftrightarrow \frac{\lambda^*(t)}{2} = u^*(t),$$

$$\nabla_x H(t, x^*, u^*, \lambda^*) = 1 = -\dot{\lambda}^*(t) \Leftrightarrow \dot{\lambda}^*(t) = -1.$$

Primitivando a equação de modo a obter a função de $\lambda(t)$, observa-se que

$$(\lambda^*(t))' = (-1)' \Leftrightarrow \lambda^*(t) = -t + C_1.$$

Recorrendo à TC, conclui-se que $C_1 = 1$, atingindo os seguintes resultados $\lambda^*(t) = -t + 1$ e $u^*(t) = \frac{-t+1}{2}$. Sabe-se que

$$\dot{x} = \frac{\lambda(t)}{2} \Leftrightarrow \dot{x} = \frac{-t+1}{2}.$$

Primitivando a equação

$$x(t) = \frac{-t^2 + 2t}{4} + C_2.$$

Como $x(0) = 0$ então $x^*(t) = \frac{-t^2+2t}{4}$.

Calculando a matriz Hessiana para estudar a concavidade do funcional vem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = -2u, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = -2 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} = 0.$$

A matriz Hessiana de H é definida por

$$H_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A partir da diagonal da matriz H , afirma-se que os valores próprios são 0 e -2 . Como os valores próprios são ≤ 0 então H é semidefinida negativa, logo f é côncava. O par $(x^*(t), u^*(t))$ será um máximo do funcional. Substituindo x e u por x^* e u^* obtém-se o funcional

$$\begin{aligned} \int_0^1 -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} - \left(-\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 dt &= \int_0^1 -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4} dt = \int_0^1 -\frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{4} dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} - \frac{t}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \end{aligned}$$

isto é, o mesmo resultado obtido pelo método do cálculo de variações.

6 ANÁLISE CRÍTICA DE EXEMPLOS CLÁSSICOS

Neste capítulo, vão ser estudados dois exemplos clássicos, *Business Strategy* e *Optimal Savings*, de modo a ilustrar alguns casos práticos de possíveis aplicações da teoria apresentada anteriormente.

6.1 Exemplo Clássico de Estratégia de Negócio

Em (Calogero, 2014) é apresentado um exemplo de um problema geral sobre estratégia de negócio com o seguinte enunciado:

Uma fábrica produz um único bem a uma taxa $x(t)$, em t . Em cada instante, a quantidade produzida pode ser reinvestida para expandir a capacidade de produção ou vendida. A capacidade de produção inicial é $\alpha > 0$ e cresce de acordo com a taxa de reinvestimento. Considerando que o preço de venda é constante, qual é a fração $u(t)$ da produção no instante t que deve ser reinvestida para maximizar o total de vendas ao longo de um período fixo $[0, T]$?

Introduza-se a função $u : [0, T] \rightarrow [0, 1]$. Se $u(t)$ é a fração de $x(t)$ reinvestida, $(1 - u(t))x(t)$ é a parte de $x(t)$ vendida no instante t a um preço fixo $P > 0$. Então o problema é

$$\begin{cases} \max_{x \in C} \int_0^T (1 - u(t))x(t)P dt, \\ \dot{x} = ux, \\ x(0) = \alpha, \\ C = \{u : [0, T] \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}, u \in KC\}, \end{cases} \quad (6.1)$$

onde α e T são positivos e fixos.

(Calogero, 2014) apresenta a resolução do problema (6.1). Considere-se o Hamiltoniano $H = (1 - u)x + \lambda xu$. O teorema 4.1 implica que

$$\begin{aligned} H(t, x^*, u^*, \lambda^*) &= \max_{v \in [0, 1]} H(t, x^*, v, \lambda^*) \\ \Rightarrow (1 - u^*)x^* + \lambda^* x^* u^* &= \max_{v \in [0, 1]} [(1 - v)x^* + \lambda^* x^* v] \\ \Rightarrow u^* x^* (\lambda^* - 1) &= \max_{v \in [0, 1]} [vx^* (\lambda^* - 1)] \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda}^* \Rightarrow 1 - u^* + \lambda^* u^* = -\dot{\lambda}^* \quad (6.3)$$

$$\lambda^*(T) = 0 \quad (6.4)$$

Como x^* é contínuo, $x^*(0) = \alpha > 0$ e $u \geq 0$, por $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\dot{x}^* \Rightarrow \dot{x}^* = x^* u^*$ obtém-se $\dot{x}^* = x^* u^* \geq 0$ em $[0, T]$. Como, $x^*(t) \geq \alpha$ para todo $t \in [0, T]$. A relação (6.2) é simplificada em

$$u^*(\lambda^* - 1) = \max_{v \in [0, 1]} v(\lambda^* - 1).$$

Então,

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda^*(t) - 1 < 0, \\ 1 & \text{se } \lambda^*(t) - 1 > 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Claramente, tem-se dois casos: $\lambda^*(t) < 1$ o que implica $u^* = 0$ e $\lambda^*(t) > 1$ implicando $u^* = 1$. Como o multiplicador é uma função contínua e satisfaz (6.4), seja τ' o menor instante do intervalo $[0, T]$ tal que $\lambda^*(t) < 1$ no intervalo $]\tau', T]$.

Começando pelo caso no intervalo $[\tau', T]$, quando se aplica a equação adjunta (6.3), (6.5) e $\lambda^*(t) < 1$, tem-se a seguinte EDO e a respetiva solução

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^*(t) = -1 \\ \lambda^*(T) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda^*(t) = T - t, \quad \forall t \in [\tau', T]. \quad (6.6)$$

Deste modo tem-se dois casos $T \leq 1$ (Caso A) e $T > 1$ (Caso B) que definem qual deve ser o valor de τ' . Em $T \leq 1$ sabe-se que τ' será 0, portanto $u^* = 0$ e $x^* = \alpha$ em $[0, T]$. Na figura 4 pode-se retirar a conclusão que se segue.

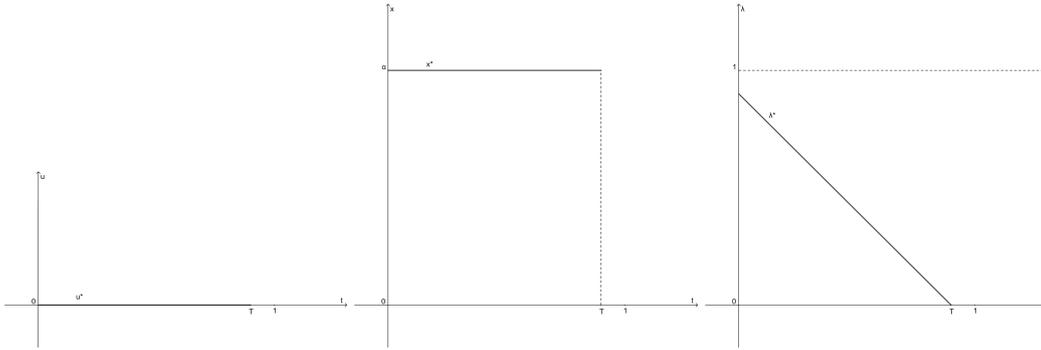


Fig. 4: *Bussiness Strategy: Caso A*

De um posto de vista económico, se o horizonte temporal é curto, a estratégia ótima é vender toda a produção sem reinvestimento.

Em $T > 1$, substituindo a expressão $\lambda^*(t) < 1$ por (6.6), deduz-se $T - t < 1 \Leftrightarrow T - 1 < t$. Assim, tendo em conta (6.5), tem-se que $\tau' = T - 1$ e logo, por (6.6), $\lambda^*(T - 1) = T - (T - 1) = 1$. No segundo caso, no intervalo $[0, T - 1]$ e $\lambda^*(t) > 1$, usando (6.5) e a equação adjunta (6.3) obtém-se a seguinte EDO e respetiva solução

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^*(t) + \lambda^* = 0 \\ \lambda^*(T - 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda^*(t) = e^{T-t-1}, \quad \text{para } t \in [0, T - 1].$$

Passando ao cálculo da solução de trajetória, sabe-se que a continuidade da função de x^* ,

a condição inicial $x(0) = \alpha$ e a dinâmica implicam, em $[0, T - 1]$

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^* \\ x^*(0) = \alpha \end{cases} \Rightarrow x^*(t) = \alpha e^t.$$

e em $[T - 1, T]$,

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = 0 \\ x^*(T - 1) = \alpha e^{T-1} \end{cases} \Rightarrow x^*(t) = \alpha e^{T-1}.$$

Consequentemente, tem-se o seguinte sistema para solução de $x^*(t)$,

$$x^*(t) = \begin{cases} \alpha e^t & \text{para } 0 < t \leq T - 1, \\ \alpha e^{T-1} & \text{para } T - 1 < t \leq T. \end{cases} \quad (6.7)$$

Então escrevendo o sistema para solução de $\lambda^*(t)$ e substituindo as suas condições em (6.5) obtém-se os seguintes resultados

$$\lambda^*(t) = \begin{cases} e^{T-t-1} & \text{para } 0 < t \leq T - 1, \\ T - t & \text{para } T - 1 < t \leq T. \end{cases} \quad (6.8)$$

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < t \leq T - 1, \\ 0 & \text{para } T - 1 < t \leq T. \end{cases} \quad (6.9)$$

Sendo as funções $u^*(t)$, $x^*(t)$ e $\lambda^*(t)$ expostas gráficamente na figura 5.

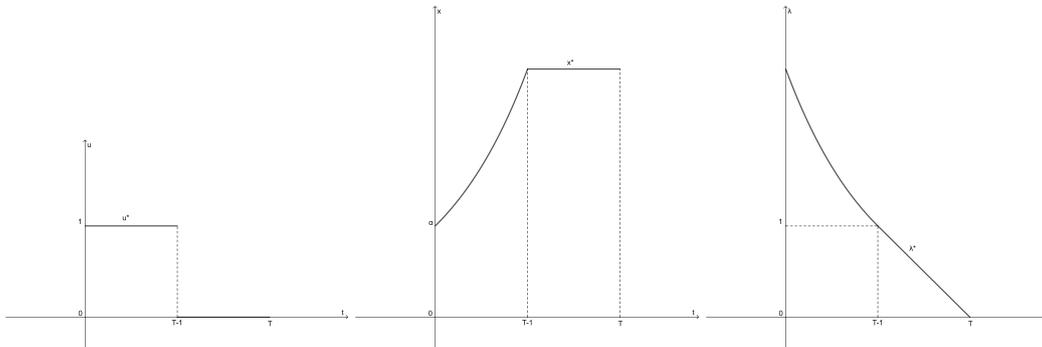


Fig. 5: *Bussiness Strategy: Caso B*

Numa situação económica, onde a escolha de estratégia de negócio pode ser encarada num horizonte de médio e longo prazo ($T > 1$), a estratégia ótima é direcionar todos produtos para aumentar a produção num período inicial e então vender toda a produção apenas no período final. Apesar do hamiltoniano não ser côncavo, (Calogero, 2014) apresenta o teorema 2.4 (*Arrow*) que permite concluir que estas expressões são solução ótima do problema.

6.2 Exemplo Clássico de Otimização de Poupança

(Sydsaeter et al 2005) descreve-nos o exemplo clássico de Ramsey. De seguida, apresenta-se o enunciado e a explicação das variáveis deste modelo:

Começemos por introduzir um problema de teoria de crescimento ótimo, relacionado com a tese desenvolvida por Ramsey no âmbito da otimização do nível de poupança. Os seguintes postulados constituem hoje a base da teoria macroeconómica mais recente.

A pergunta a que se quer dar resposta é: "Quanto deve poupar uma nação?".

Notação Básica:

$K = K(t)$ o stock de capital; $C = C(t)$ o consumo; $Y = Y(t)$ o Produto Nacional Líquido (PNL) no momento t .

Supõe-se que $Y = f(K)$ e, para cada t , assume-se que

$$f(K(t)) = C(t) + \dot{K}(t). \quad (6.10)$$

$Y(t) = f(K(t))$, divide-se em consumo, $C(t)$, e investimento, $\dot{K}(t)$. Seja $K(0) = K_0$ o stock de capital inicial existente no presente (momento $t = 0$). Para cada escolha da função de investimento $\dot{K}(t)$ no intervalo $[0, T]$, o capital é determinado por

$$K(t) = K_0 + \int_0^t \dot{K}(\epsilon) d\epsilon \quad (6.11)$$

enquanto (6.10) determina $C(t)$.

A questão colocada por Ramsey, considerando as premissas elencadas, versa sobre o grau de investimento desejado. O aumento do consumo e a diminuição do investimento num instante inicial implica uma diminuição de stock de capital nos instantes seguintes que por sua vez, leva a uma diminuição do consumo nesse mesmo instante.

Níveis elevados de consumo no presente são, por si só, preferíveis, no entanto, a equação (6.10) indica-nos que conduzem a taxas de investimento inferiores que, por sua vez, originam stock de capital inferior no futuro, reduzindo assim as possibilidades de consumo futuras. Tem, assim, de se encontrar um equilíbrio entre consumir no presente e investir para o futuro.

Para este fim, assumam-se que a sociedade tem uma função de utilidade U , onde $U(C)$ é a utilidade (fluxo) de que o país usufrui quando o consumo total é C . A função é crescente e estritamente côncava.

Existe uma taxa de desconto r , na medida em que o presente é preferível ao futuro.

Assim, para $t \geq 0$ multiplicamos $U(C(t))$ pelo fator de desconto e^{-rt} .

O objetivo da política de investimento passa por selecionar $K(t)$ para t em $[0, T]$ de modo a obter a maior utilidade total descontada possível no período $[0, T]$.

Outra forma de formular este problema passa por encontrar a trajetória do stock de capital $K = K(t)$, com $K(0) = K_0$, que maximiza

$$J = \max \int_0^T U(C(t))e^{-rt} dt = \max \int_0^T U(f(K(t)) - \dot{K}(t))e^{-rt} dt, \quad (6.12)$$

$$K(0) = K_0, \quad K(T) = K_T.$$

Após a introdução deste conteúdo, (Sydsaeter et al 2005), baseados no Cálculo de Variações, encontram uma equação de Euler-Lagrange e deduzem a expressão de variação relativa do consumo que irá resolver o problema com a função objetivo (6.12).

Resolução do Exemplo Clássico *Optimal Savings*

Seja $F(t, K, \dot{K}) = U(C)e^{-rt}$, em que $C = f(K) - \dot{K}$:

Como $\frac{\partial F}{\partial K} = U'(C)f'(K)e^{-rt}$ e $\frac{\partial F}{\partial \dot{K}} = -U'(C)e^{-rt}$, então a equação de Euler Lagrange reduz-se a $U'(C)f'(K)e^{-rt} - \frac{d}{dt}(-U'(C)e^{-rt}) = 0$.

Tanto $U'(C)$ como e^{-rt} dependem de t , logo, tendo em conta a regra do produto para a diferenciação, $\frac{d}{dt}(U'(C)e^{-rt}) = U''(C)\dot{C}e^{-rt} - rU'(C)e^{-rt}$. Multiplicando por e^{rt} e reajustando, segue-se que:

$$U'(C)(f'(K) - r) + U''(C)\dot{C} = 0. \quad (6.13)$$

Obtém-se:

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{U'(C)}{CU''(C)}(r - f'(K)) = \frac{r - f'(K)}{W},$$

onde $W = El_c U'(C) = \frac{CU''(C)}{U'(C)}$ é a elasticidade da utilidade marginal relativamente ao consumo. Como se assume que $U'(C) > 0$ e $U''(C) < 0$ então, $W < 0$, pelo que:

$$\frac{\dot{C}}{C} > 0 \Leftrightarrow f'(K) > r$$

Consequentemente, o consumo cresce se e só se a produtividade marginal do capital exceder a taxa de desconto.

Por outro lado, se $f'(K) < r$, então os agentes estão com grande apetência para con-

sumir, sendo o nível de consumo inicialmente alto e decrescente ao longo do tempo.

Usando o facto de $\dot{C} = f'(K)\dot{K} - \ddot{K}$, na equação (6.13), e dividindo-o por $U''(C)$, obtém-se:

$$\ddot{K} - f'(K)\dot{K} + \frac{U'(C)}{U''(C)}(r - f'(K)) = 0 \quad (6.14)$$

A equação (6.14) é uma Equação Diferencial de segunda ordem, através da qual só se obtêm soluções explícitas em casos especiais. Não obstante, do ponto de vista económico, as conclusões são particularmente interessantes.

Para uma análise e interpretação deste problema será resolvida a equação (6.14) com duas expressões $f(K)$ distintas e, posteriormente, serão tiradas as devidas conclusões.

As seguintes equações descrevem a função de consumo e a taxa de variação do consumo:

$$C = f(K) - \dot{K} \quad \text{e} \quad \dot{C} = f'(K)\dot{K} - \ddot{K}. \quad (6.15)$$

Sejam a função de utilidade e as respetivas derivadas de primeira e segunda ordem:

$$U(C) = 2\sqrt{C} \quad U'(C) = C^{-\frac{1}{2}} \quad U''(C) = -\frac{1}{2}C^{-\frac{3}{2}}. \quad (6.16)$$

Da expressão $\frac{U'(C)}{U''(C)}$, vem $\frac{C^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}C^{-\frac{3}{2}}} = -2C = 2(\dot{K} - f(K))$. Substituindo em (6.14) fica-se com a equação:

$$\ddot{K} - f'(K)\dot{K} + 2(\dot{K} - f(K))(r - f'(K)) = 0. \quad (6.17)$$

A equação (6.17) pode ser usada em diferentes casos, consoante o tipo de expressão do Produto Nacional Líquido. A expressão $\dot{K}(t)$ obtida que respeite as condições $K(0) = K_0$ e $K(T) = K_T$, $f(K)$ for côncava e $U(C)$ crescente e côncava então será solução ótima do problema. Por (6.16), sabe-se que $U(C)$ é crescente e côncava.

Caso em que o Produto Nacional Líquido é o Stock de Capital ($f(K) = bK$)

Considere-se $b = 1$, $r = 2$. Sabe-se que $f'(K) = b = 1$. Substituindo na equação (6.17), obtém-se:

$$\ddot{K} + \dot{K} - 2K = 0$$

Resolvendo a equação diferencial, resulta a seguinte equação que define o stock de capital em t :

$$K(t) = Ae^{-2t} + Be^t \quad (6.18)$$

Suponha-se que $A = B = 1$. Isto implica que $K(t) = e^t + e^{-2t}$, $\dot{K}(t) = e^t - 2e^{-2t}$. Substituindo em (6.15), vem $C(t) = 3e^{-2t}$.

As expressões de $K(t) = e^t + e^{-2t}$ e $U(C) = 2\sqrt{3e^{-2t}}$ otimizam o funcional (6.12), uma vez que resolve a equação (6.17) e $f(K)$ é uma função côncava.

Ou seja, para um intervalo de tempo $[0, T]$, obtém-se o seguinte resultado:

$$J = \frac{-2(e^{-2T})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

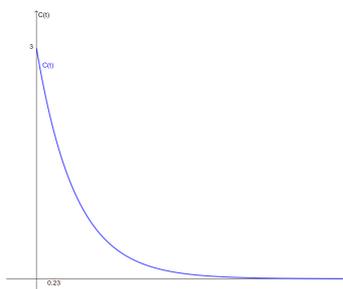


Fig. 6: *Optimal Savings: Consumo C(t) - Caso f = bK*

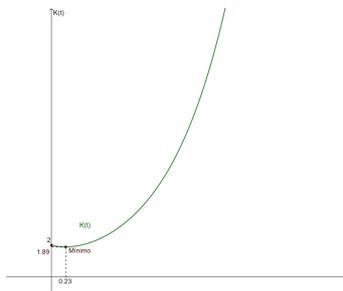


Fig. 7: *Optimal Savings: Stock de Capital e Produto Nacional Líquido K(t) e Y(t) - Caso f = bK*

Na fig.6, pode-se observar que o consumo $C(t)$, ao longo do tempo, diminui, isto é, o produto é usado a uma maior velocidade num período inicial, tendo 3 unidades de início, e à medida que o tempo passa a quantidade consumida aproxima-se de 0. No gráfico 7, observa-se que o stock de capital e o produto nacional líquido $K(t)$ tem um comportamento semelhante a uma função quadrática, com mínimo em $t \approx 0.23$ tendo o valor de 1.89 de stock de capital. Neste, vê-se que o stock nacional inicial de 2 unidades decresce até ao período $t \approx 0.23$ para um valor de 1.89 unidades de stock de capital e aumenta ao longo do período de tempo seguinte. O investimento $\dot{K}(t)$ é crescente ao longo do tempo, como se pode observar na fig. 8. Inicialmente, o investimento bruto não é suficiente para compensar a perda de valor do stock de capital, ou seja a depreciação,

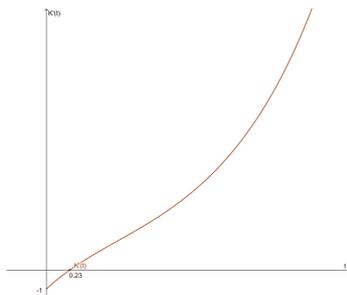


Fig. 8: *Optimal Savings: Investimento $\dot{K}(t)$ - Caso $f = bK$*

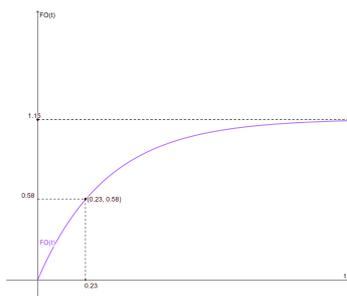


Fig. 9: *Optimal Savings: Função Objetivo $J(t)$ - Caso $f = bK$*

sendo que, a partir de $t \approx 0.23$, o investimento líquido começa a tomar valores positivos. O funcional, ilustrado pela fig. 9, que se pretende maximizar, é descrito como uma função não decrescente que, com o avançar do tempo, se vai tornando constante.

Resumindo, até ao período aproximado de $t \approx 0.23$ o consumo, o stock de capital e o Produto Nacional Líquido decrescem e a taxa de investimento aumenta, atingindo valores positivos. Neste ponto $t \approx 0.23$, a função objetivo, que representa o lucro, toma o valor de 0.58. Após este período (para $t > 0.23$) o consumo continua a decrescer até ao valor 0. Por outro lado, o stock de capital, o Produto Nacional Líquido e o investimento crescem. No entanto, neste período, o lucro torna-se constante com valor de 1.15 unidades.

Numa perspetiva económica, é aconselhado uma diminuição do consumo, uma vez que existe impaciência para consumir, como tal, tendo-se tem-se até $t = 0.23$ para se obter um aumento stock e de receita ao longo do tempo.

Caso em que o Produto Nacional Líquido é o quadrado do Stock de Capital

$$(f(K) = aK^2)$$

Considerando $a = 1, r = 0$ vem que $f'(K) = a2K = 2K$ e de (6.17) encontra-se a seguinte equação:

$$\ddot{K} - 6\dot{K}K + 4K^3 = 0.$$

A partir das capacidades da calculadora computacional *wolfram alpha* resolveu-se a

Equação Diferencial que define o stock de capital em t :

$$K(t) = -\frac{4e^{\frac{2A}{9}}(B+t)}{4e^{\frac{2A}{9}}t^2 + 8e^{\frac{2A}{9}}Bt + 4e^{\frac{2A}{9}}B^2 + 3} \tag{6.19}$$

Suponha-se que $A = 0$ e $B = -2$. Assim vem, $K(t) = -\frac{4(-2+t)}{4t^2 + 3 - 16t + 16}$, $\dot{K}(t) = \frac{16t^2 - 64t + 52}{16t^4 - 128t^3 + 408t^2 - 608t + 361}$.

Substituindo em (6.15) obtém-se $C(t) = \frac{4(8t^2 - 32t + 29)}{(4t^2 - 16t + 19)^2}$.

As expressões de $K(t) = -\frac{4(-2+t)}{4t^2 + 3 - 16t + 16}$ e $U(C) = 2\sqrt{\frac{4(8t^2 - 32t + 29)}{4t^2 - 16t + 19}}$ otimizam o funcional (6.12), uma vez que resolvem (6.17) e $f(K)$ é uma função côncava.

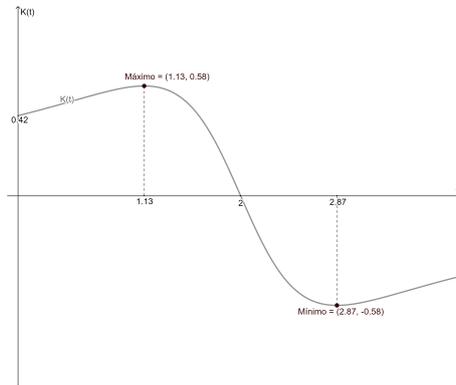


Fig. 10: *Optimal Savings: Stock de Capital $K(t)$ - Caso $f(K) = aK^2$*

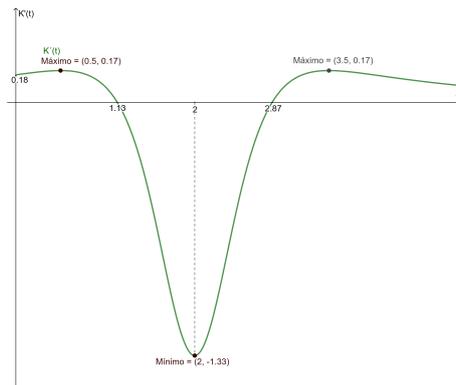


Fig. 11: *Optimal Savings: Investimento $\dot{K}(t)$ - Caso $f(K) = aK^2$*

Na fig.10, pode-se observar que o stock de capital inicial tem o valor aproximado de 0.42 unidades. $K(t)$ cresce até $t \approx 1.13$, sendo 0.58 o máximo de unidades de stock que

o país terá. Para $t > 1.13$ o stock decresce até atingir o valor 0 em $t = 2$. Para $t > 2$ o valor $K(t) < 0$ não fará sentido para interpretação.

Na fig.11, pode-se observar que o investimento inicial tem o valor aproximado de 0.14 unidades. $\dot{K}(t)$ cresce até $t \approx 0.5$, sendo 0.17 o máximo de unidades de investimento que deverá ser feito pelo país. Para $t > 0.5$ o investimento decresce até $t = 2$, onde $\dot{K}(2) = -1.13$, é o mínimo a investir atingindo o valor 0 em $t = 1.13$. E apartir deste instante, o investimento bruto não é suficiente para compensar a perda de valor do stock de capital, ou seja a depreciação, sendo o valor líquido do investimento negativo. Em $t > 2$ a função de investimento é crescente até $t \approx 3.5$ tendo como imagem 0.17. Ao longo do tempo tem outra raiz em $t \approx 2.87$, após o ponto $(3.5, 0.17)$, e diminui até atingir novamente o 0.

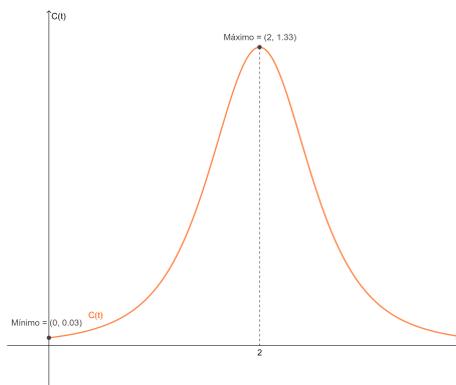


Fig. 12: *Optimal Savings: Consumo $C(t)$ - Caso $f(K) = aK^2$*

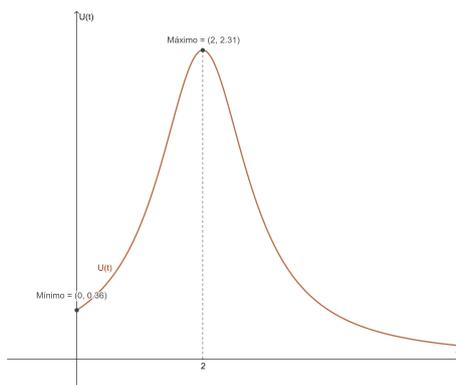


Fig. 13: *Optimal Savings: Utilidade $U(t)$ - Caso $f(K) = aK^2$*

A interpretação da função de consumo e de utilidade é muito idêntica, uma vez que estão interligadas. Ao observar as figuras 12 e 13, pode-se concluir que $C_0 \approx 0.03$ e $U_0 \approx 0.36$. Ambas são crescentes até $t = 2$ onde atingem os seus máximos (1.33 e 2.31). Isto é, a população irá consumir mais até $t = 2$. Após $t = 2$, o nível de consumo e o usufruto da população vão aproximar-se de 0.

O produto nacional líquido tem um comportamento semelhante ao da função de investimento, mas sempre > 0 . Pela fig.14, pode-se observar que o PNL_0 tem o valor aproximado de 0.18 unidades. $Y(t)$ cresce até $t \approx 1.13$, sendo 0.33 o máximo de unidades de PNL obtido pelo país. Para $t > 1.13$ o PNL decresce até $t = 2$, onde $Y(2) = 0$ é o valor mínimo de receita. Em $t > 2$ a função é crescente até $t \approx 2.87$ tendo como imagem 0.33. Após esse ponto a receita diminui até atingir 0.

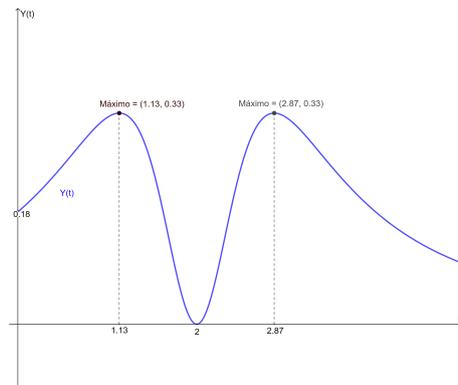


Fig. 14: *Optimal Savings: Produto Nacional Líquido $Y(t)$ - Caso $f(K) = aK^2$*

Numa perspectiva económica, fará sentido realizar um investimento de modo a aumentar o stock que implicará ter num futuro, em $t = 1.13$, um maior usufruto e consumo por parte da população.

7 COMENTÁRIOS FINAIS

Ao longo deste trabalho, foi possível conhecer a Teoria de Controlo Ótimo e compreender os pontos chave e essenciais da mesma.

Foram apresentados vários conceitos elementares de Matemática, como por exemplo, os de pontos e funções de máximo e mínimo, pontos estacionários, formas quadráticas, menores principais ou concavidade de funções, que ajudaram a compreender melhor a teoria.

Foi feita uma abordagem ao Cálculo de Variações na resolução de problemas, expondo o seu tipo, os vários teoremas clássicos e a definição da equação de Euler-Lagrange que deram origem à Teoria de Controlo Ótimo. Foram apresentadas duas demonstrações, a do caso particular do Teorema de Pontryagin e a do Teorema de Mangasarian.

De igual modo, foram apresentados dois exemplos clássicos: o problema de estratégia de negócio (*Strategy Bussiness*) e o problema de poupança de recursos (*Optimal Savings*). Com base nestes problemas, foram realizados os diferentes cálculos necessários, com base na Teoria, e foi feita a interpretação das soluções finais obtidas para a resolução dos mesmos.

Note-se ainda que esta metodologia tem também limitações. De facto, existem problemas que não conseguem ser traduzidos por equações diferenciais e existem outros cuja definição das respetivas equações é demasiado complexa. Além disso, o nível de dificuldade dos cálculos pode ser elevado, tornando, por vezes, difícil a obtenção de uma solução, mesmo com o recurso a *softwares* matemáticos.

Deste modo, o estudo apresentado enfoca na aplicação da teoria do controle na economia, utilizando métodos matemáticos modernos de otimização dinâmica e equações diferenciais para analisar o modelo apresentado por Frank Ramsey. Esse modelo, baseado em modelos desenvolvidos por economistas clássicos e contemporâneos, introduziu novas ideias à teoria do crescimento, abordando o comportamento competitivo, a dinâmica de equilíbrio, a acumulação de capital físico e humano, o progresso tecnológico e o poder monopolista. As condições de otimização que Ramsey introduziu ainda são amplamente utilizadas na análise económica moderna em várias áreas, tornando seu modelo uma ilustração adequada da aplicação da teoria do controle na economia.

Em suma, este é um documento que pode ser usado por quem queira compreender as bases e fundamentos da Teoria de Controlo Ótimo e procure aplicá-la para a tomada de decisão, em problemas dinâmicos em que se pretende maximizar ou minimizar um objetivo.

8 REFERÊNCIAS

- Bryson, Arthur E. (1996). Optimal Control-1950 to 1985. *IEEE Control Systems Magazine*. 16 (3): 26-33.
- Calogero, Andrea (2014), Notes on Optimal Control Theory with economic models and exercises. University of Milan, Bicocca.
- Cline, Douglas (2017), Variational Principles in Classical Mechanics, University of Rochester River Campus Libraries.
- Kneebone, G.T. (1963). *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics: An Introductory Survey*: Dover. p. 4.
- Knight, Frank H. (1944). Diminishing Returns from Investment. *Journal of Political Economy*, 52, March, 26-47.
- Luenberger, David G. (1979). *Optimal Control. Introduction to Dynamic Systems*. New York: John Wiley & Sons. pp. 393-435.
- Malthus, Thomas R. (1798). *An Essay on the Principle of Population*. London: W. Pickering, 1986.
- Oxford English Dictionary (2012). Oxford University Press.
- Pianigiani, Ottorino (1907). *Matematica, Matematica (em italiano)*. Vocabolario Etimologico della Lingua Italiana. Facsimile Publisher.
- Pontryagin, L., Boltanskii, V., Gamkrelidze, R., Mishchenko, E. (1962), *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience Publishers Wiley.
- Ramana (2007). *Applied Mathematics*. Tata McGraw-Hill Education. p. 2.10
- Ramsey, Frank (1928). A Mathematical Theory of Saving. *Economic Journal*, 38, December, 543-559.
- Ricardo, David (1817). *On the Principles of Political Economy and Taxation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1951.
- Ross, I. M. (2009). *A Primer on Pontryagin's Principle in Optimal Control*. Collegiate Publishers.

- Ross, Isaac (2015). *A primer on Pontryagin's principle in optimal control*. San Francisco: Collegiate Publishers.
- Schumpeter, Joseph A. (1934). *The Theory of Economic Development*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Smith, Adam (1776). *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*. New York: Random House, 1937.
- Sund, Terje (2014), *Lectures on Optimal Control Theory*. University of Oslo.
- Sydsaeter, Knut, Hammond, Peter, Seirstad, Atle, Strom, Arne (2005), *Further Mathematics for Economics Analysis*, Pearson Education Limited, FT Prentice Hall.
- Tobies, Renate; Neunzert, Helmut (2012). *Iris Runge: A Life at the Crossroads of Mathematics, Science, and Industry*. Springer. p. 9.
- Yadav, D. K. (2017). Exact definition of mathematics. *International Research Journal of Mathematics, Engineering and IT*, 4(1), 34-42.
- Young, Allyn (1928). Increasing Returns and Economic Progress. *Economic Journal*, 38, December, 527-542.