

MESTRADO EM
MÉTODOS QUANTITATIVOS PARA A DECISÃO
ECONÓMICA E EMPRESARIAL

TRABALHO FINAL DE MESTRADO
PROJETO

PRICING EM SERVIÇOS DE CONTABILIDADE: CASO DE
ESTUDO EM PORTUGAL

CATARINA MARGARIDA LOPES MADUREIRA LOUREIRO

OUTUBRO 2019

MESTRADO EM
MÉTODOS QUANTITATIVOS PARA A DECISÃO
ECONÓMICA E EMPRESARIAL

TRABALHO FINAL DE MESTRADO
PROJETO

PRICING EM SERVIÇOS DE CONTABILIDADE: CASO DE
ESTUDO EM PORTUGAL

CATARINA MARGARIDA LOPES MADUREIRA LOUREIRO

ORIENTAÇÃO:

JOSÉ PEDRO ROMANA GAIVÃO

OUTUBRO 2019

Agradecimentos

A todos os que estiveram ao meu lado durante este período e que, de alguma forma, contribuíram com o seu tempo, a sua experiência e o seu apoio o meu muito obrigado.

Resumo

O trabalho final de mestrado teve como objetivo estudar a otimização dos preços nos serviços de contabilidade em Portugal e formalizar um modelo matemático para determinar o preço ótimo a apresentar a uma dada carteira de clientes.

Este trabalho foi realizado em cooperação com a empresa HM Finance que opera no ramo de contabilidade na região de Lisboa. Neste âmbito o sócio-gerente da empresa concedeu à mestranda uma entrevista na qual a elucidou sobre como, em geral, uma microempresa em Portugal formaliza os seus preços. Foi também averiguada a realidade no Brasil e na Finlândia através de estudos prévios.

O suporte teórico do presente trabalho incidiu maioritariamente no estudo feito por Robert Phillips em “*Pricing and Revenue Optimization*” (Phillips, 2005) onde são apresentadas as abordagens tradicionais de *pricing* e o Modelo Básico de Otimização do Preço.

Depois desta abordagem teórica foi construído um modelo, readaptado do artigo “*Some mathematical aspects of price optimisation*” (Hashorva, Ratovomirija, Tamraz, & Bai, 2017) onde o objetivo foi estudar o modo de calcular uma tarifa ótima no âmbito de uma seguradora. O modelo proposto pretende dar a conhecer qual a variação, em percentagem, que será possível afetar ao preço na renovação anual dos contratos sem pôr em causa a desistência do mesmo. Depois da formulação do modelo, o próximo passo será a aplicação do mesmo. Só desta forma será possível refletir sobre a relevância do modelo na prática.

Palavras-chave: *Pricing*; Otimização de preços; Serviços de contabilidade; Programação Quadrática.

Abstract

The final master's project aimed to study price optimization in accounting services in Portugal and to formalize a mathematical model to determine the optimal price to present to a client portfolio.

This work was carried out in cooperation with the company HM Finance that operates in the accounting area in the Lisbon region. In this context, the managing partner of the company gave the master student an interview in which he explained how a microenterprise in Portugal determines its prices. The reality in Brazil and Finland were also investigated through previous studies.

The theoretical support of the present work was focused mainly on the study done by Robert Phillips in “Pricing and Revenue Optimization” (Phillips, 2005) where the traditional pricing approaches and the Basic Price Optimization Model are presented.

Following this theoretical approach, a model was built, readapted from the article “Some mathematical aspects of price optimization” (Hashorva, Ratovomirija, Tamraz, & Bai, 2017) where the aim was to study how to calculate an optimal tariff for actuaries. The proposed model intends to determine how much, percentage-wise, an annual contract renovation fee can be increased without resulting in the loss of said contract. After formulating the model, the next step will be to apply it in a real environment. Only this way will it be possible to reflect the relevance of it.

Keywords: Pricing; Pricing Optimization; Accounting services; Quadratic programming.

Índice

| | |
|---|-----------|
| Introdução | 1 |
| Capítulo 1 – Revisão de Literatura | 2 |
| 1.1 <i>Pricing</i> | 2 |
| 1.3 Modelo básico de otimização do preço | 7 |
| O objetivo principal do vendedor, na maioria dos casos, é conseguir maximizar a contribuição total. Nestes casos, o modelo básico de otimização da contribuição total quando o vendedor está a vender um único produto a um único preço é:..... | 7 |
| 1.4 <i>Pricing</i> de serviços | 12 |
| Capítulo 2 - Caso de Estudo em Portugal: HM Finance | 16 |
| 2.1 Apresentação da empresa | 16 |
| 2.2 Realidade atual de <i>pricing</i> | 17 |
| 2.3 Reflexão das realidades apresentadas | 19 |
| Capítulo 3 - Modelo Matemático para a Otimização dos Preços das Avenças de Contabilidade | 20 |
| 3.1 Enunciado do problema | 20 |
| 3.2 Resolução | 25 |
| 3.2.1 Sem restrições | 25 |
| 3.2.2. Com restrições..... | 27 |
| 3.3 Exemplo | 31 |
| Conclusão..... | 33 |
| Bibliografia | 34 |

Índice de Tabelas

| | |
|----------------|----|
| Tabela 1 | 2 |
| Tabela 2 | 31 |
| Tabela 3 | 31 |
| Tabela 4 | 32 |
| Tabela 5 | 32 |

Índice de Figuras

| | |
|----------------|----|
| Figura 1 | 11 |
| Figura 2 | 25 |
| Figura 3 | 26 |

Introdução

A realidade de *pricing* em serviços em Portugal e no panorama internacional é uma temática que levanta grandes questões, tanto para o consumidor como para o prestador de serviços.

A temática sobre qual recai este trabalho final de mestrado resultou do contacto com esta mesma problemática. A proximidade com o trabalho que é realizado a nível de empresas de contabilidade fez com que sobressaísse a complexidade do processo de valorização dos serviços e a necessidade de um método de formação de preço mais eficiente.

O presente trabalho pretende desenvolver um modelo matemático para otimizar o preço apresentado nas avenças de contabilidade. Este será construído com base em modelos de otimização do preço previamente estudados. Foi utilizada uma estratégia metodológica mista que consistiu numa análise de artigos e dados já existentes (método quantitativo) e de uma entrevista ao sócio-gerente de uma empresa de contabilidade situada da região de Lisboa (método qualitativo).

O trabalho encontra-se dividido em três capítulos. O primeiro capítulo, subdividido em quatro pontos, apresenta uma breve introdução sobre *pricing* e quais as técnicas tradicionais. Introduce o tema *Pricing and Revenue Optimization*, os estudos sobre o modelo básico de otimização de preços e são apresentadas duas realidades distintas em empresas de contabilidade. O segundo capítulo apresenta o caso de estudo da empresa HM Finance descrevendo a realidade atual na formação dos preços de uma empresa nacional. No terceiro capítulo é desenvolvido um modelo matemático, adaptado do artigo “*Some mathematical aspects of price optimisation*” (Hashorva, Ratovomirija, Tamraz, & Bai, 2017), com o intuito de maximizar os preços dos serviços sem perturbar a adesão dos clientes aos mesmos. Por fim são retiradas conclusões relativas ao trabalho realizado.

Capítulo 1 – Revisão de Literatura

1.1 Pricing

Hoje em dia as empresas têm de estar à altura dos desafios de *pricing* – processo de formação do preço. Num mercado cada vez mais competitivo, as empresas têm de adotar técnicas onde os seus preços, para além de serem apelativos para o consumidor, lhes permitam obter o melhor retorno possível. A formação do preço de um bem ou de um serviço de uma empresa não pode ser definido somente a partir dos custos inerentes à sua produção. Será de pouco uso calcular o preço a partir dos custos se no fim este não for apelativo para o cliente. É importante que a formação dos preços reflita também a procura e a concorrência do momento.

As técnicas de otimização de preços integram os custos, os consumidores e a concorrência na formação dos preços para maximizar a receita.

Existem outras abordagens de *pricing* mais tradicionais que dão ênfase apenas a um dos aspetos especificados – custo, concorrência ou consumidores.

Tabela 1

Abordagens tradicionais de pricing

| Abordagem | Baseia-se em | Área de aplicação |
|---------------------|--------------|-------------------|
| <i>Cost-plus</i> | Custos | Finanças |
| <i>Market-based</i> | Concorrência | Vendas |
| <i>Value-based</i> | Consumidores | Marketing |

Fonte: (Phillips, 2005, p.22)

A Tabela 1 sintetiza as técnicas tradicionais de *pricing*, sua abordagem, em que se baseiam e que aspetos ignoram.

Na estratégia de ***cost-plus pricing***, tal como o nome indica, o preço é calculado tendo em conta os custos de produção. O preço forma-se adicionando uma margem pretendida ao custo de produção do produto. É a técnica mais antiga de *pricing* e continua a ser a mais utilizada no mercado. A grande desvantagem desta técnica é o facto de desprezar o que o cliente está realmente disposto a pagar pelo produto. “Calcular os preços sem ter qualquer referência ao que os clientes estão dispostos a pagar pelo produto é uma loucura” (Phillips, 2005, p.23.). *Cost-plus pricing* não põe em prática a

diferenciação do preço para cada segmento de clientes. Para além disso, a complexidade do cálculo dos custos é desvantajosa. A maioria destes cálculos são feitos a partir de apreciações subjetivas e a informação que utilizam para a definição do preço é relativa a períodos passados. Nada garante que nos próximos períodos não existam alterações nos produtos a produzir que impliquem alteração de custos.

A partir da técnica de *market-based pricing* o preço que a empresa define é igual ao preço apresentado no mercado, ou seja, não existe realmente uma discussão sobre o preço a aplicar. Trata-se de uma abordagem utilizada por aqueles que tentam acompanhar os líderes do mercado, por exemplo. Nestas situações a empresa readapta a sua produção de acordo com o preço implementado no mercado. Tem como desvantagem deixar a concorrência definir os preços. Desta forma o perigo da empresa não obter o retorno necessário é mais elevado. A empresa que aplica este método assume que a concorrência apresenta a mesma qualidade e que os custos são os mesmos (Symonds, 1982).

A terceira técnica tradicional de *pricing*, *value-based pricing*, defende a prática de preços “personalizados” para cada tipo de cliente, o valor que o cliente está disposto a pagar conduz ao preço a aplicar. No entanto, definir o valor que o cliente está disposto a pagar a cada momento é na prática impossível. Esta técnica apenas seria possível num cenário utópico onde a empresa em questão fosse a única no mercado a oferecer determinado produto sem ter qualquer tipo de concorrência. Assim, cobrar-se-ia o valor que o cliente estivesse disposto a pagar e ter-se-ia de assumir que esse preço é superior aos custos incrementais.

Os custos incrementais calculam-se a partir da diferença entre os custos totais que a empresa teria caso produzisse o bem e o custo total caso a empresa decidisse não o produzir. O cálculo dos custos incrementais só é possível tendo grande conhecimento do bem a ser produzido. Para além de conhecer os custos diretamente relacionados com a sua produção, é necessário saber quais os custos adicionais quando se toma a decisão de o produzir. E o contrário também, ou seja, conseguir estimar os custos que se formam na não produção do bem. O modo como o cálculo dos custos incrementais é realizado advém de uma técnica utilizada na contabilidade de custos, o método ABC (*activity-based costing*), que consiste em identificar os custos e alocá-los à atividade correspondente (Greene & Metwalli, 2001).

Todas as abordagens acima descritas ignoram aspetos importantes no problema de *pricing*. Existem vantagens e desvantagens para cada método e, desta forma, não é recomendável que uma empresa utilize apenas uma das abordagens. A empresa,

dependendo da fase em se encontra, vai alternando a importância que dá a cada um dos métodos.

1.2 Pricing and Revenue Optimization

O objetivo principal de *Pricing and Revenue Optimization* (PRO) é obter o preço ideal para todos os produtos, para cada tipo de cliente, usando a maior quantidade possível de informação disponível. Obriga a um processo de atualização, avaliação e tomada de decisão constante para responder às alterações do mercado e às alterações dos custos. Este processo inclui atividades operacionais que envolvem configurações e atualizações do preço e as atividades de apoio que providenciam informação necessária para a atividade operacional, tal como os objetivos e regras da empresa, o segmento do mercado e atualizações da resposta ao preço (Phillips, 2005).

PRO pode ser formulado como um problema de otimização, onde o objetivo é maximizar a contribuição total. A contribuição total resulta da soma das margens de todos os produtos vendidos num determinado período. A margem é a diferença entre o preço de venda e os custos incrementais. As restrições apresentadas nesta formulação podem ser restrições de capacidade, de inventário ou regras específicas da empresa. O estudo que se apresenta de seguida foi baseado na obra de Phillip, R. L. (2005).

Para formular a função objetivo do problema de PRO é necessário incluir os seus elementos principais – os custos incrementais e a função de resposta ao preço.

A **função de resposta ao preço** (*price-response function*), $d(p)$, representa a procura de um produto em função do preço p . Esta função tem as seguintes propriedades:

1. É não negativa, isto é, $d(p) \geq 0$ para $p \geq 0$.
2. É uma função diferenciável.
3. É uma função limitada.
4. É decrescente, ou seja, $d'(p) \leq 0$, para todo o $p \geq 0$.

A sensibilidade do preço é determinada através de medidas como o declive e a elasticidade. O declive demonstra como a procura se varia com a alteração do preço, é igual à divisão entre a diferença da procura com a diferença dos preços,

$$\delta(p_2, p_1) = \frac{d(p_2) - d(p_1)}{p_2 - p_1}. \quad (1.1)$$

A função $\delta(p_2, p_1)$ é uma taxa de variação média. A taxa de variação média é sempre menor ou igual a zero uma vez que a função de resposta ao preço é decrescente.

À medida que p_2 se aproxima de p_1 , a determinação do declive pode ser feita somente através de p_1 . O cálculo é feito através do limite

$$\delta(p_1) = \lim_{h \rightarrow 0} [d(p_1 + h) - d(p_1)]/h = d'(p_1). \quad (1.2)$$

A elasticidade do preço é o simétrico do rácio entre as percentagens de alteração da procura e a percentagem da alteração no preço, ou seja

$$\epsilon(p_1, p_2) = - \frac{[d(p_2) - d(p_1)]p_1}{[p_2 - p_1]d(p_1)}, \quad (1.3)$$

em que $\epsilon(p_1, p_2)$ diz-nos a elasticidade do preço quando o preço p_1 altera para p_2 . O sinal negativo apresentado no início da equação garante que a elasticidade do preço seja sempre não negativa.

No entanto a elasticidade do preço num único ponto, ponto de elasticidade em p_1 , pode ser calculada aplicando o limite à equação da elasticidade do preço, à medida que p_2 se aproxima de p_1 .

$$\epsilon(p_1) = -d'(p_1)p_1/d(p_1). \quad (1.4)$$

A função de resposta ao preço está interligada com o comportamento do cliente. Um indivíduo efetuará uma compra se, e apenas se, o preço for inferior à sua vontade de pagar máxima – *maximum willingness to pay*. Caso este tenha uma vontade de pagar igual a 0€, ou menos, não irá efetuar nenhuma compra, independentemente do preço. A função *willingness to pay*, por vezes abreviada em *w.t.p.*, reflete o comportamento do cliente – para cada bem ou serviço, cada potencial consumidor tem uma vontade de pagar.

Define-se a função $w(x)$ para representar a distribuição *w.t.p.* da população, onde x representa os preços que os clientes poderão estar dispostos a pagar. Então, para quaisquer valores, a fração da população que tem *w.t.p.* entre p_1 e p_2 é dada por

$$\int_{p_1}^{p_2} w(x) dx. \quad (1.5)$$

Pode-se obter $d(p)$ a partir da distribuição *w.t.p.*

$$d(p) = D \int_p^{\infty} w(x) dx \quad (1.6)$$

onde $D = d(0)$ representa o máximo que a procura atinge.

É possível derivar a distribuição *w.t.p.* a partir da função resposta ao preço.

Obtém-se,

$$w(x) = -d'(x)/d(0). \quad (1.7)$$

Exemplo:

O mercado potencial para os cadernos com argolas é de $D = 20.000$ e a *willingness to pay* é distribuída uniformemente entre 0€ e 10€ como é ilustrado na figura 1. Isto significa que,

$$w(x) = \begin{cases} 1/10 & \text{se } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1.8)$$

Aplica-se (1.6) para derivar a curva de resposta ao preço correspondente:

$$\begin{aligned} d(p) &= 20.000 \int_p^{10} (1/10) dx \\ &= 20.000(1 - p/10) \\ &= 20.000 - 2.000p. \end{aligned}$$

A curva de resposta ao preço $d(p) = 20.000 - 2.000p$ é uma linha reta com $d(0) = 20.000$ e um preço fixo de 10€.

O exemplo ilustra um princípio geral:

“Uma distribuição willingness-to-pay uniforme corresponde a uma função de resposta ao preço linear, e vice-versa.”

1.3 Modelo básico de otimização do preço

O objetivo principal do vendedor, na maioria dos casos, é conseguir maximizar a contribuição total. Nestes casos, o modelo básico de otimização da contribuição total quando o vendedor está a vender um único produto a um único preço é:

$$m(p) = (p - c)d(p) \quad (1.9)$$

onde $m(p)$ é a contribuição total e c os custos incrementais.

O problema básico de otimização é dado por,

$$\max_p m(p). \quad (1.10)$$

Este problema não apresenta restrições, assim, para se resolver o problema basta derivar $m(p)$ e igualar a zero. Assumindo que $m(p)$ é uma função côncava, o preço que maximiza a contribuição total é calculado igualando $m'(p)$ a 0.

Calculando a derivada de (1.9),

$$m'(p) = d'(p)(p - c) + d(p), \quad (1.11)$$

obtém-se,

$$\begin{aligned} m'(p) &= 0 \\ \Leftrightarrow d'(p)(p - c) + d(p) &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Considerando p^* o preço que maximiza a contribuição total, vem

$$d(p^*) = -d'(p^*)(p^* - c). \quad (1.13)$$

A equação apresentada nesta forma não fornece grande esclarecimento, mas, a partir dela é possível desenvolver três condições úteis para a otimização de preços.

$$p^* d'(p^*) + d(p^*) = c d'(p^*) \quad (1.14)$$

Ao desenvolver a equação (1.13) verifica-se que a receita marginal é igual aos custos marginais. Ou seja, a contribuição vai ser maximizada quando existir igualdade. Na parte esquerda da equação (1.14) consta a receita marginal, esta vai apresentar valores inferiores a zero quando os preços forem elevados, quando os preços forem baixos apresentará valores superiores a zero. A receita marginal mostra o valor adicional de receita que o vendedor poderia vir a ter com um aumento unitário dos preços. O custo marginal à direita, apresenta valores iguais ou inferiores a zero pois um aumento nos

preços traduz-se numa diminuição da procura que no fim vai resultar numa diminuição dos custos.

“A contribuição total é maximizada no problema básico de otimização de preços no preço em que a receita marginal iguala os custos marginais” (Phillips, 2005, p.64).

A segunda condição, que surge ao desenvolver a equação (1.13), está relacionada com a elasticidade pontual.

Rescrevendo a equação (1.11), recorrendo a (1.4),

$$\begin{aligned} m'(p) &= d(p) \left[\frac{d'(p)p}{d(p)} + 1 \right] - d'(p)c \\ &= d(p)[1 - \epsilon(p)] - d'(p)c. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Observando o segundo termo do lado direito da equação, sabe-se que será sempre superior ou igual a zero desde que $d'(p) \leq 0$. Se $d(p) > 0$, então $m'(p)$ será sempre superior a zero se $\epsilon(p) < 1$.

“Se o ponto de elasticidade no preço atual é inferior a 1, podemos aumentar a contribuição total aumentando o preço” (Phillips, 2005, p.64).

No entanto, o preço não poderá ser aumentado infinitamente. Haverá um momento em que as perdas em vendas superarão o ganho proveniente do aumento do preço, pois com o aumento do preço a elasticidade também aumentará.

Desenvolvendo a equação $m'(p^*) = 0$, sendo p^* o preço que maximiza a contribuição total, é possível encontrar (1.15) chegando à conclusão que,

$$\begin{aligned} d(p^*) &= -d'(p^*)(p^* - c) \\ \Leftrightarrow -d'(p^*)/d(p^*) &= 1/(p^* - c) \\ \Leftrightarrow -d'(p^*)p^*/d(p^*) &= p^*/(p^* - c) \\ \Leftrightarrow \epsilon(p^*) &= p^*/(p^* - c). \end{aligned} \quad (1.16)$$

O rácio da margem contributiva é dado por $(p - c)/p$, deste modo, a igualdade apresentada diz-nos que o ponto de elasticidade é igual ao inverso do rácio da margem contributiva.

“No preço ótimo, o rácio da margem de contribuição é igual ao inverso do ponto de elasticidade.” (Phillips, 2005, p.64).

Desenvolvendo a equação (1.16) em ordem a p^* , obtemos uma equação que, a partir da elasticidade e dos custos, devolve o preço ótimo.

$$p^* = \frac{\epsilon(p^*)}{\epsilon(p^*) - 1} \times c \quad (1.17).$$

No entanto existem perspetivas diferentes de empresa para empresa. Para uma empresa em que a política seja maximizar a receita total, o modelo acima especificado não é o correto, pois o modelo apresentado tem como objetivo a maximização da contribuição total.

Para maximizar a receita total deve resolver-se o problema:

$$\max_p R(p) \quad (1.18)$$

onde $R(p) = d(p)p$.

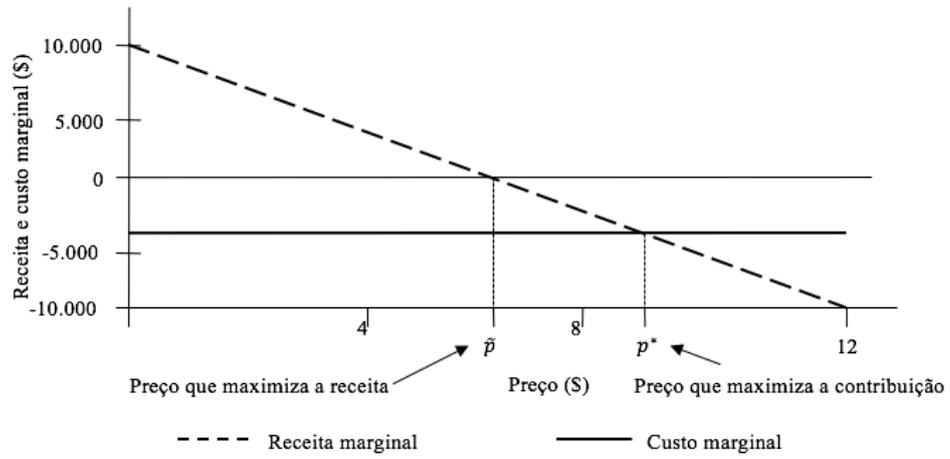
Visto que o objetivo é determinar o preço \tilde{p} que maximiza a receita este pode ser calculado derivando $R(p)$ e igualando a zero.

$$R'(p) = d'(p)p + d(p) = 0. \quad (1.19)$$

Ou seja, $\tilde{p} = \frac{-d(p)}{d'(p)}$.

É possível concluir que enquanto a curva da receita marginal for decrescente, o preço que maximiza a receita será sempre inferior ao preço que maximiza a contribuição total. Tal como foi concluído anteriormente, o preço que maximiza a contribuição total dá-se quando a receita marginal é igual aos custos marginais, ou seja, quando as duas linhas se interseam. Para além disso, o preço que maximiza a receita é determinado quando a margem da receita é igual a zero, tal como se observa através da figura 1.

Figura 1
Receita Marginal e Custo Marginal



Fonte: (Phillips, 2005, p.68).

1.4 *Pricing* de serviços

Todos os produtos e serviços têm um preço, mas estabelecer o preço de um serviço pode ser controverso. Para definir o preço é necessário ter em conta a soma de todos os valores que os consumidores são capazes de oferecer para usufruir ou possuir certos bens (Kotler, et al., 2005).

A formalização dos preços em serviços possui um aspeto de intangibilidade. É uma situação complexa na medida em que não existem referências fixas relativamente a que aspetos considerar na sua formação. É possível identificar o custo da produção de um bem, porém o cálculo do valor dos trabalhadores e o valor do tempo consumido é mais complexo. Quando se trata de um bem vai sempre existir um valor inicial de referência. Dependendo do método utilizado para calcular o valor este será influenciado por diferentes fatores, como por exemplo, pelo custo no método *cost-plus pricing* e pelos valores apresentados no mercado no método *market-based pricing*.

Se se conhecer bem o serviço em causa consegue-se determinar quais são as variáveis imprescindíveis para que o preço a aplicar reflita todos os custos utilizados na sua execução. Para além destes, existem todos os outros custos que as empresas têm, que podem não ser específicos à sua atividade. Devem estar refletidos os custos relativos ao material que a empresa utiliza diariamente, o custo dos vencimentos do pessoal que constitui a empresa e os custos gerais como renda, eletricidade, comunicações, seguros etc. (Wasserman, 2009).

Pricing de serviços de contabilidade

Danielle V. Silveira e Paulo Schmidt apresentaram um estudo aplicado a um escritório situado em Porto Alegre, Brasil. O artigo tem como objetivo definir quais os fatores que influenciam a formação dos preços nos serviços de contabilidade. De acordo com os autores, a formação do preço trata-se de um desafio pois existe uma grande “dificuldade em definir o valor dos serviços prestados pelas empresas de contabilidade, pela escassez de material de referência e devido ao facto da sociedade em geral não ter a perceção da constituição dos preços dos respetivos serviços.” (Silveira & Schmidt, 2016)

O estudo reflete a situação atual nos serviços de contabilidade do Brasil. Apresenta uma listagem de quais os serviços incluídos na realização dos serviços de contabilidade

de uma empresa e por fim o que na realidade o escritório de contabilidade estudado define como variáveis para a formação do preço.

Os autores concluíram que os principais fatores influenciadores na formação do preço para o sócio da empresa são os custos da estrutura interna do escritório – mão de obra direta, despesas mensais básicas – e o tempo despendido com a realização do trabalho, ou seja, valor/hora. Para além destes, a empresa realiza uma ficha técnica interna com o propósito de reunir todas as informações mais importantes dos clientes como a dimensão do património, o número de fornecedores, número de clientes, trabalhadores, instituições bancárias e informações fiscais. Através desta é mensurada a complexidade e dificuldade do serviço de acordo com o respetivo cliente e assim é possível começar a determinar um preço justo tendo em conta as características do cliente. Por fim, a empresa estudada usufrui do seguro de responsabilidade civil. Isto significa que o valor do seguro é uma das variáveis consideradas na formação do preço. O seguro de responsabilidade civil tem o propósito de dar mais estabilidade às empresas de contabilidade. Os escritórios de contabilidade ficam à frente de todas as responsabilidades fiscais. Nos momentos em que, por algum motivo, a situação seja mais complexa, o processo se atrase ou existam falhas nestas entregas, o seguro de responsabilidade civil faz com que o escritório não saia tão prejudicado com coimas e outras multas que podem advir do incumprimento destas responsabilidades. No Brasil existe uma tabela de referência de honorários, mas que no caso em questão o sócio da empresa afirma que é apenas indicativa. “O mercado, sendo livre, possibilita aos escritórios o poder de precificar acima ou abaixo do valor da tabela”. (Silveira & Schmidt, 2016, p.17).

Um estudo realizado na Finlândia (Hilli, 2011) propôs-se determinar como as microempresas no ramo da contabilidade definem o preço dos seus serviços e se os contabilistas consideram difícil a definição destes preços. Teve como objetivo dar a conhecer que fatores têm em consideração ao criar uma estrutura de preços.

O autor deste estudo realizou entrevistas a oito contabilistas que começaram a sua própria empresa na zona rural da Finlândia, todas elas microempresas com um a dez empregados. As conclusões relativas ao modo como estas definem o preço dos seus serviços variaram bastante de empresa para empresa.

Relativamente ao uso do valor hora existem opiniões distintas. Um dos entrevistados afirmou que apenas utiliza o valor hora. Outros opõem-se ao uso do valor hora pois afirma

que não é possível comprovar as horas despendidas com o cliente. Alguns contabilistas vêem este método como injusto.

Cinco dos entrevistados utilizam uma avença mensal que engloba as operações regulares como a entrega das declarações fiscais e a realização dos recibos de vencimento. No entanto, quando realizam operações fora das mencionadas, como por exemplo a entrega de um balanço, o preço já será mensurado através do valor hora. Um dos entrevistados tem um preço à parte para a entrega da folha do balanço, outro tem um valor base para a mensalidade que depois será acrescido o tempo consumido na realização de balanços. Dois dos entrevistados afirmaram que o preço na realização da folha do balanço depende da dimensão da empresa pois em grandes empresas as tarefas consomem mais tempo, fazendo sentido utilizar o valor hora.

Em resumo, obtive as seguintes respostas dos oito entrevistados: dois utilizam o preço de mercado para formar o preço das declarações fiscais; um dos entrevistados tem um preço para as declarações fiscais separado do seu valor por hora; quatro utilizam um valor hora definido como método de *pricing*; um utiliza um valor mínimo base e as declarações fiscais vão ser consideradas através do valor hora definido. Todos os oito entrevistados utilizam o preço de mercado no que toca à definição do preço da realização dos recibos de vencimento, sendo que dois deles oferecem a possibilidade de um preço fixo na realização dos recibos de vencimento. O autor conclui que o *pricing* das declarações fiscais varia significativamente entre os contabilistas, mas o método utilizado na execução dos recibos de vencimento é idêntico para todos os entrevistados.

As respostas informaram que três dos entrevistados não tomam em consideração os gastos em material, grande parte porque consome muito tempo estar em constante atualização da utilização do material para cada cliente da empresa. Apenas três dos entrevistados cobram custos diretos do material utilizado, como por exemplo pastas e os restantes só têm em conta as despesas relativas a correio.

A maioria dos entrevistados afirmou que ao longo dos anos enfrentaram desafios de *pricing* e que se trata de uma discussão presente nas suas empresas. Disseram também que gostariam de aperfeiçoar os seus métodos de *pricing* visto que sentem que a sua abordagem atual não responde às suas necessidades. Um dos entrevistados disse que tinha um plano de cronometrar cada tarefa e ajustar o preço de acordo com o resultado. Outro dos entrevistados queria desenvolver o seu método de *pricing* atribuindo um valor a cada tarefa de forma a poder especificar que tipo de serviço e que preço aplicar a cada um dos consumidores (Hilli, 2011).

Em suma, o estudo mostra que apesar das características semelhantes – micro entidades com menos de dez empregados onde os contabilistas iniciaram atividade na mesma região da Finlândia– não se trata de um grupo homogêneo. As abordagens de *pricing* que cada empresa estudada apresenta são diferentes, contudo “devem ser estudados como um único grupo com experiências e ideias únicas” (Hilli, 2011, p.31).

No contexto dos artigos estudados é possível concluir que *pricing* é algo que não é tido em grande consideração. Tanto no Brasil como na Finlândia, os métodos utilizados pelas empresas de contabilidade analisadas não são muito rigorosos. Utilizam essencialmente o valor hora ou uma avença mensal e os custos básicos que as empresas têm com a sua atividade nem são tidos em consideração, mais especificamente no caso de estudo da Finlândia. Poderá dizer-se que os métodos utilizados são bastante rudimentares. Existe ainda muita margem para se melhorar o modo como as empresas que prestam serviços de contabilidade formam os seus preços.

Desenvolver um modelo que permita maximizar a receita destas empresas é o objetivo deste estudo, mas primeiro é necessário estudar a realidade de hoje em dia nas empresas de contabilidade em Portugal.

Capítulo 2 - Caso de Estudo em Portugal: HM Finance

2.1 Apresentação da empresa

Para iniciar o estudo relativo ao modo como as microempresas que prestam serviços de contabilidade em Portugal formam os preços foi realizada uma entrevista ao sócio-gerente da empresa HM Finance. Apesar de não ser possível extrapolar o panorama nacional a partir de uma única microempresa este foi o ponto de partida a este estudo.

A HM Finance é uma empresa situada na região de Lisboa, fundada em 2016. Desde a sua criação que aposta numa política de proximidade com o cliente e é apologista da cooperação e honestidade entre o cliente e a empresa. Atualmente presta serviços de contabilidade a mais de 70 clientes com atividades distintas.

A equipa da HM Finance, constituída por seis elementos, garante a responsabilidade técnica e fiscal pelos contabilistas certificados que a ela pertencem. Conta com um departamento de contabilidade e outro de recursos humanos.

No departamento de contabilidade, os serviços incluem: a organização, classificação e lançamento de documentos contabilísticos no sistema informático certificado de acordo com o Sistema de Normalização Contabilística; a realização das conciliações de contas correntes de Bancos, conciliação de contas correntes de clientes, fornecedores e outros prestadores de serviços; validação e submissão do ficheiro SAFT-PT; cálculo e preenchimento de declarações de impostos (guias de retenções na fonte); preenchimento e envio das declarações fiscais anuais, como por exemplo o Modelo 22; apuramento e entrega dos pagamentos por conta e especiais por conta de IRC; elaboração de balancetes mensais ou trimestrais; elaboração do balanço e outras demonstrações financeiras. A HM Finance também providencia serviços de contabilidade analítica e gestão de terceiros. A contabilidade analítica presta serviços que incluem: a realização de um seguimento permanente da evolução dos custos e receitas das principais contas, de forma a poder detetar atempadamente quaisquer desvios; permite acompanhar e separar os vários custos e rendimentos de cada projeto ou atividade; a contabilização é feita através de centros analíticos. A gestão de terceiros implica a análise e controle das contas correntes dos clientes e a emissão dos recibos.

No departamento de recursos humanos estão incluídos: os serviços de admissão dos colaboradores das empresas dos clientes na Segurança Social assim como a elaboração da ficha do trabalhador no sistema informático certificado e a inscrição dos

mesmos nos fundos de compensação; redação dos contratos e respetivas renovações; o processamento salarial; o cumprimento fiscal (Autoridade Tributária e Declaração Mensal de Remunerações) e contributivo (Segurança Social); a declaração anual de IRS dos responsáveis pela empresa; a validação e controle das faturas pessoais registados no e-fatura.

2.2 Realidade atual de *pricing*

O processo de integração de um cliente na empresa HM Finance começa por uma reunião onde o sócio-gerente e o potencial cliente discutem qual a atividade e quais os objetivos da empresa. É importante que o cliente já tenha algumas noções dos seus gastos e dos valores faturados. Durante essa reunião é mensurada a dimensão da empresa do potencial cliente através da avaliação de vários pontos críticos: o valor de faturação, que por norma quanto maior o seu valor maior o volume de documentos entregues que necessitam de tratamento contabilístico; o número de contas bancárias, pois cada uma obriga a uma reconciliação bancária; o modo de faturação, se é a própria empresa ou se cabe ao escritório de contabilidade emitir as faturas; o número de colaboradores que cada empresa tem associados, entre outros.

Após o consentimento de ambas as partes é assinado um contrato. Neste contrato encontra-se definido com mais detalhe todos os serviços prestados mensalmente e anualmente pela HM Finance. O preço encontra-se especificado por cada tipo de serviço – contabilidade, contabilidade analítica, recursos humanos e gestão de terceiros – sendo que estes serão prestados de acordo com a necessidade do cliente.

No contrato consta o pré-aviso do pagamento do 13º mês. A avença extra é justificada pelo incremento de trabalho adjacente da entrega das declarações de fecho de ano. Por fim, existe uma cláusula no contrato que estabelece que caso o cliente desista dos serviços da HM Finance a dada altura do ano terá de pagar as avenças em falta até ao final do ano.

A HM Finance adota avenças mensais para todos os seus clientes. Estas avenças são baseadas nas informações recolhidas na reunião inicial, mas não só. Para além das informações recolhidas que se encontraram refletidas no valor da avença, existem outras variáveis tidas em conta. O sócio-gerente fez previamente um apuramento dos custos fixos do escritório, o gasto na renda, água, eletricidade, equipamento informático, licenças para a utilização do sistema informático certificado, com maior peso, a mão de

obra direta. Concluiu que os valores dos custos fixos tinham de se encontrar refletidos na definição do preço das avenças mensais.

Existem outros serviços que por serem realizados pontualmente serão cobrados no momento da sua realização, como por exemplo, a realização de contratos aquando da contratação de pessoal e o pedido da deslocação do contabilista a uma repartição de finanças e à segurança social. A formalização do preço nestes momentos altera-se, pois, o serviço de deslocação do contabilista está definido através de um valor hora e a redação dos contratos de trabalho apresentam um valor unitário previamente estabelecido.

Por fim, existe outro fator que é tido em consideração na formação do preço das avenças – o preço de mercado. O sócio-gerente considera que este fator tem o maior peso na formação das avenças pois permite definir um valor “base” para depois sim adaptar a cada cliente e a cada escritório. O valor das avenças apresentados nos contratos são objeto de avaliação semestral ou anual dependendo da fase em que a empresa se encontra. As exigências contabilísticas e as exigências dos clientes estão em constante alteração. Desta forma, a empresa propõe a renovação do valor das avenças para se manter sempre atualizada.

A situação atual em Portugal não permite que existam valores tabelados para os preços a praticar pelos serviços de contabilidade o que, para o sócio-gerente é uma menovalia. A falta de orientação nesse sentido dificulta a definição dos preços. Esta situação faz com que, por exemplo, outros prestadores do mesmo serviço apresentem preços *low-cost* desvalorizando o serviço e a profissão.

Por fim questionou-se qual a maior dificuldade ou impedimento na definição dos preços neste momento. O sócio-gerente respondeu que a falta de perceção por parte dos clientes relativamente ao modo como a profissão funciona dificulta a “justificação” dos preços apresentados.

Contudo, o sócio-gerente encontra-se otimista pois apesar de existirem dificuldades neste campo a tendência será para que as técnicas de *pricing* sejam desenvolvidas e que venham em auxílio desta problemática.

2.3 Reflexão das realidades apresentadas

Refletindo sobre os três casos apresentados pode-se afirmar que o caso português se assemelha à realidade apresentada no artigo brasileiro. Ambos fazem uma avaliação inicial do cliente, o escritório brasileiro através de uma ficha técnica e a HM Finance através de uma reunião inicial com o cliente. Ao formar os preços têm em conta um fator de peso - os custos de estrutura interna do escritório. Para além disso, os dois sócios-gerentes das empresas dos artigos estudados apontam como dificuldade na definição dos preços a falta de percepção, por parte da sociedade, na constituição dos preços dos serviços em causa. Por outro lado, a realidade estudada no artigo da Finlândia encontra-se distante da realidade apresentada no caso de estudo em Portugal. Como o artigo finlandês apresenta a realidade de vários escritórios é difícil estabelecer um padrão. No entanto, é possível observar que na maioria dos escritórios estudados existe uma avença mensal mínima à qual vão sendo adicionados valores de acordo com as tarefas que o cliente pede. Uma situação semelhante ao caso de estudo português reside na insatisfação nas técnicas de *pricing* aplicadas até ao momento.

Os vários cenários estudados apontam para uma conclusão semelhante. Todos os casos sentem que as técnicas de *pricing* não respondem às necessidades das empresas que prestam serviços de contabilidade.

Capítulo 3 - Modelo Matemático para a Otimização dos Preços das Avenças de Contabilidade

Neste capítulo é desenvolvido um modelo matemático, adaptado do modelo descrito por Hashorva, et al. (2017), que teve como objetivo o cálculo da tarifa ótima de uma carteira de clientes de uma seguradora tendo em consideração uma taxa mínima de retenção.

3.1 Enunciado do problema

Admita-se uma empresa de contabilidade que presta um conjunto de M serviços e dispõe de um conjunto de N clientes.

Anualmente, a empresa renova e avalia os preços praticados e apresenta os novos valores das avenças à carteira de clientes. Existe a possibilidade de o cliente cancelar o contrato com a nova proposta de valores. Outro fator que poderá levar à não renovação do contrato é a competição do mercado.

Seja P_{ij} o preço da avença para o cliente i que usufrui do serviço j , $i \in \{1, \dots, N\}$ e $j \in \{1, \dots, M\}$. O novo preço praticado será,

$$P_{ij}^* = P_{ij} (1 + \delta_{ij}) \quad (3.1)$$

onde δ_{ij} é a variação relativa a P_{ij} para o i -ésimo cliente correspondente ao serviço contratualizado j . Esta variação pode ser positiva, negativa ou nula, originando um aumento ou diminuição do preço praticado.

Para simplificar, vamos assumir que a data de renovação é fixa para todos os clientes que já têm contrato com a empresa e que pagam a avença P_{ij} no período a decorrer. Cada contrato pode ser renovado por mais um ano com o valor P_{ij}^* .

Suponhamos que a probabilidade do i -ésimo cliente renovar o contrato é uma função de P_{ij} e outros parâmetros que descrevem as características dos clientes. Ao alterar o valor das avenças no momento da renovação, a probabilidade vai depender de δ_{ij} , do valor anterior de P_{ij} e de outras características do serviço. Assim sendo, a probabilidade de manter o cliente é representada por $\psi_{ij}(P_{ij}, \delta_{ij})$ que se poderá traduzir na vontade de pagar do cliente i para que lhe seja realizado o serviço j pelo novo preço P_{ij}^* , ou seja,

$$\psi_{ij}(P_{ij}, \delta_{ij}) = \int_{P_{ij}^*}^{\infty} w_{ij}(x) dx \quad (3.2)$$

onde w_{ij} é a distribuição *willingness to pay* introduzida na secção 1.2.

Visto que nem todos os clientes irão renovar o seu contrato e que cada renovação de contrato é independente entre si, designando por N^* o número aleatório de contratos renovados, tem-se

$$N^* = \sum_{i=1}^N I_i \quad (3.3)$$

com I_1, \dots, I_N variáveis aleatórias de Bernoulli, ou seja,

$$I_i = \begin{cases} 1, & \text{se } I_{ij} = 1 \text{ para algum } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.4)$$

onde I_{ij} são variáveis aleatórias independentes de Bernoulli,

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o cliente } i \text{ renova o serviço } j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (3.5)$$

Supomos que $\mathbb{P}\{I_{ij} = 1\} = \psi_{ij}(P_{ij}, \delta_{ij})$, $1 \leq i \leq N$ e $1 \leq j \leq M$.

O valor esperado do número de novos contratos renovados é

$$\mathbb{E}\{N^*\} = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\{I_i\}. \quad (3.6)$$

Deste modo, a percentagem do número de clientes que renova o contrato – taxa de retenção de clientes – é dada por,

$$\Theta(\delta) = \frac{\mathbb{E}\{N^*\}}{N} = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbb{E}\{I_i\}}{N} \quad (3.7)$$

onde δ representa a matriz dos parâmetros δ_{ij} .

Lema 1 (3.8)

$$\mathbb{E}\{I_i\} = 1 - \prod_{j=1}^M \mathbb{P}(I_{ij} = 0).$$

Demonstração:

$$\mathbb{E}\{I_i\} = \mathbb{P}(I_{ij} = 1, \exists 1 \leq j \leq M)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \mathbb{P}(I_{ij} = 0, \forall 1 \leq j \leq M) \\
&= 1 - \mathbb{P}(I_{i,1} = 0, \dots, I_{i,M} = 0) \\
&= 1 - \prod_{j=1}^M \mathbb{P}(I_{ij} = 0).
\end{aligned}$$

■

Para além desta taxa de retenção é apresentada uma taxa de retenção de serviços, percentagem do número de serviços que os clientes pretendem usufruir

$$\theta(\delta) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\{I_{ij}\} . \quad (3.9)$$

O somatório dos valores das avenças da carteira de clientes relativos ao serviço j é dado por,

$$A_j = \sum_{i=1}^N P_{ij}. \quad (3.10)$$

O somatório das avenças relativas ao serviço j depois da renovação, que é aleatório, é dado por,

$$A_j^* = \sum_{i=1}^N I_{ij} P_{ij} (1 + \delta_{ij}) . \quad (3.11)$$

Assim, após as renovações, a receita é dada por,

$$R(\delta) = \sum_{j=1}^M A_j^*. \quad (3.12)$$

Consequentemente, considerando que o objetivo principal é maximizar o valor esperado de $R(\delta)$, a função objetivo será dada por,

$$q_{R(\delta)} = \mathbb{E}\{R(\delta)\} = \sum_{j=1}^M \mathbb{E}\{A_j^*\} . \quad (3.13)$$

O objetivo passa por maximizar o volume de avenças retirando os custos inerentes à prestação dos serviços, C .

Assim,

$$q(\delta) = q_{R(\delta)} - C \quad (3.14)$$

onde,

$$C = \sum_{i=1}^N C_i, \quad C_i = c_{fixo} + \sum_{j=1}^M I_{ij} c_{ij}, \quad (3.15) \text{ e } (3.16)$$

onde C_i é o custo associado a cada cliente i e c_{ij} o custo de cada cliente i que usufrui do serviço j .

A função objetivo $q(\delta)$ tem a seguinte expressão,

Lema 2 (3.17)

$$q(\delta) = -Nc_{fixo} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \psi_{ij} (P_{ij}(1 + \delta_{ij}) - c_{ij}).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} q(\delta) &= R(\delta) - C \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^M A_j^* - \sum_{i=1}^N C_i \right] = \mathbb{E} \left\{ -Nc_{fixo} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M [I_{ij} P_{ij}(1 + \delta_{ij}) - I_{ij} c_{ij}] \right\} = \\ &= -Nc_{fixo} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \mathbb{E}(I_{ij})(P_{ij}(1 + \delta_{ij}) - c_{ij}) = \\ &= -Nc_{fixo} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \psi_{ij} (P_{ij}(1 + \delta_{ij}) - c_{ij}). \end{aligned}$$

■

De seguida introduziremos duas restrições:

Restrição 1

$$\Theta(\delta) \geq l, \text{ minorante da taxa de retenção de contratos}$$

A taxa de retenção de contratos tem a seguinte expressão,

$$\text{Lema 3} \quad \Theta(\delta) = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^M (1 - \psi_{ij}). \quad (3.18)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \Theta(\delta) &= \sum_{i=1}^N \frac{\mathbb{E}\{I_i\}}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[1 - \prod_{j=1}^M \mathbb{P}(I_{ij} = 0) \right] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^M \mathbb{P}(I_{ij} = 0) \\ &= 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^M \mathbb{P}(I_{ij} = 0) = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^M (1 - \psi_{ij}). \end{aligned}$$

■

Restrição 2

$$\theta(\delta) \geq d, \text{ minorante da taxa de retenção de serviços.}$$

A taxa de retenção de serviços tem a seguinte expressão,

$$\text{Lema 4} \quad \theta(\delta) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \psi_{ij}(P_{ij}, \delta_{ij}). \quad (3.19)$$

Demonstração:

Como $\psi_{ij}(P_{ij}, \delta_{ij}) = \mathbb{P}\{I_{ij} = 1\}$, então temos que $\mathbb{E}\{I_{ij}\} = \psi_{ij}(P_{ij}, \delta_{ij})$.

■

Problema a resolver:

Maximizar $q(\delta)$

sujeito a,

Restrição 1

$$\Theta(\delta) \geq l$$

Restrição 2

$$\theta(\delta) \geq d$$

3.2 Resolução

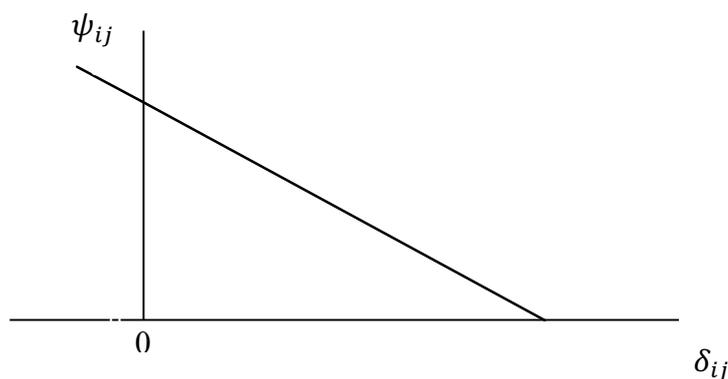
Para dar início à resolução do problema de maximização apresentado, começa-se por introduzir uma simplificação na função ψ_{ij} . Na resolução do problema de otimização com ou sem restrições assume-se que a probabilidade de o cliente i contratar o serviço j é dado por,

$$\psi_{ij} = \psi_{ij}(P_{ij}, \delta_{ij}) = \pi_j(1 - a_j\delta_{ij}) \quad (3.20)$$

onde, ψ_{ij} representa a probabilidade do cliente i contratar o serviço j ; $\pi_j \in]0,1]$ representa a probabilidade de renovação do serviço j com o mesmo preço; a_j , representa a sensibilidade do cliente à alteração do preço, portanto $a_j > 0$. Trata-se de uma função decrescente – à medida que o preço aumenta a probabilidade de renovar os contratos diminui.

Figura 2

Comportamento da Probabilidade do Cliente Renovar os Serviços



3.2.1 Sem restrições

Pretende-se maximizar a função,

$$q(\delta) = -Nc_{fixo} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \psi_{ij} (P_{ij}(1 + \delta_{ij}) - c_{ij}). \quad (3.21)$$

Para otimizar $q(\delta)$ calcular-se-á os pontos críticos derivando a função e igualando a zero.

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial \delta_{ij}} &= \psi'_{ij}(\delta_{ij})(P_{ij}(1 + \delta_{ij}) - c_{ij}) + \psi_{ij}P_{ij} \\ &= -\pi_j a_j (P_{ij}(1 + \delta_{ij}) - c_{ij}) + \pi_j (1 - a_j \delta_{ij}) P_{ij} \\ &= \pi_j [-a_j (P_{ij} - c_{ij}) + P_{ij}] - 2\pi_j a_j P_{ij} \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Então, pode-se escrever

$$\frac{\partial q}{\partial \delta_{ij}} = \beta_{ij} + \alpha_{ij} \delta_{ij} \quad (3.23)$$

onde, α_{ij} e β_{ij} são dados por,

$$\alpha_{ij} = -2\pi_j a_j P_{ij}, \quad (3.24)$$

$$\beta_{ij} = \pi_j [-a_j (P_{ij} - c_{ij}) + P_{ij}]. \quad (3.25)$$

Portanto, para se descobrir os pontos críticos de q é preciso descobrir δ_{ij} tal que,

$$\frac{\partial q}{\partial \delta_{ij}} = \beta_{ij} + \alpha_{ij} \delta_{ij} = 0.$$

Resolvendo a equação anterior obtém-se

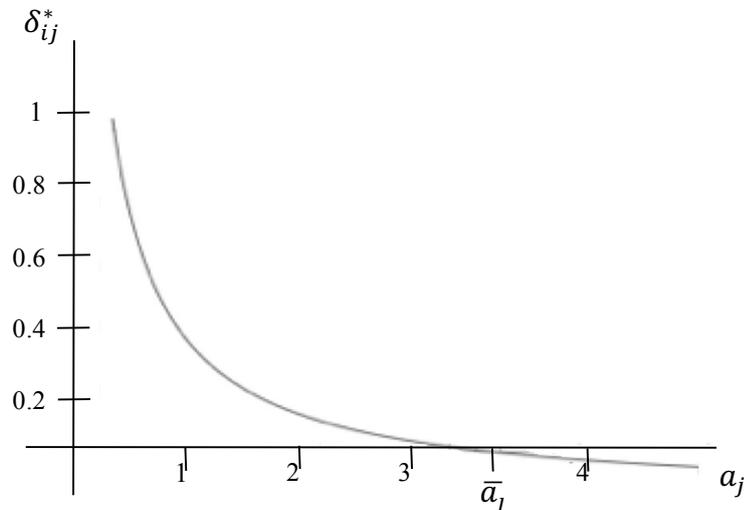
$$\delta_{ij}^* = \frac{-\beta_{ij}}{\alpha_{ij}} = \frac{\pi_j [-a_j (P_{ij} - c_{ij}) + P_{ij}]}{2\pi_j a_j P_{ij}} = \frac{P_{ij} - a_j (P_{ij} - c_{ij})}{2a_j P_{ij}}. \quad (3.26)$$

Com o intuito de interpretar δ_{ij}^* , substitui-se c_{ij} por $t_j P_{ij}$ onde $0 < t_j < 1$, ou seja, o custo é uma fração do preço, obtendo-se

$$\delta_{ij}^* = \frac{-a_j (P_{ij} - t_j P_{ij}) + P_{ij}}{2a_j P_{ij}} = \frac{1 - a_j (1 - t_j)}{2a_j}. \quad (3.27)$$

Figura 3

Para ilustração, $t_j = 0,7$



Ao observar o gráfico é possível constatar que à medida que a_j tende para zero, δ_{ij}^* aumenta. Traduzindo para o problema, se o cliente é pouco sensível às alterações do preço a percentagem do aumento da avença pode aumentar sem que o cliente desista do contrato.

No caso em que o cliente é muito sensível à alteração do preço, ou seja a_j tende para $-\infty$, δ_{ij}^* tende para $\frac{(t_j-1)}{2}$. Neste caso a variação teria de ser negativa para o cliente permanecer com os serviços da empresa.

Quando $\delta_{ij}^* = 0$ ou seja, não haverá alteração no preço, temos que,

$$\bar{a}_j = \frac{1}{1 - t_j} \quad (3.28)$$

Traduz-se no ponto de sensibilidade crítico. O cliente não se encontra “disponível” para aumentar o valor da avença.

3.2.2. Com restrições

Em geral, podemos formular um problema de otimização de $q(\delta)$ com restrições da seguinte forma

$$\text{Maximizar } q(\delta)$$

sujeito a,

$$g(\delta) \geq 0$$

onde a restrição $g(\delta)$ pode tomar a forma da restrição 1 ou 2, descritas na secção anterior.

Suponha-se que δ_{ij} não depende de i , i.e, $\delta_{ij} = \delta_j \forall i$. Esta hipótese sendo restritiva, utiliza-se para simplificar a apresentação dos resultados. Desta forma, recorrendo a (3.10)

$$\begin{aligned} q(\delta) &= -Nc_{fixo} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \pi_j (1 - a_j \delta_j) (P_{ij}(1 + \delta_j) - c_{ij}) \\ &= -Nc_{fixo} + \sum_j \pi_j (1 - a_j \delta_j) \sum_i (P_{ij}(1 + \delta_j) - c_{ij}) \\ &= -Nc_{fixo} + \sum_j \pi_j (1 - a_j \delta_j) \times [(1 + \delta_j)A_j - c_j] \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde $c_j = \sum_{i=1}^N c_{ij}$.

Reescrevendo a equação separando os termos constantes dos termos que dependem de δ , vem

$$q(\delta) = -Nc_{fixo} + \sum_j \pi_j (A_j - c_j) + \sum_j (\pi_j a_j (c_j - A_j) + \pi_j A_j) \delta_j - \sum_j (\pi_j a_j A_j) \delta_j^2. \quad (3.30)$$

A parte constante representa a ordenada da origem e não necessita constar na função objetivo.

Deste modo, o problema a resolver é equivalente a,

$$\text{maximizar } \sum_j (-\pi_j a_j (A_j - c_j) + \pi_j A_j) \delta_j + \sum_j (-\pi_j a_j A_j) \delta_j^2 \quad (3.31)$$

sujeito a,

$$g(\delta) \geq 0. \quad (3.32)$$

Note-se que a nova função objetivo é côncava, isto é $\frac{\partial^2 q}{\partial \delta_j^2} < 0$, uma vez que $a_j > 0$ por hipótese.

Dependendo da complexidade da restrição, poder-se-á usar as condições de Kuhn-Tucker para chegar à otimização com restrições e obter uma solução. Começa-se por definir a função Lagrangiana do problema,

$$L(\delta, \lambda) = q(\delta) + \lambda g(\delta) \quad (3.33)$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange.

As condições de Kuhn-Tucker são,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial q}{\partial \delta_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \delta_{ij}} = 0 \end{array} \right. \quad (3.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda g(\delta) = 0 \end{array} \right. \quad (3.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(\delta) \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.37)$$

Quando $\lambda = 0$, (3.36) é satisfeita e a equação (3.35) é $\frac{\partial q}{\partial \delta_{ij}} = 0$, que foi resolvida anteriormente.

Resta determinar a solução quando $\lambda > 0$. De seguida a discussão da resolução do problema considera as restrições 1 e 2 separadamente.

3.2.2.1 Restrição usando a taxa de retenção de clientes

De acordo com o lema 3 e a simplificação no início da secção 3.2, a restrição neste caso apresenta-se,

$$g(\delta) = 1 - l - \frac{1}{N} \sum_i \prod_j [1 - \pi_j (1 - a_j \delta_{ij})] \geq 0 \quad (3.38)$$

A restrição é não linear em δ . Dada a sua complexidade, em geral, o problema de otimização não tem uma solução explícita. Apenas no caso em que se consideram dois serviços, o problema de otimização é quadrático com restrições quadráticas. Utilizando o método *Sequential Quadratic Programming* (SQP), será possível chegar a uma solução aproximada, caso existam valores para os parâmetros. O método SQP é muito utilizado para resolver problemas de otimização que apresentam a função objetivo não linear e restrições não lineares (Boggs & Tolle, 2000) e (Arora, Huang, & Hsieh, 1994).

3.2.2.2 Restrição usando a taxa de retenção de serviços

De modo a simplificar a resolução do problema substitui-se a restrição do modelo anterior pela restrição 2 introduzida na secção 3.1.

Com a restrição 2, continua-se a ter um problema de otimização quadrática, pois a função a maximizar $q(\delta)$ é uma função quadrática e côncava, mas apresentará uma restrição linear – o que diferencia da restrição 1.

Segue do lema 4 que

$$g(\delta) = \frac{1}{M} \sum_j \pi_j (1 - a_j \delta_j) - d. \quad (3.39)$$

Observa-se assim que $g(\delta)$ é linear. De seguida escreve-se e obtém-se a solução explícita através da formulação *standard* apresentada no artigo (Hashorva, et al., 2017, p.10). Para ser possível a aplicação do mesmo, têm de ser feitas as alterações necessárias ao modelo apresentado.

O problema de otimização será reformulado da seguinte forma,

$$\min \frac{1}{2} \delta^T Q \delta + u^T \delta \quad (3.40)$$

$$h(\delta) = v^T \delta - b \leq 0. \quad (3.41)$$

Pretende-se reescrever o problema na formulação anterior, ou seja, encontrar a matriz Q e os vetores v , u e o escalar b .

As restrições apresentadas são de \geq e têm que ser alteradas para \leq . Assim sendo,

$$h(\delta) = d - \frac{1}{M} \sum_j \pi_j (1 - a_j \delta_j). \quad (3.42)$$

Portanto,

$$b = \frac{1}{M} \sum_j \pi_j - d \quad (3.43)$$

e

$$v = \begin{pmatrix} \frac{a_1 \pi_1}{M} \\ \vdots \\ \frac{a_j \pi_j}{M} \\ \vdots \\ \frac{a_M \pi_M}{M} \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

No caso da função objetivo obtém-se,

$$u = \begin{pmatrix} \pi_1 (A_1 + a_1 (A_1 - c_1)) \\ \vdots \\ \pi_M (A_M + a_M (A_M - c_M)) \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

e

$$Q = \begin{bmatrix} 2\pi_1 a_1 A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2\pi_M a_M A_M \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Note-se que Q tem valores próprios positivos, pois a_j é positivo. Assim, a função objetivo é convexa.

Como se trata de um problema conhecido, (Markowitz, Todd, & Sharpe, 2000) e (Luenberger & Ye, 2016) utilizando as condições de Kuhn-Tucker o problema apresenta solução:

$$\delta^* = Q^{-1}\lambda^*v + u \quad (3.47)$$

com, $\lambda^* = (v^T Q^{-1}v)^{-1}b$.

3.3 Exemplo

Uma empresa de contabilidade, situada na região de Lisboa, presta um conjunto de três serviços - contabilidade, contabilidade analítica e recursos humanos. Dispõe de um conjunto de cinco clientes.

Atualmente, os preços praticados a estes clientes são:

Tabela 2

| Preços (P_{ij}) | Contabilidade | Recursos Humanos | Contabilidade Analítica |
|------------------------|---------------|---------------------|----------------------------|
| Cliente 1 | 100€ | 100€ | - |
| Cliente 2 | 115€ | 110€ | - |
| Cliente 3 | 150€ | - | 110€ |
| Cliente 4 | - | - | 130€ |
| Cliente 5 | 130€ | 145€ | - |

Cada cliente tem um custo fixo associado de 3€.

A empresa renova e avalia os preços anualmente e apresenta os novos valores das avenças aos seus clientes. Para descobrir o novo preço a praticar a cada cliente é preciso determinar δ para cada cliente.

Assim sendo, o primeiro passo é determinar δ para cada cliente. Para isso é necessário definir certos parâmetros, são eles:

Tabela 3

| Serviços | c_j | π_j | a_j |
|-------------------------|-------|---------|-------|
| Contabilidade | 40€ | 0,70 | 1,36 |
| Recursos Humanos | 35€ | 0,80 | 1,56 |
| Contabilidade Analítica | 50€ | 0,62 | 0,87 |

Depois de determinados os valores δ , recorrendo à formula 3.27, para cada cliente é possível calcular o novo preço a aplicar a cada cliente de forma a maximizar a receita da empresa.

Tabela 4

| δ_{ij} | Contabilidade | Recursos Humanos | Contabilidade Analítica |
|---------------|---------------|------------------|-------------------------|
| 1 | 0,5176 | 0,5705 | - |
| 2 | - | 0,5705 | - |
| 3 | 0,5176 | - | 0,6997 |
| 4 | - | - | 0,6997 |
| 5 | 0,5176 | 0,5705 | - |

Multiplicando o preço atual com os valores de delta apresentados acima, obtém-se os novos preços a apresentar aos clientes.

Tabela 5

| Novos Preços (P_{ij}^*) | Contabilidade | Recursos Humanos | Contabilidade Analítica |
|--------------------------------|---------------|------------------|-------------------------|
| Cliente 1 | 151,76€ | 157,05€ | - |
| Cliente 2 | 174,53 | 172,76€ | - |
| Cliente 3 | 227,65€ | - | 186,97€ |
| Cliente 4 | - | - | 220,96€ |
| Cliente 5 | 197,29 | 227,72€ | - |

A empresa aplicando os novos preços e retirando os custos inerentes na prestação dos serviços de contabilidade consegue determinar o valor máximo que a receita pode tomar, que neste exemplo é 1199,60€.

Conclusão

A prestação de serviços de contabilidade não é um fenómeno recente, mas com o passar dos anos observou-se um aumento de prestadores de serviços e conseqüentemente um aumento da concorrência. De modo a poder tirar melhor partido desta situação será imprescindível àqueles que prestam serviços de contabilidade encontrar um meio termo que seja atrativo para o próprio e para o cliente no que toca ao preço dos serviços.

As técnicas de *pricing* sempre estiveram presentes em todas as áreas de negócio. No entanto, trata-se de um tema que se encontra regularmente mal gerido ou simplesmente negligenciado. Esta realidade foi observada nos exemplos reais dos artigos e através do caso de estudo apresentado.

A otimização de preços surge com o objetivo de colmatar esta falha. *Pricing and Revenue Optimization* tem em conta que os preços necessitam de alterações recorrentes. Assegura que todos os produtos se encontram com os preços corretos, para todos os consumidores através de todos os meios. No entanto, PRO está mais direcionado para outro tipo de serviços como por exemplo os serviços prestados por companhias aéreas. Nesta área os preços estão em constante atualização, sendo possível observar alterações no preço mais do que uma vez ao dia. Contudo, o estudo sobre PRO, serviu para elucidar sobre *pricing* e sobre o modelo básico de otimização de preços (Phillips, 2005).

O modelo criado para esta dissertação teve como objetivo criar uma ferramenta que pretende melhorar as práticas de *pricing* nas empresas que prestam serviços de contabilidade. Contudo, a literatura relativa a esta matéria é quase inexistente o que tornou o desenvolvimento do trabalho mais desafiante. Desta forma, a pesquisa passou a abranger outras áreas de negócio, alargando os horizontes da mesma. Com isto, foi possível encontrar um modelo de otimização de preços sobre uma seguradora. O modelo desenvolvido foi uma readaptação do proposto em (Hashorva, et al., 2017).

Apesar de existir uma empresa nacional como caso de estudo, a sua dimensão e a ausência de dados não tornaram possível a aplicação do modelo proposto. Após a formulação do modelo o próximo passo seria a sua aplicação num caso real. Para isso seria preciso recolher dados de uma ou mais empresas e formar uma amostra significativa e estimar os parâmetros do modelo. Só desta forma será possível avaliar a importância do modelo proposto na problemática da formulação de preços em serviços de contabilidade.

Bibliografia

- Arora, J., Huang, M., & Hsieh, C. (1994). Methods for optimization of nonlinear problems with discrete variables: a review. *Structural Optimization*, Vol.8, 69-85.
- Boggs, P. T., & Tolle, J. W. (2000). Sequential quadratic programming for large-scale nonlinear optimisation. *The Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol.175, No.2, 123-127.
- Greene, J., & Metwalli, A. (2001). The impact of activity based cost accounting on health care capital investment decisions. *Journal of Health Care Finance*, Vol.28, 50-64.
- Hashorva, E., Ratovomirija, G., Tamraz, M., & Bai, Y. (2017). Some mathematical aspects of price optimisation. *Scandinavian Actuarial Journal*, Vol.2018, nº5, 379-402.
- Hilli, S. (2011). *Pricing Accounting Services in a Macro Enterprise*. Jamk : Jamk University.
- Kotler, P., Wong, V., Saunders, J., & Armstrong, G. (2005). *Principles of Marketing*. Harlow, Inglaterra. Pearson Education Limited.
- Luenberger, D. G., & Ye, Y. (2016). *Linear and Nonlinear Programming*. Stanford: Springer.
- Luptácik, M. (2008). Kuhn-Tucker Conditions. Em M. Luptácik, *Mathematical Optimizations and Economic Analysis* (pp. 25-58). Suíça: Springer Nature.
- Markowitz, H. M., Todd, P. G., & Sharpe, W. F. (2000). *Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*. Pennsylvania: John Wiley & Sons.
- Phillips, R. L. (2005). *Pricing and Revenue Optimization*. Standford, California: Stanford Business Books.
- Silveira, D. V., & Schmidt, P. (2016). Factores que influenciam na precificação dos serviços contábeis. pp. 2-18.
- Symonds, C. W. (1982). *Pricing for Pricing*. Nova Iorque: AMACOM.
- Wasserman, E. (1 de Novembro de 2009). *How to price Business Services*. Obtido em 27 de Fevereiro de 2019, de Inc.com: <https://www.inc.com/guides/price-your-services.html>.