



Instituto Superior de Economia e Gestão

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

DESDE 1911

MESTRADO MATEMÁTICA FINANCEIRA

TRABALHO FINAL DE MESTRADO DISSERTAÇÃO

ANÁLISE DA DIFUSÃO ATRAVÉS DE MÉTODOS PROBABILÍSTICOS E
DIMENSÃO DE HAUSDORFF

FILIPE ANDRÉ PAULINO SANTOS

SETEMBRO-2012



Instituto Superior de Economia e Gestão

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

DESDE 1911

MESTRADO MATEMÁTICA FINANCEIRA

TRABALHO FINAL DE MESTRADO DISSERTAÇÃO

ANÁLISE DA DIFUSÃO ATRAVÉS DE MÉTODOS PROBABILÍSTICOS E
DIMENSÃO DE HAUSDORFF

FILIPE ANDRÉ PAULINO SANTOS

Orientação:
João Lopes Dias

SETEMBRO-2012

Conteúdo

Agradecimentos	2
1 Introdução	3
2 Equação do calor discreta	4
2.1 Método probabilístico	4
2.1.1 Funções harmônicas	6
2.1.2 Formulação final do problema	6
2.2 Solução do problema	7
2.2.1 Caso unidimensional	8
3 Passeio aleatório e movimento browniano	10
4 Equação do calor contínua	15
4.1 Caso unidimensional	17
5 Dimensão de Hausdorff	18
5.1 Fractal	18
5.2 Conceitos de dimensão e critérios de majoração	20
5.3 Critérios de minoração	26
5.4 Propriedades do movimento browniano	28
6 Conclusão	37
Referências	38

Agradecimentos

Ao orientador do projecto, o Prof. João Lopes Dias. Pelas sugestões e correcções ao longo de todo o processo, a nível de conteúdo, formatação e revisão de escrita.

À colega, Dra. Sara Lopes. Pela ajuda na formatação em Latex e revisão final de escrita.

1 Introdução

Como é largamente sabido, a equação de Black-Scholes pode ser obtida a partir da equação do calor através de algumas mudanças de variáveis.

Ambas as equações supra referidas são determinísticas e têm soluções analíticas conhecidas. No entanto uma abordagem do ponto de vista probabilístico fornece uma intuição diferente e maior profundidade na compreensão do problema. Esta abordagem está também relacionada com o método inicialmente utilizado para a obtenção da fórmula de *Feynman-Kac* [1, p.2].

Ao longo do desenvolvimento deste texto está patente a comparação entre o caso discreto e seu limite, o caso contínuo. Começa-se pela descrição do problema no caso discreto mediante a utilização do passeio aleatório simples, e no caso contínuo mediante a utilização do movimento browniano.

Na segunda parte do presente texto, que se inicia na secção 5, é introduzido o estudo dos objectos fractais. Este tema tem cada vez mais interesse do ponto de vista da matemática financeira, descrevendo fenómenos que não poderiam ser de outra forma recorrendo à geometria regular.

Por fim, concluí-se o trabalho com a aplicação dos conceitos da geometria fractal [2] ao estudo do movimento browniano 5.4.

É ainda importante referir que as deduções da equação do calor em ambos os casos, secções 2 e 4 tem como guia o trabalho desenvolvido por Lawler em [3], assim como a ligação entre passeio aleatório e movimento browniano. O presente trabalho procura demonstrar de forma rigorosa alguns dos resultados mais importantes aí apresentados.

2 Equação do calor discreta

Nesta secção faz-se a construção da equação do calor em reticulado (\mathbb{Z}^d) com uma metodologia probabilística, e procede-se à obtenção da solução recorrendo a métodos de Álgebra Linear.

2.1 Método probabilístico

Seja $C \subset \mathbb{Z}^d$ um conjunto finito em reticulado d -dimensional e conexo no sentido em que para todos B_1 e B_2 que verifiquem $B_1, B_2 \subset C$ e $B_1 \cup B_2 = C$ se tem

$\min_{x \in B_1, y \in B_2} \|x - y\| \leq 1$ com $\|\cdot\|$ a representar a norma euclidiana. Seja ainda $u_n(x)$ a

função que dá a temperatura no momento n e no ponto x .

Como condição de fronteira é estabelecido que:

$$u_n(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \partial C, \quad (2.1)$$

onde $\partial C = \{y \in \mathbb{Z}^d - C : \min[\|y - x\| : x \in C] = 1\}$ é a generalização do conceito de fronteira para \mathbb{Z}^d . Significa assim que o calor é mantido constante na fronteira, neste caso a 0 graus.

Neste modelo a difusão do calor é matematizada da seguinte forma:

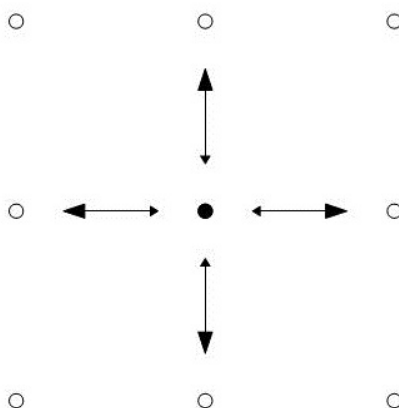


Figura 1: O ponto central representa uma “partícula de calor” e os pontos com setas direccionadas correspondem aos possíveis destinos na iteração seguinte. $d = 2$.

Em cada momento de tempo o calor espalha-se uniformemente pelos $2d$ vizinhos mais próximos, como patente na figura 1.

Note-se que se um dos vizinhos à distância de 1 não está no conjunto então está na fronteira e o calor perde-se. A temperatura em C é resultado da existência de várias “partículas de calor” cuja movimentação, que leva à uniformização do calor, é simplesmente causada pelos passeios aleatórios que supomos que estas realizam no conjunto.

Definição 2.1. Sejam X_i , $i = 1, 2, \dots$ vectores aleatórios independentes e identicamente distribuídos de \mathbb{Z}^d que podem assumir os $2d$ vectores unitários com apenas uma componente não nula. Define-se o processo estocástico $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ tal que $S_n = \sum_{i=1}^n X_i + x$ como o *passeio aleatório d -dimensional simples* que se inicia em x .

A discretização pode ser vista da seguinte forma: uma importante propriedade física diz que dois objectos a temperaturas diferentes colocados de forma adjacente conduzirão a uma transferência de calor do objecto mais quente para o mais frio. Podemos imaginar um objecto d -dimensional limitado e cuja temperatura na fronteira é mantida num valor constante, como vários objectos adjacentes com o calor a fluir entre eles. Se considerarmos esses últimos como pontos em \mathbb{Z}^d temos a discretização no espaço. Sendo a temperatura em cada ponto dada pela concentração de partículas, e sabendo que o passeio aleatório possui igual probabilidade de executar qualquer dos movimentos possíveis ($\frac{1}{2d}$), então pela lei dos grandes números em média cada ponto no espaço irá receber essa fracção de partículas dos seus vizinhos.

Assim, a temperatura em x é dada pela temperatura transferida para esse ponto na forma

$$u_{n+1}(x) = \frac{1}{2d} \sum_{\|y-x\|=1} u_n(y). \quad (2.2)$$

Isto significa que no período seguinte temos a média igualmente ponderada das partículas à sua volta. Note-se que os passeios aleatórios obrigam a que cada partícula

se desloque para alguma das direcções, nunca podendo ficar no mesmo sítio.

2.1.1 Funções harmónicas

As funções que verificam a propriedade de o valor em determinado ponto ser a média do valor dos pontos adjacentes são chamadas de harmónicas.

Definição 2.2. Chama-se *laplaciano* ao operador linear definido da seguinte forma,

$$\mathbf{L}f(x) = \frac{1}{2d} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d, \|x-y\|=1} [f(y) - f(x)]. \quad (2.3)$$

Com f definida em C .

Uma função harmónica é uma função para a qual o operador laplaciano é nulo. Pode ainda ser enunciado o seguinte teorema [3, p.23, teorema 1.5]:

Teorema 2.3. *Se $A \subset \mathbb{Z}^d$ é finito, e $F : \partial A \mapsto \mathbb{R}$, então existe uma única extensão F_0 de F para $A \cup \partial A$ que é harmónica, dada por*

$$F_0(x) = E[F(S_{T_A}) | S_0 = x] = \sum_{y \in \partial A} P[S_{T_A} = y | S_0 = x] F(y) \quad (2.4)$$

onde T_A é um tempo de paragem que representa o momento em que o passeio aleatório atinge ∂A .

2.1.2 Formulação final do problema

Se considerarmos o conjunto A como um conjunto elementar em \mathbb{Z}^d , então ∂A terá $2d$ elementos. Definindo $u_{n+1}(x)$ como a extensão harmónica da função $u_n(x)$ nesses $2d$ pontos fronteira obtém-se:

$$u_{n+1}(x) = \sum_{y \in \partial A} P[S_{T_A} = y | S_0 = x] u_n(y) = \sum_{y \in \partial A} \frac{1}{2d} u_n(y). \quad (2.5)$$

Usando o operador laplaciano e o facto de considerarmos um conjunto elementar,

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{1}{2d} \sum_{\|y-x\|=1} [u_n(y) - u_n(x)] \quad (2.6)$$

que é equivalente a

$$\Delta u_n(x) = \mathbf{L}u_n(x), \quad x \in C. \quad (2.7)$$

Pode-se agora escrever o problema completo, acrescentando ainda as condições iniciais sobre a temperatura do objecto, para $x \in C$ nas duas primeiras equações

$$\begin{aligned} \Delta u_n(x) &= \mathbf{L}u_n(x) \\ u_0(x) &= f(x) \\ u_n(x) &= 0 \quad x \in \partial C. \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.2 Solução do problema

Procuram-se as funções em \mathbb{Z}^d que veriquem 2.8. Pela primeira condição conclui-se que os valores podem ser obtidos recursivamente. Fixando a condição inicial e aplicando o método recursivo é claro que a função obtida em cada iteração é única, e para $x \in C$ tem-se

$$u_0(x) = f(x), \quad u_1(x) = \frac{1}{2d} \sum_{\|y-x\|=1} u_0(y), \quad \dots, \quad u_n(x) = \frac{1}{2d} \sum_{\|y-x\|=1} u_{n-1}(y). \quad (2.9)$$

É fácil verificar que $\mathbf{P}g(x) = \frac{1}{2d} \sum_{\|y-x\|=1} g(y)$ é um operador linear. Além disso, qualquer função g num conjunto finito de \mathbb{Z}^d pode ser descrita por um vector que representa o seu contradomínio,

$$(a_1, \dots, a_k) \longmapsto (g(a_1), \dots, g(a_k)) = v_g, \quad a_i \in C_k \quad g(a_i) \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, k \quad (2.10)$$

onde C_k é o domínio da função g possuindo k elementos. Estamos assim num espaço de dimensão finita. O operador linear \mathbf{P} pode ser visto como uma matriz $k \times k$ que

tem como entradas $\frac{1}{2d}$ se a distância entre o ponto respectivo à linha e o ponto respectivo à coluna é unitária, e 0 caso contrário. Assim, sabendo que $\mathbf{v}_{\mathbf{P}g} = \mathbf{P}\mathbf{v}_g$, as soluções para cada n podem ser escritas como

$$\mathbf{v}_{u_n} = \mathbf{P}^n \mathbf{v}_{u_0}. \quad (2.11)$$

Se a matriz for diagonal ter-se-à soluções da forma $u_n(x) = \lambda_x^n \phi(x)$ com $\phi(x)$ também uma função em \mathbb{Z}^d e portanto o problema consistirá em diagonalizar a matriz \mathbf{P} . Assim tentamos encontrar os valores próprios e funções próprias de \mathbf{P} , objectivo que se simplificará para o caso unidimensional.

2.2.1 Caso unidimensional

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que a função está definida em $C = \{1, 2, \dots, k\}$, pois para outro caso, em que $\partial C = \{a, b\}$ bastava definir-se $h(x) = g(x - a) = g(y)$ e cair no anterior. A condição imposta pela transferência de calor pode ser escrita como

$$\mathbf{P}g(x) = \frac{g(x+1) + g(x-1)}{2} \quad x = 1, \dots, k. \quad (2.12)$$

Supondo uma solução para a equação espectral $\mathbf{P}g = \lambda g$ do tipo $g(x) = r^x$ com $r > 0$ obtém-se

$$r^x = \frac{r^{x+1} + r^{x-1}}{2} \left(\frac{2}{r + r^{-1}} \right). \quad (2.13)$$

No entanto as condições de fronteira $g(0) = g(k+1) = 0$ não são verificadas. Para resolver este problema recorreremos à análise complexa e usamos a parte imaginária de potências em \mathbb{C} , nomeadamente utilizando o seguinte lema.

Lema 2.4. *Seja $\Im(z)$ a parte imaginária de z . As funções $g(x) = \Im(z^x)$ para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$ e $\arg(z) = \frac{m\pi}{k+1}$ com $m \in \mathbb{N}$ verificam a equação espectral $\mathbf{P}g = \lambda g$ para $x = 1, \dots, k$ e as condições de fronteira $g(0) = g(k+1) = 0$.*

Demonstração. Escrevendo $z = |z|e^{i\arg(z)}$ temos $z^x = |z|^x e^{ix\arg(z)}$ e ainda $\Im(z^x) = |z|^x \sin(x\arg(z))$. Se $x = 0$ sai imediatamente a primeira condição de fronteira. Para a outra condição temos $\arg(z) = \frac{m\pi}{k+1}$ para $m \in \mathbb{N}$. Seja \bar{z} o complexo conjugado de z então $\Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ e $\bar{z}^n = \overline{z^n}$. Usando ambas as expressões obtém-se

$$\frac{\Im(z^{x+1}) + \Im(z^{x-1})}{2} = \frac{z^x}{2i} \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right) - \frac{\bar{z}^x}{2i} \left(\frac{\bar{z} + \bar{z}^{-1}}{2} \right). \quad (2.14)$$

Para retirar a conclusão final basta notar que $|z|^2 = z\bar{z}$ o que se traduz em

$$z + z^{-1} = \bar{z} + \bar{z}^{-1} \text{ equivalente a } |z| = 1. \quad (2.15)$$

□

Sabemos assim que $\sin \frac{mx\pi}{k+1}$ são vectores próprios de P e verificam as condições de fronteira. É então possível obter os valores próprios associados da seguinte forma

$$P[\sin \theta x]_v = \frac{1}{2}[\sin \theta(x \pm 1)]_v = \frac{1}{2}[\sin \theta x \cos \theta + \cos \theta x \sin \theta + \sin \theta x \cos \theta - \cos \theta x \sin \theta]_v$$

que é equivalente a

$$P[\sin \theta x]_v = \cos \theta [\sin \theta x]_v \quad (2.16)$$

onde, por facilidade de exposição, foi usada a notação $\mathbf{v}_f = f_v$ e $\theta = \frac{m\pi}{k+1}$. Pela injectividade de $\cos x$ em $(0, \pi)$, se escolhermos $m = 1, \dots, k$ obtemos k valores próprios reais distintos. Dado P ser simétrica (ir de um ponto A a um ponto B é o mesmo que ir de B a A) sabe-se que a valores próprios distintos estão associados vectores próprios ortogonais e portanto linearmente independentes.

Qualquer função f em C pode ser escrita de forma única como

$$f(x) = \sum_{m=1}^k c_m \phi_m(x) = \sum_{m=1}^k c_m \sin \left(\frac{mx\pi}{k+1} \right), \quad (2.17)$$

obtendo assim a solução

$$u_n(x) = \sum_{m=1}^k c_m \left(\cos \left(\frac{m\pi}{k+1} \right) \right)^n \sin \left(\frac{mx\pi}{k+1} \right), \quad (2.18)$$

onde os c_m são os coeficientes da série finita de Fourier (2.17) da condição inicial.

3 Passeio aleatório e movimento browniano

Seja S_n associada ao passeio aleatório unidimensional que é definida como uma soma de variáveis aleatórias com distribuição de Bernoulli com $p = \frac{1}{2}$ e que no caso geral tem função de probabilidade $g(x) = (1-p)^{I\{-1\}} p^{I\{1\}}$ $x = -1, 1$ onde I representa a Indicatriz de um conjunto. Se considerarmos Δt a unidade de variação no tempo e Δx a unidade de variação no espaço, então para S_n temos $\Delta t = \Delta x = 1$.

Como em [3, section 2.1], fazendo $\Delta t = \varepsilon = \frac{1}{N}$ com N arbitrariamente grande. Procura-se que quando $N \rightarrow \infty$ se tenha $S_n \rightarrow B_t$ onde B_t será o movimento browniano. Para conseguir a escala adequada assumimos primeiro que o browniano no momento em que se passaram k passos de tamanho ε é aproximado pelo passeio aleatório passados k passos. Este último normalizado pela variação espacial que deverá ter cada passo no contexto do movimento browniano:

$$B_{k\varepsilon} \approx \Delta x S_k. \quad (3.1)$$

Para calcular Δx faz-se um pressuposto sobre as variâncias. Uma vez que o passeio aleatório tem média nula e distribuição simétrica, os momentos de ordem par são a característica mais importante a ser verificada quando se for fazer o limite contínuo.

Como $E[S_1^2] = 1$, para ficar com a escala correcta exigimos que $E[B_1^2] = 1$.

$$E[B_1^2] = E[(\Delta x S_N)^2] = (\Delta x)^2 E[S_N^2] = (\Delta x)^2 N = 1 \quad (3.2)$$

que é equivalente a $\Delta x = \frac{1}{\sqrt{N}} = \sqrt{\varepsilon}$.

O passo espacial deve ser a raiz quadrada do passo temporal ou seja tal como se pretendia por continuidade, à medida que a variação do tempo diminui também a espacial diminui e a uma velocidade maior, o que estará relacionado com o facto de as trajectórias do movimento browniano serem quase certamente Hölder contínuas de parâmetro (este conceito será introduzido na secção 5.4) $\frac{1}{2} - \delta$.

Está-se agora em condições de usar este facto e o teorema do limite central para concluir que neste caso o movimento browniano tem mesmo distribuição normal.

$$B_t = B_{k\varepsilon} = B_{\frac{k}{N}} \simeq \frac{S_k}{\sqrt{N}} = \frac{S_k}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{k}{N}} = \frac{S_k}{\sqrt{k}} \sqrt{t} \rightarrow N(0, 1)\sqrt{t} \sim N(0, t). \quad (3.3)$$

Agora surge o problema de B_t se definir para uma quantidade não numerável de valores, o que não acontece com S_n . Para se resolver este problema escolhe-se um conjunto numerável de índices que seja denso no conjunto de valores que a variável t em B_t pode assumir, \mathbb{R}_0^+ .

Definição 3.1. Chama-se conjunto dos *racionais diádicos* ao conjunto dos racionais não negativos com denominador 2^n . É dado por $D = \cup_n D_n$ onde $D_n = \{\frac{k}{2^n} : k = 0, 1, 2, \dots\}$.

Lema 3.2. *O conjunto dos racionais diádicos é denso em \mathbb{R}_0^+ .*

Demonstração. Considere-se o conjunto não vazio $]a, b[\subset \mathbb{R}_0^+$. Pretende provar-se que em qualquer destes intervalos que constituem bolas abertas em \mathbb{R}_0^+ existem racionais diádicos. Como o conjunto dos racionais positivos é denso em \mathbb{R}_0^+ tem-se que para algum $n \in \mathbb{N}$ (basta escolher $n > \frac{1}{b-a}$),

$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < b - a \quad \text{que é equivalente a} \quad 2^n b - 2^n a > 1. \quad (3.4)$$

Pela última desigualdade retira-se que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \in]2^n a, 2^n b[$ o que permite finalmente obter $a < \frac{k}{2^n} < b$ e conclui a prova. \square

Definição 3.3. Chama-se *browniano nos diádicos* ao processo $\{B_t : t \in D\}$ que para cada $n \in \mathbb{N}_0$ satisfaz: $B_{\frac{k}{2^n}} - B_{\frac{k-1}{2^n}}$, $k = 1, 2, \dots$ são independentes com distribuição $N(0, 2^{-n})$.

Aqui está bem patente uma vantagem do uso do conjunto D . Pode definir-se o movimento browniano à custa de variações temporais de 2^{-n} . Em cada nível n , estamos a interpolar dois diádicos do nível anterior.

Para obter o limite contínuo temos de introduzir alguns resultados.

Lema 3.4. *Se são conhecidos todos os valores de $f(t)$ num subconjunto D denso em \mathbb{R}_0^+ e $f(t)$ é uma função contínua de t , então são conhecidos os valores de $f(t)$ em todos os pontos t em \mathbb{R}_0^+ .*

Demonstração. Se $t_0 \in D$ então conhecemos o valor de $f(t_0)$ pela hipótese.

Seja $t_0 \in \mathbb{R}_0^+ - D$ e considere-se o intervalo $]t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1[$, $\varepsilon_1 > 0$. Uma vez que D é denso em \mathbb{R}_0^+ , existe $t_1 \in]t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1[\cap D$.

Considere-se agora a sucessão de intervalos $I_k =]t_0 - \varepsilon_k, t_0 + \varepsilon_k[$ com $\varepsilon_k \rightarrow 0$ monótona decrescente. Em qualquer dos intervalos existe $t_k \in I_k \cap D$. Como a sucessão de intervalos é monótona decrescente temos que $I_k = \bigcap_{n=0}^k I_n$ e $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = t_0$ portanto no limite, o único ponto que fica nos sucessivos intervalos é o centro.

Este facto obriga a que a sucessão t_k convirja para t_0 e pela continuidade de $f(t)$, a sucessão $f(t_1), f(t_2), \dots, f(t_k), \dots \rightarrow f(t_0)$. A unicidade e existência do limite garante que conhecemos o valor de $f(t)$ para qualquer $t \in \mathbb{R}_0^+ - D$. \square

Assim para usar o teorema anterior basta provar que a construção atrás feita é uma função contínua. Parte-se de outro resultado [3, p.57-58], que diz que se uma função é uniformemente contínua em intervalos compactos restrita a D , então tem uma extensão contínua para \mathbb{R}_0^+ que é única.

Teorema 3.5. *B_t para $t \in D$ é quase certamente uniformemente contínua em $[a, b]$.*

Demonstração. Definam-se as partes inteiras inferior e superior de um número real como

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor &= \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\} \\ \lceil x \rceil &= \min\{k \in \mathbb{Z} : k \geq x\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

respectivamente. Então o menor intervalo com extremos inteiros que contém $[a, b]$ é $[\lfloor a \rfloor, \lceil b \rceil]$. Como qualquer intervalo fechado em \mathbb{R}_0^+ está contido num intervalo deste tipo pode-se fazer a prova para todos os intervalos com extremos inteiros.

Defina-se:

$$A_n = \sup\{|B_t - B_s| : s, t \in [\lfloor a \rfloor, \lceil b \rceil] \cap D, |t - s| \leq 2^{-n}\}. \tag{3.6}$$

Então a continuidade uniforme é equivalente a que $A_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Considere-se ainda a sucessão $u(m) = \frac{m}{2^n} + \lfloor a \rfloor$, a constante $M = \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor$ e defina-se o seguinte:

$$C_n = \max_{k=1, \dots, 2^n M} \sup\{|B_t - B_{u(k-1)}| : t \in D \cap [u(k-1), u(k)]\}. \tag{3.7}$$

O uso de C_n tem a vantagem de fixar um dos termos em D_n e o uso de extremos inteiros garante que $u(m)$ é uma sucessão de racionais diádicos.

Para se provar a continuidade uniforme usando C_n temos primeiro de mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$ implica $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$. Para isso começa-se por reparar que $C_n \leq A_n$ pois A_n é o supremo de um conjunto maior. Por outro lado, obtém-se o seguinte usando a desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |B_t - B_s| &= |B_t - B_s + B_{u(k)} - B_{u(k)} + B_{u(k-1)} - B_{u(k-1)}| \\ &= |(B_t - B_{u(k)}) - (B_s - B_{u(k-1)}) + (B_{u(k)} - B_{u(k-1)})| \\ &\leq |B_t - B_{u(k)}| + |B_s - B_{u(k-1)}| + |B_{u(k)} - B_{u(k-1)}|. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Para $|t - s| \leq 2^{-n}$ ou existe um n -diádico ou nenhum em (s, t) . Seja $u(k-1)$ o maior n -diádico não superior a s . Se existir outro no interior do intervalo, será $u(k)$, caso contrário pode usar-se $u(k-1)$ em vez de $u(k)$ na expressão anterior.

Então

$$\begin{aligned} \sup |B_t - B_s| &\leq \max_{k=1, \dots, 2^n M} \sup [|B_t - B_{u(k)}| + |B_s - B_{u(k-1)}| + |B_{u(k)} - B_{u(k-1)}|] \\ &= 2C_n + \max_{k=1, \dots, 2^n M} |B_{u(k)} - B_{u(k-1)}|, \end{aligned} \tag{3.9}$$

onde o supremo é feito sobre t e sobre s respectivamente sendo o máximo aplicado depois aos termos fixos. Ficamos assim com a desigualdade seguinte:

$$C_n \leq A_n \leq 3C_n. \tag{3.10}$$

O pretendido sai usando o teorema das sucessões enquadradas.

Lawler prova em [3, p.94-96] que

$$P\{C_n \geq 2\sqrt{n}2^{-\frac{n}{2}}\} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{\exp 2} \right)^n. \tag{3.11}$$

Note-se que este resultado é obtido para o intervalo $[0, 1]$ mas também é referido que pode ser generalizado de forma análoga. Veja-se que C_n assim definido é um máximo entre supremos em intervalos de igual amplitude e que o movimento browniano é um processo de incrementos estacionários. Usando este resultado, obtém-se o seguinte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{C_n \geq 2\sqrt{n}2^{-\frac{n}{2}}\} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{\exp 2} \right)^n < \infty. \tag{3.12}$$

O último passo é justificado pela série de potências com coeficientes $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ter raio de convergência 1 e pelo facto de $\frac{2}{\exp 2}$ ser inferior a 1. Aplicando agora o lema de Borel-Cantelli conclui-se que a partir de certa ordem $C_n < 2\sqrt{n}2^{-\frac{n}{2}}$.

Finalmente, como $\lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{n}2^{-\frac{n}{2}} = 0$ concluí-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$. E que

portanto B_t é uniformemente contínua nos racionais diádicos tal como se queria demonstrar. \square

4 Equação do calor contínua

Aplica-se a mesma ideia que no caso discreto utilizando o passeio aleatório simples com a pequena diferença de não existirem extremidades. Imagine-se que cada partícula de calor se move de acordo com a lei browniana, que parte de um ponto inicial x e se move pelos pontos circundantes. A abstracção do uso da barra infinita serve como ponto de partida para o problema num domínio limitado [3, section 2.5], e é por isso fundamental na sua compreensão. Defina-se $u(t, x)$ como a temperatura em $x \in \mathbb{R}^d$ no momento t e que pode ser vista como a densidade de partículas de calor nessa posição espaço-temporal. A temperatura inicial deste modelo é dada por uma função f , e portanto temos densidade de partículas $f(y)$ inicialmente no local y . A temperatura u será dada pela média sobre todas as trajectórias possíveis (agora infinitas) de onde o calor flui para o ponto x .

Definição 4.1. Seja B_t um movimento browniano em \mathbb{R}^d com $B_0 = x$. Define-se a *densidade de transição gaussiana* do ponto x para o ponto y no instante t como

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{2t}}. \quad (4.1)$$

Esta função só depende do par (x, y) através de $\phi(x, y) = \|x - y\|^2$. Temos assim que,

$$p(t, x, y) = p(t, y, x), \quad (4.2)$$

existindo simetria no movimento das partículas. Podemos então imaginar que as partículas estão a sair do ponto x e a descrever trajectórias até aos vários pontos y .

Fazendo agora a média de todas as trajectórias deste tipo obtemos,

$$u(t, x) = E[f(B_t)|B_0 = x] = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)p(t, x, y)dy. \quad (4.3)$$

Quando escrita a função $u(t, x)$ na forma integral, a densidade de transição não está definida para $t = 0$. Seja

$$u(0^+, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^d} f(y)p(t, x, y)dy. \quad (4.4)$$

Proposição 4.2. $\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = u(0^+, x) = f(x)$.

Demonstração. Considere-se $L_x(y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} p(t, x, y)$. Pode constatar-se que $L_x(y)$ verifica as propriedades do δ -Dirac de medida concentrada no ponto x :

Para $y \neq x$

$$L_x(y) = \frac{1}{(0^+)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{0^+}} = 0$$

$$L_x(x) = \frac{1}{(0^+)^{\frac{d}{2}}} = \infty.$$

A integração relativamente à medida de Dirac é definida da seguinte forma para uma função f ,

$$\int f \cdot \delta = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int f \cdot \nu_t \quad (4.5)$$

onde ν_t converge para a distribuição que assume o valor ∞ num ponto e é nula em todos os outros. Uma vez que o limite $L_x(y)$ verifica exactamente isto, permite-nos fazer a permutação do limite com o integral e obter finalmente

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\delta_x(y)dy = f(x). \quad (4.6)$$

□

4.1 Caso unidimensional

Para se constatar que a condição inicial era verificada não houve necessidade de reduzir ao caso unidimensional devido à similaridade do argumento para o multi-dimensional. No entanto devido ao cálculo envolvido na verificação da equação do calor para $t > 0$ essa simplificação torna-se fundamental e capta a ideia essencial. No caso contínuo estamos concentrados na solução e não na dedução da equação que pode ser vista em inúmeros trabalhos relacionados, por exemplo [4]. A equação do calor contínua modela no caso unidimensional o fluxo de calor ao longo de uma barra cujas extremidades são colocadas a uma determinada temperatura ou numa barra infinita.

Facilmente se constata através de diferenciação que a função integranda em u verifica a equação do calor com coeficiente de difusão térmica $\frac{1}{2}$:

$$\partial_t p(t, x, y) = \frac{1}{2} \partial_{xx} p(t, x, y) \quad (4.7)$$

e portanto basta provar-se que é possível fazer a permutação entre integral e derivada.

Sabe-se que,

$$\partial_t u = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{p(t+h, x, y) - p(t, x, y)}{h} dy. \quad (4.8)$$

Como se pretende provar que $\partial_t u = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t f(y) p(t, x, y) dy$ então basta provar que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left| \frac{p(t+h, x, y) - p(t, x, y)}{h} - \partial_t p(t, x, y) \right| dy = 0. \quad (4.9)$$

Por outro lado, como $\partial_t p(t, x, y)$ pode ser diferenciada em relação a t , podemos utilizar o teorema de Taylor com resto de Lagrange para obter que o módulo no integrando é limitado por $\frac{h}{2} \max_{|s-t|<h} |\partial_{tt} p(s, x, y)|$. Retirando $\frac{h}{2}$ para fora do integral basta provar que o integral de $f(y) \max_{|s-t|<h} |\partial_{tt} p(s, x, y)|$ é finito para algum h .

Ao se derivar duas vezes em t a função $p(t, x, y)$ obtemos o seguinte,

$$\partial_{tt}p(t, x, y) = p(t, x, y) \left(\frac{z^4}{4t^4} - \frac{3z^2}{2t^3} + \frac{3}{4t^2} \right), \quad (4.10)$$

onde $z = |x - y|$. Uma vez que $t > 0$, para h suficientemente pequeno também $s > 0$. Sendo assim, para qualquer valor de s nas condições anteriores este integral será apenas o valor esperado do produto de f por um polinómio. Dada a densidade ser de uma distribuição normal e sendo a temperatura finita no momento inicial, sabemos que estes valores esperados são finitos. De forma análoga se obtém a mesma conclusão para as derivadas parciais em x .

5 Dimensão de Hausdorff

Depois do uso de processos estocásticos para modelizar fenómenos naturais como a difusão, é interessante inserir um novo tópico relacionado com a modelação em Finanças por meio destes processos. Por exemplo, através do cálculo estocástico podemos facilmente resolver a equação do calor e recorrendo à fórmula de Feynman-Kac a equação de Black-Scholes. Examinando gráficos com os valores de activos ou de taxas de juro quando representados por um processo estocástico, nota-se uma grande irregularidade das suas trajectórias.

Para aprofundarmos o estudo destes processos e sermos capazes de tirar cada vez mais informação das suas trajectórias, iremos introduzir um conjunto de conceitos para aplicarmos de seguida ao movimento browniano. A secção é intitulada de dimensão de Hausdorff porque será o instrumento fundamental de caracterização de conjuntos com irregularidade como a dos gráficos das trajectórias destes processos.

5.1 Fractal

Para que se introduzam os principais conceitos de geometria fractal é necessária a caracterização do que é um fractal. Caracterização porque na verdade não existe

uma definição rigorosa, mas ao invés um conjunto de características que se espera ver num conjunto para o chamar de fractal. Um fractal pode apenas apresentar algumas das características referidas em seguida e mesmo assim ser considerado fractal. Um conjunto fractal tem tipicamente as seguintes propriedades (e ainda outras [2, introduction]):

1. Observando um subconjunto do fractal, aumentando a sua escala obtemos um conjunto com a mesma estrutura detalhada do próprio fractal.
2. Apresenta características de irregularidade que impedem que seja estudado pela análise matemática habitual (não diferenciabilidade em quase todos os pontos).
3. Apresentam dimensão fractal superior á definida habitualmente.
4. A sua construção pode habitualmente ser feita de forma recursiva.

Existem vários conceitos de dimensão fractal mas o mais abrangente, na medida em que existe para qualquer conjunto, é a dimensão de Hausdorff.

Exemplo 5.1. Considere-se o conjunto do terço central de Cantor e que é construído da seguinte forma:

Seja $C_0 = [0, 1]$ e seja o conjunto dos n -triádicos $T_n = \{\frac{k}{3^n} : k \in \mathbb{N}_0\}$. Na primeira iteração dividimos C_0 em três intervalos de igual amplitude sendo os extremos dos intervalos 1-triádicos. Definimos $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, isto é, retiramos o intervalo do meio. Agora trata-se cada um dos dois intervalos em C_1 como C_0 e volta a dividir-se em 3 partes iguais com os extremos nos 2-triádicos. Procedendo assim infinitamente obtemos o conjunto $C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$.

Notando que o conjunto inicial tem medida de Lebesgue 1, e que em cada iteração ficamos com $\frac{2}{3}$ da medida do conjunto na iteração anterior então a medida do conjunto de Cantor pode ser calculada por

$$\mu(C) = \mu(\bigcap_{i=0}^{\infty} C_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0. \quad (5.1)$$

Façamos agora outra observação acerca da construção deste conjunto. A cada um dos 3 intervalos que são criados a partir de C_0 numeramos 0, 2, 1 respectivamente. Aos intervalos obtidos a partir dos intervalos de C_1 voltamos a numerar da mesma forma. A figura 2 mostra os intervalos que vão sendo mantidos ao longo da construção.



Figura 2: Iterações do conjunto de Cantor do terço central até $n=2$.

No final da construção existirão elementos no conjunto para cada sequência binária possível. Uma vez que o conjunto das sequências binárias é não numerável, então temos que o conjunto de Cantor não é numerável.

O conceito de dimensão habitual não iria distinguir entre um conjunto deste tipo e um conjunto numerável pois ambos teriam dimensão 0. A forma recursiva com que é obtido e a propriedade de auto-similaridade sugerem um conjunto fractal.

5.2 Conceitos de dimensão e critérios de majoração

Tendo como motivação o aprofundamento do conhecimento sobre estes conjuntos irregulares parte-se para as seguintes definições de dimensão fractal:

Definição 5.2 (Dimensão de Hausdorff). São necessárias primeiro as seguintes sub-definições:

1. O diâmetro de um conjunto D é definido como $|D| = \sup\{|x - y| : x, y \in D\}$.
2. Uma δ -cobertura de D é uma coleção numerável $\{C_i\}$ de conjuntos com diâmetro máximo δ e tal que se tenha $D \subset \cup_{i=1}^{\infty} C_i$.

3. Para um dado conjunto $D \in \mathbb{R}^n$ defina-se,

$$\mathbb{H}_\delta^s(D) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s : \{C_i\} \text{ é uma } \delta\text{-cobertura de } D \right\}. \quad (5.2)$$

$\mathbb{H}_\delta^s(D)$ é crescente quando δ decresce uma vez que se $\delta' > \delta$, uma δ -cobertura é ainda uma δ' -cobertura e portanto ao fazer o ínfimo de um conjunto mais pequeno obtemos um valor maior ou igual. Isto garante que existe limite ainda que infinito e que assim se possa finalmente definir a s -medida de Hausdorff,

$$\mathbb{H}^s(D) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{H}_\delta^s(D). \quad (5.3)$$

A demonstração de que constitui de facto uma medida pode ser vista em [5, p.61-63, theorem 1].

Uma particularidade desta medida é os valores que assume para cada s . Seja $\epsilon > 0$ e

$$\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^{s+\epsilon} = \sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s |C_i|^\epsilon \leq \delta^\epsilon \sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s. \quad (5.4)$$

Fazendo o ínfimo sobre as δ -coberturas em ambos os lados da desigualdade obtém-se

$$\mathbb{H}_\delta^{s+\epsilon}(D) \leq \delta^\epsilon \mathbb{H}_\delta^s(D). \quad (5.5)$$

Ao calcular o limite quando δ tende para 0 conclui-se que se para um dado s a medida for finita então será nula para $s + \epsilon$, com $\epsilon > 0$. Logo, a medida de Hausdorff assume o valor ∞ até atingir um ponto crítico tal que se torna nula depois desse ponto. Esse valor de s é o que chamamos de dimensão de Hausdorff de um conjunto D .

Isto é,

$$\dim_H D = \inf\{s \geq 0 : \mathbb{H}^s(D) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathbb{H}^s(D) = \infty\}. \quad (5.6)$$

Através da figura 3 é facilmente visível o valor da dimensão.

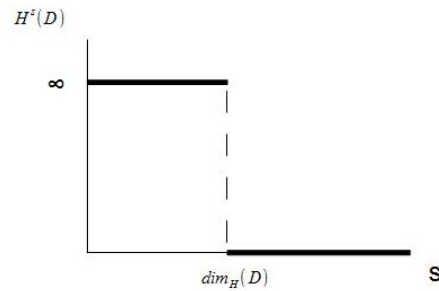


Figura 3: Salto na medida de Hausdorff corresponde à dimensão de Hausdorff.

Assim, possui-se uma forma de caracterizar este tipo de objectos que habitualmente terão dimensão não inteira. Existem casos em que isso não acontece, por exemplo a imagem do movimento browniano em \mathbb{R}^2 tem dimensão de Hausdorff igual a 2, o que significa que cobre inteiramente uma região no plano [6, p.14]. No entanto o cálculo dimensional não é algo simples e tendem a ser necessárias diferentes abordagens para cada caso, o que torna uma teoria geral impossível. Existe porém uma técnica que pode ser usada em várias situações e até adaptada a outras mais particulares.

Uma vez que a dimensão de Hausdorff é o valor de s para o qual a medida de Hausdorff passa de infinita para nula, uma forma de calcular esse valor é provar que para um dado conjunto D e para algum s se tem $0 < \mathbb{H}^s(D) < \infty$ e assim a sua dimensão teria de ser s . Algo que nem sempre funciona porque a medida pode saltar de ∞ para 0 sem assumir outro valor. Podemos ainda ver que em termos de dimensões temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^s(D) = \infty & \text{ implica } s \leq \dim_H(D) \\ \mathbb{H}^s(D) = 0 & \text{ implica } s \geq \dim_H(D). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Portanto também podemos encontrar um majorante e um minorante para a dimensão e se coincidirem temos a solução pretendida.

O conceito dimensional seguinte apenas se define para conjuntos limitados e é uma das razões que o torna inferior ao de dimensão de Hausdorff.

Definição 5.3. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ não vazio e limitado e $N_\delta(D)$ o número mínimo de bolas de raio δ necessárias para cobrir D . Então definem-se respectivamente as dimensões inferior e superior de Minkowski:

$$\underline{\dim}_M(D) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(D)}{\log \frac{1}{\delta}} \quad (5.8)$$

$$\overline{\dim}_M(D) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(D)}{\log \frac{1}{\delta}}. \quad (5.9)$$

Se os dois limites forem iguais chamamos a esse valor dimensão de Minkowski de D ($\dim_M(D)$).

Por (5.7) pode ver-se que majorar a dimensão pode ser obtido majorando o valor da medida e para majorarmos um ínfimo basta escolher uma qualquer cobertura admissível. No entanto como pretendemos que o minorante e majorante coincidam é importante escolher uma cobertura eficiente.

Exemplo 5.4. Peguemos no exemplo do conjunto de Cantor já descrito. O intervalo inicial $I = [0, 1]$ corresponde ao nível 0. Em cada nível k divide-se cada intervalo em 3 de nível $k+1$ dos quais se mantém 2 tal como na construção. Se em qualquer nível k escolher todos os intervalos que são guardados nessa iteração então certamente estou a escolher uma cobertura admissível para um determinado δ . Mais rigorosamente, no nível k posso cobrir o conjunto usando os seus 2^k intervalos de diâmetro $\delta_k = 3^{-k}$. Com esta cobertura $\{A_i\}$, obtém-se:

$$\sum |A_i|^s = 2^k (3^{-k})^s \text{ com } |A_i| \leq \delta_k \text{ para todo } i. \quad (5.10)$$

Fazendo $\delta_k \rightarrow 0$ é o mesmo que fazer $k \rightarrow \infty$, isto é, tomarmos cada vez uma cobertura num nível superior e portanto mais eficiente. Calculando o limite sobre esta escolha de coberturas, procuramos o valor de s para o qual seja finito e não nulo. Sendo um limite de uma sucessão da forma a^n para $a > 0$ só poderá ser nulo,

unitário ou infinito,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2^k (3^{-k})^s = \lim_{k \rightarrow \infty} (2 \cdot 3^{-s})^k = 1. \quad (5.11)$$

O que implica que $s = \frac{\log 2}{\log 3}$. Uma vez que a medida é calculada sobre o ínfimo da coberturas temos que $\mathbb{H}^s(C) \leq 1$ para $s = \frac{\log(2)}{\log(3)}$ logo o salto aconteceu antes ou em s e portanto concluí-se que $\dim_H(C) \leq \frac{\log(2)}{\log(3)}$.

Para dimensões superiores a 1 é frequentemente mais fácil fazer a cobertura utilizando cubos em vez de bolas. Podemos ver que o número mínimo de bolas de raio δ necessário para cobrir um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ é menor ou igual ao número mínimo de quadrados com o mesmo diâmetro necessários para fazer a mesma cobertura.

Basta reparar na figura 4 para verificarmos que qualquer conjunto coberto com n quadrados é também coberto por n bolas com o mesmo diâmetro.

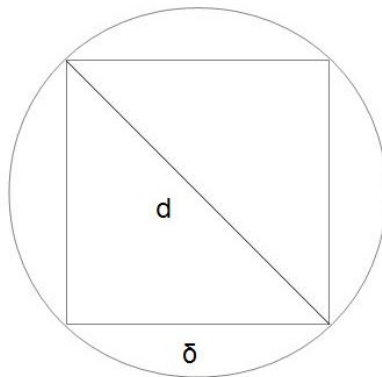


Figura 4: Cobertura de um quadrado por um círculo de igual diâmetro.

Assim, ao substituir cubos por bolas na definição da dimensão de Minkowski encontramos um majorante para o limite e assim para a dimensão. A seguinte proposição faz a ligação deste resultado com a dimensão de Hausdorff.

Proposição 5.5. *Para todo $D \subset \mathbb{R}^n$ não vazio e limitado $\dim_H(D) \leq \underline{\dim}_M(D)$.*

Demonstração. Reparando que $N_\delta(D)$ constitui uma 2δ – cobertura de D e pela

definição de $\mathbb{H}_{2\delta}^s$ como um ínfimo sobre estas coberturas temos,

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{2\delta}^s(D) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s : \{C_i\} \text{ é uma } 2\delta\text{-cobertura de } D \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_\delta(D)} (2\delta)^s = N_\delta(D)(2\delta)^s. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Considere-se agora a seguinte função:

$$f(\delta) = \log N_\delta(D) + s \log 2\delta. \quad (5.13)$$

Então temos,

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(\delta)}{\log 2\delta} = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(D)}{\log 2\delta} + s = s - \underline{\dim}_M(D). \quad (5.14)$$

Supondo que $s > \underline{\dim}_M(D)$ então o limite tem de ser positivo. Uma vez que o denominador tende para $-\infty$, o mesmo tem de acontecer com o numerador, logo

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} f(\delta) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \log N_\delta(D) + s \log 2\delta = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \log N_\delta(D)(2\delta)^s = -\infty. \quad (5.15)$$

Pela continuidade da função exponencial temos que

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} N_\delta(D)(2\delta)^s = 0 \quad (5.16)$$

e concluindo

$$\mathbb{H}^s(D) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{H}_{2\delta}^s(D) \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} N_\delta(D)(2\delta)^s = 0. \quad (5.17)$$

Aplicando 5.7 vem $\dim_H(D) \leq s$.

Suponhamos agora que $\dim_H(D) > \underline{\dim}_M(D)$, então o ponto médio m entre ambos os valores verifica $\dim_H(D) > m > \underline{\dim}_M(D)$ o que conduz a um absurdo

uma vez que sempre que $m > \underline{\dim}_M(D)$, $m \geq \dim_H(D)$. \square

5.3 Critérios de minoração

Para se encontrar um minorante usa-se um teorema chamado de princípio de distribuição de massa. Consiste em definir uma distribuição de massa no conjunto sobre o qual queremos determinar a dimensão, e reparar que, ao fazermos uma cobertura, cada conjunto da cobertura possui pouca massa relativamente ao seu diâmetro.

Definição 5.6. Uma medida tem suporte contido num conjunto A se A^c possuir medida nula. Uma medida μ num conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ que contenha o seu suporte e verifique $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ é uma *distribuição de massa*.

Lema 5.7 (Princípio da distribuição de massa). *Seja μ uma distribuição de massa em $D \subset \mathbb{R}^n$ e seja $s > 0$ tal que para qualquer δ -cobertura $\{C_i\}$ se tenha:*

$$\mu(C_i) \leq K|C_i|^s \quad \text{para todo } i. \quad (5.18)$$

Com $K > 0$. Então $\dim_H(D) \geq s$.

Demonstração. Para provar que $\dim_H(D) \geq s$ basta garantir que $\mathbb{H}^s(D) > 0$. Uma vez que se trata de um ínfimo, é necessário garantir que para qualquer δ -cobertura $\{C_i\}$ de D se tenha $\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s > c > 0$.

Usando a hipótese do lema temos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |C_i|^s \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu(C_i)}{K}. \quad (5.19)$$

Usando a propriedade de sub-aditividade da medida assim como a propriedade da monotonia e o facto de o conjunto estar contido na sua cobertura temos que,

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i)}{K} \geq \frac{\mu(\cup_{i=1}^{\infty} C_i)}{K} \geq \frac{\mu(D)}{K}. \quad (5.20)$$

Basta agora relembrar que na definição de distribuição de massa em D se tem $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Partindo \mathbb{R}^n em $\mathbb{R}^n \cap D$ e $\mathbb{R}^n \cap D^c$ é óbvio que a segunda parte da partição tem medida nula portanto a primeira tem medida positiva. Uma vez que $\mathbb{R}^n \cap D \subset D$ então $\mu(D) > 0$, o que concluí a prova. \square

De grande importância para o que se segue, e relacionado com o princípio da distribuição de massa e com o uso deste tipo de medidas está o método dos potenciais, mais propriamente um teorema que se deve a Frostman.

O s -potencial pode ser definido para $s \in \mathbb{R}^+$ da seguinte forma:

Definição 5.8. Chama-se s -potencial num dado ponto $x \in \mathbb{R}^n$ relativamente a uma dada distribuição de massa μ o seguinte integral,

$$\phi_s(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\|x - y\|^s} d\mu(y). \quad (5.21)$$

Esta é a versão do teorema de Frostman para o caso do espaço métrico $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. [6, p.15, theorem 6.6].

Teorema 5.9 (Frostman). *Considere-se um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ e uma distribuição de massa μ com suporte em D . Se o seguinte for verificado,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_s(x) d\mu(x) < \infty, \quad (5.22)$$

então $\dim_H(D) \geq s$.

Observação: O integral que tem de verificar a condição de finitude é também chamado de s -energia de μ .

Demonstração. Sendo μ uma distribuição de massa em D sabemos que é sempre finita, no entanto é possível que $\phi_s(x)$ seja infinito e ainda assim o integral do teorema continue a ser finito. Para se trabalhar com um s -potencial finito considere-se o conjunto $E \subset D$ como o conjunto onde $\phi_s(x)$ é limitado por uma constante K .

Este conjunto tem certamente medida positiva. Define-se agora a medida ν como a medida anterior concentrada no conjunto E , isto é: para todo $A \subset D$ $\nu(A) = \mu(A \cap E)$. O s -potencial de ν é limitado como se pretendia e obtemos que:

$$K \geq \phi_s^\nu(x) = \int_D \frac{d\nu(y)}{\|y-x\|^s} \geq \int_A \frac{d\nu(y)}{\|y-x\|^s}. \quad (5.23)$$

O objectivo é mostrar que a medida ν verifica o princípio de distribuição de massa. Caso A não intersecte com E temos que $\nu(A) = \mu(A \cap E) = \mu(\emptyset) = 0$ e portanto verifica o princípio de forma trivial. Para o caso contrário, existe pelo menos um ponto em $A \cap E$. Considere-se a bola β centrada nesse ponto e com raio 2^{-m} , onde m é o maior inteiro tal que $A \subset \beta$.

Note-se que se A não for limitado então não existe nenhuma bola nestas condições. No entanto, para o princípio de distribuição de massa a medida basta ser majorada para os conjuntos com diâmetro inferior a algum $\delta > 0$ e portanto podemos sem perda de generalidade trabalhar apenas com os conjuntos A que sejam limitados.

Se na equação anterior considerarmos x como sendo o centro da bola temos que $\|y-x\| < 2^{-m}$ para $y \in A$. Por outro lado, temos certamente que $|A| \geq 2^{-(m+1)}$ pois caso contrário $m+1$ seria o maior inteiro tal que A estava contido na bola. Juntando ambas as condições, obtém-se que

$$\nu(A) \leq K2^{-ms} \leq K2^s|A|^s. \quad (5.24)$$

Portanto, pelo princípio de distribuição de massa, temos que $\dim_H(D) \geq s$. \square

5.4 Propriedades do movimento browniano

Vamos agora calcular a dimensão de Hausdorff da curva trajectória descrita pelo movimento browniano. O uso da majoração da dimensão de Hausdorff pela de Minkowski leva a que se efectue o cálculo para o gráfico num intervalo limitado

$([0, 1])$ devido às limitações da dimensão de Minkowski. Não se perde generalidade pois a dimensão de Hausdorff da união é o supremo das dimensões de cada um dos conjuntos.

Para a determinação do majorante para a dimensão vai usar-se uma cobertura eficiente. A propriedade seguinte permite-nos determinar essa cobertura.

Definição 5.10 (Hölder-continuidade). Uma função real f num espaço euclidiano com domínio A diz-se Hölder-contínua de grau $\alpha > 0$ se existir $K > 0$ tal que,

$$|f(x) - f(y)| \leq K||x - y||^\alpha \quad \text{para todo } x, y \in A. \quad (5.25)$$

As trajectórias do movimento browniano são quase certamente Hölder-contínuas de grau $\alpha < \frac{1}{2}$ [7, p.16-19, lemmas 18,19].

Os dois teoremas seguintes são demonstrados seguindo a ideia em [6, section 6].

Teorema 5.11. *O gráfico do movimento browniano em $[0, 1]$ tem quase certamente dimensão de Hausdorff não superior a $\frac{3}{2}$.*

Demonstração. Considere-se o gráfico, ou trajectória de um movimento browniano para $t \in [0, 1]$. Seja ainda, $\delta > 0$ e divida-se o referido intervalo unitário em $\frac{1}{\delta}$ intervalos I_i de comprimento δ . Usando agora a condição de continuidade de Hölder em cada um dos intervalos considerando s e t os seus extremos obtém-se que quase certamente

$$|B(t) - B(s)| \leq K|t - s|^\alpha = K\delta^\alpha. \quad (5.26)$$

Isto significa que $G_B(I_i)$ pode ser coberto por um rectângulo δ por $K\delta^\alpha$. Uma vez que $\alpha < 1/2$, para valores arbitrariamente pequenos de δ temos que a altura é superior ao comprimento, o que garante que estamos perante um rectângulo. Podemos agora dividir este rectângulo em quadrados de lado δ e adaptando a constante (K' será o máximo entre os K) para se obter a cobertura para cada um dos intervalos $G_B(I_i)$ para cada i . Sabendo que o número mínimo de bolas é inferior ao

número de quadrados para cobrir um conjunto, temos que $N_{\frac{\delta}{\sqrt{2}}}(G_B(I_i)) \leq K'\delta^{\alpha-1}$. Finalmente, como existem $\frac{1}{\delta}$ destes intervalos, obtém-se na cobertura final que $N_{\frac{\delta}{\sqrt{2}}}(G_B([0, 1])) \leq K'\delta^{\alpha-2}$. Na figura seguinte pode ver-se um exemplo desse tipo de cobertura.

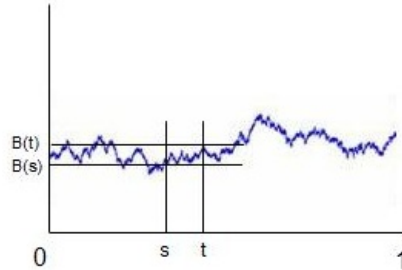


Figura 5: Exemplo de cobertura de uma secção do gráfico de uma trajectória do movimento browniano.

Suponha-se que os valores onde são atingidos o mínimo e o máximo num dado intervalo são respectivamente u e v . Então iremos ter que $|B(v) - B(u)| \leq K|v - u|^\alpha \leq K|t - s|^\alpha$ e portanto podemos usar o mesmo tipo de cobertura.

Assim, podemos majorar a dimensão inferior de Minkowski

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_M(G_B([0, 1])) &= \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(G_B)}{\log \frac{1}{\delta}} \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log K'(\sqrt{2}\delta)^{\alpha-2}}{\log \frac{1}{\delta}} \\ &= (2 - \alpha) \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \sqrt{2}\delta}{\log \delta} = (2 - \alpha). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Mais uma vez pelo facto de $\alpha < \frac{1}{2}$ chegamos ao resultado,

$$\dim_H(G_B([0, 1])) \leq \underline{\dim}_M(G_B([0, 1])) \leq \frac{3}{2}. \quad (5.28)$$

□

Definição 5.12. Considere-se a função $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi(x, y) = x$. Esta função é denominada de projecção no eixo horizontal. Define-se a aplicação μ em \mathbb{R}^2 por $\mu(A) = \mu_L(\pi(A))$ onde μ_L é a medida de Lebesgue unidimensional.

Lema 5.13. *A aplicação μ restringida ao gráfico de uma função é uma medida.*

Demonstração. Usando o facto de a projecção do vazio ser o próprio vazio e μ_L ser uma medida temos

$$\mu(\emptyset) = \mu_L(\pi(\emptyset)) = \mu_L(\emptyset) = 0. \quad (5.29)$$

Pela definição de função, um objecto não pode ter duas imagens que lhe correspondam, o que implica que se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ então $\pi(A_1) \cap \pi(A_2) = \emptyset$. Podemos assim concluir que dados $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ conjuntos disjuntos, e o facto de μ_L ser a medida de Lebesgue

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu_L(\pi(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)) = \mu_L(\cup_{i=1}^{\infty} \pi(A_i)), \quad (5.30)$$

obtendo finalmente que,

$$\mu_L(\cup_{i=1}^{\infty} \pi(A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_L(\pi(A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i). \quad (5.31)$$

□

Teorema 5.14. *O gráfico do movimento browniano em $[0, 1]$ tem quase certamente dimensão de Hausdorff não inferior a $\frac{3}{2}$.*

Demonstração. Para provar esta desigualdade utiliza-se o teorema de Frostman, isto é, verificar que a s -energia para $s < \frac{3}{2}$ é quase certamente finita para alguma distribuição de massa no gráfico das trajectórias do movimento browniano.

Seja μ a aplicação do lema anterior restringida a $G_B[0, 1]$ e tendo que $0 < \mu(G_B[0, 1]) = 1 < \infty$ estamos perante uma distribuição de massa em $G_B[0, 1]$.

A s -energia de μ é dada por $\int_{G_B[0,1]} \int_{G_B[0,1]} \frac{1}{\|x-y\|^s} d\mu(x) d\mu(y)$. Uma vez que $x, y \in G_B[0, 1]$, podemos vê-los em \mathbb{R}^2 como $x = (t, B_t)$ e $y = (u, B_u)$. Com $d\mu(x) = d\mu_L(t)$ e $d\mu(y) = d\mu_L(u)$ podemos calcular o mesmo integral como um integral de Lebesgue duplo,

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\|(t, B_t) - (u, B_u)\|^s} dudt = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(t-u)^2 + (B_t - B_u)^2}^s} dudt. \quad (5.32)$$

Partindo o segundo intervalo de integração em $[0, t]$ e $[t, 1]$ e notando que para $a < b$ se tem $B_b - B_a \equiv B_{b-a}$ temos

$$\int_0^1 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{(t-u)^2 + (B_{t-u})^2}^s} dudt + \int_0^1 \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{(t-u)^2 + (B_{u-t})^2}^s} dudt. \quad (5.33)$$

Usando a técnica de mudança de variável para integrais múltiplos escolhemos a transformação dada por $v = t - u$ e $z = t$, e invertendo a transformação ficamos com $u = z - v$ e $t = z$. Facilmente se calcula que o Jacobiano desta transformação tem determinante unitário. Assim, a s -energia está limitada por

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v^2 + B_v^2}^s} dvdz + \int_0^1 \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{v^2 + (B_{-v})^2}^s} dvdz. \quad (5.34)$$

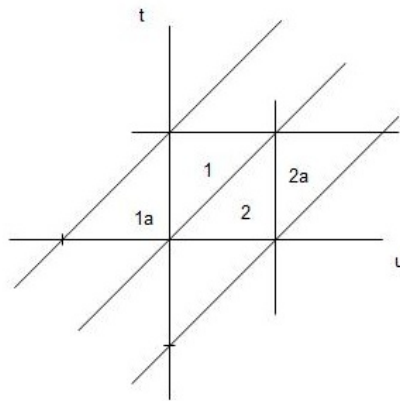


Figura 6: Área de Integração. 1 e 2 correspondem à área de integração original e 1a e 2a são extensões da nova área de integração.

Note-se pela figura 6 que com a mudança de coordenadas, a área sobre a qual se está a integrar não é a mesma do que na integração original. No entanto, sendo

uma área que contém a original e sendo o integrando sempre positivo, constitui um limite superior.

Usando o teorema de Fubini e aplicando nova mudança de variável ao segundo integral $r = -v$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v^2 + B_v^{2s}}} dv - \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{r^2 + B_r^{2s}}} dv = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v^2 + B_v^{2s}}} dv. \quad (5.35)$$

Se o valor esperado desde integral for finito então não pode existir um subconjunto de medida positiva onde o integral seja infinito pois o integrando é sempre positivo e conduziria a um absurdo. Assim basta que se limite o valor esperado do integral. Aplicando novamente o teorema de Fubini permuta-se o valor esperado com o integral e pode-se agora proceder à majoração desse valor esperado.

$$E \left[(v^2 + B_v^2)^{-\frac{s}{2}} \right] = E \left[(v^2 + vB_1^2)^{-\frac{s}{2}} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} (v^2 + vx^2)^{-\frac{s}{2}} \phi(x) dx. \quad (5.36)$$

Onde se usa o facto de $B_v \equiv \sqrt{v}B_1$ e B_1 ter distribuição normal standard. ϕ é a densidade dessa mesma distribuição. Usando a simetria de B_1 calculamos apenas o integral em \mathbb{R}^+ . Uma forma simples de limitar o integral seria retirar o termo v^2 o que reduziria muito os cálculos. Infelizmente ao se retirar esse termo, o integral final não irá convergir.

Para garantirmos a convergência do integral que utilizamos como majorante, fazemos uma partição em $[0, \sqrt{v}]$ e $[\sqrt{v}, \infty]$. Assim podemos utilizar diferentes condições em cada integral da partição. Para o primeiro temos $v^2 + vx^2 \geq v^2$ e para o segundo temos $v^2 + vx^2 \geq vx^2$.

$$\int_0^\infty (v^2 + vx^2)^{-\frac{s}{2}} \phi(x) dx = \int_0^{\sqrt{v}} (v^2 + vx^2)^{-\frac{s}{2}} \phi(x) dx + \int_{\sqrt{v}}^\infty (v^2 + vx^2)^{-\frac{s}{2}} \phi(x) dx. \quad (5.37)$$

Para o primeiro termo,

$$\int_0^{\sqrt{v}} (v^2 + vx^2)^{-\frac{s}{2}} \phi(x) dx \leq \int_0^{\sqrt{v}} v^{-s} dx = v^{\frac{1}{2}-s}. \quad (5.38)$$

Para o segundo termo já podemos retirar v^2 ficando limitado por

$$\int_{\sqrt{v}}^\infty (vx^2)^{-\frac{s}{2}} \phi(x) dx = v^{-\frac{s}{2}} \int_{\sqrt{v}}^\infty x^{-s} \phi(x) dx. \quad (5.39)$$

Agora facilmente nos livramos da parte indefinida do integral. Basta reparar que para $x \geq 1$, x^{-s} está limitado por 1. O que sugere mais uma partição do integral,

$$\begin{aligned} v^{-\frac{s}{2}} \int_{\sqrt{v}}^\infty x^{-s} \phi(x) dx &= v^{-\frac{s}{2}} \left[\int_{\sqrt{v}}^1 x^{-s} \phi(x) dx + \int_1^\infty x^{-s} \phi(x) dx \right] \\ &\leq v^{-\frac{s}{2}} \left[\int_{\sqrt{v}}^1 x^{-s} dx + \int_1^\infty \phi(x) dx \right] \\ &\leq \frac{2-s}{1-s} v^{-\frac{s}{2}} - \frac{v^{\frac{1}{2}-s}}{1-s}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Este majorante apenas funciona para $s \neq 1$ mas esse problema será resolvido posteriormente.

Agora, calculando a soma destas duas parcelas e integrando em v obtemos o majorante para a s -energia de μ ,

$$4 \int_0^1 \left[v^{\frac{1}{2}-s} \left(\frac{-s}{1-s} \right) + \frac{2-s}{1-s} v^{-\frac{s}{2}} \right] dv = 4 \left(\frac{-s}{1-s} \frac{1}{\frac{3}{2}-s} + \frac{2}{1-s} \right). \quad (5.41)$$

Os últimos cálculos indicam que os integrais convergem para $s < \frac{3}{2}$ e $s < 2$ respectivamente o que prova a finitude da s -energia de μ para $s < \frac{3}{2}$ e a consequente

conclusão de que $\dim_H(G_B) \geq \frac{3}{2}$.

Para a solução do problema $s = 1$ basta reparar que a questão nasce no cálculo de $\int_{\sqrt{(v)}}^1 \left(\frac{1}{x}\right)^s$. Uma vez que para $x < 1$ a potência é crescente com s , se o integral final é finito para qualquer $s < \frac{3}{2}$ também o será para $s = 1$. \square

Uma questão que surge é se podemos retirar alguma conclusão sobre a diferenciabilidade do movimento browniano, partindo do conhecimento da sua dimensão fractal.

Teorema 5.15. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, e ainda diferenciável em $]a, b[$. Então o gráfico de f tem dimensão de Hausdorff igual a 1.*

Demonstração. Seja $A = [a, b]$. Pelo teorema do valor médio existe $c \in]a, b[$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) < \infty$. O mesmo se pode dizer de qualquer intervalo aberto contido em A e portanto iremos ter para qualquer destes intervalos, com extremos x e y que $|f(y) - f(x)| = K|y - x|$ onde K é o módulo da derivada num dado ponto interior do intervalo.

Usando um argumento similar ao que permitiu encontrar uma cobertura para o gráfico do movimento browniano, divide-se o intervalo A em $\frac{b-a}{\delta}$ intervalos de comprimento δ . A região do gráfico correspondente a esse intervalo pode então ser coberta por $K' = \max K_i$ quadrados de lado δ e conseqüentemente pelo mesmo número de bolas de raio $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$. O número mínimo de bolas para cobrir o gráfico em A é limitado por $C(\delta) = \frac{b-a}{\delta} K'$ e permite obter finalmente que

$$\dim_H(G_f(A)) \leq \underline{\dim}_M(G_f(A)) \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \sqrt{2} C(\delta)}{\log \frac{1}{\delta}} = 1. \quad (5.42)$$

Seja agora $D \subset f(A)$ e considere-se novamente a distribuição de massa $\mu(D) = \mu_L(\pi(D))$. Aplicando da mesma forma que para o movimento browniano o teorema de Frostman e a passagem para o integral de Lebesgue obtemos que a s -energia pode

ser escrita como

$$\begin{aligned} \int_{G_f} \int_{G_f} \frac{1}{\|y - x\|^s} d\mu(y) d\mu(x) &= \int_a^b \int_a^b \frac{1}{\|(t, f(t)) - (u, f(u))\|^s} dt du \\ &= \int_a^b \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(t - u)^2 + (f(t) - f(u))^2}}^s dt du. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Utilizando novamente o teorema do valor médio temos que o integral é de facto

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 + K^2}} \right)^s \int_a^b \int_a^b \frac{1}{|t - u|^s} dt du = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + K^2}} \right)^s \frac{2(b - a)^{2-s}}{(1 - s)(2 - s)} \text{ para } s < 1, \quad (5.44)$$

que permite finalmente concluir que $\dim_H(G_f(A)) \geq 1$. E pelas duas desigualdades sai o resultado pretendido. \square

Corolário 5.16. *O movimento browniano quase certamente não é diferenciável em qualquer intervalo aberto.*

Demonstração. Pelo teorema 5.15 sabe-se que se uma função não tem gráfico de dimensão de Hausdorff unitária e é contínua num intervalo fechado então não é diferenciável no seu interior. Pelos teoremas 5.14 e 5.11 o movimento browniano tem dimensão de Hausdorff $\frac{3}{2}$ e além disso tem trajectórias quase certamente contínuas, o que conclui a prova do corolário. \square

6 Conclusão

O presente texto permitiu ver de outra forma o fenómeno da difusão. É interessante ver que mesmo com a aleatoriedade envolvida acaba por existir harmonia na forma como o calor é difundido. Tanto a nível discreto como contínuo os factores aleatórios apresentam similaridades tais, que a equação do calor contínua pode ser vista como um limite da equação do calor discreta da mesma forma que se apresenta o movimento browniano como limite contínuo do passeio aleatório.

Em economia, muitos fenómenos descritos como contínuos são apenas abstracções da realidade discreta desses fenómenos. As secções 2, 3 e 4 mostraram todos os estágios associados a essa abstracção.

Todos os conceitos de geometria fractal assim como as suas técnicas de utilização, são de grande utilidade nos mais variados fenómenos. Constituem um complemento da geometria regular que aumenta as possibilidades na investigação de qualquer área onde comportamentos fractais possam ocorrer. No caso particular deste texto permitiu uma caracterização mais completa do movimento browniano, que proporcionou resultados sobre outras propriedades.

Para um projecto futuro seria interessante a generalização rigorosa para o caso multidimensional de ambos os tópicos assim como análises similares para outros processos estocásticos.

Referências

- [1] M. Jeanblanc and J. Pitman and M. Yor,
The Feynman-Kac formula and decomposition of Brownian paths,
<http://www.stat.berkeley.edu/tech-reports/471.pdf> 1996.
- [2] Kenneth Falconer, *Fractal geometry, Mathematical foundations and applications*, Second edition, Wiley and Sons, 2003.
- [3] G. F. Lawler, *Random walk and the heat equation*, AMS, 2010.
- [4] D. G. de Figueiredo, *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, 4^a Edição, SBM, 1997.
- [5] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, First Edition, CRC-Press, 1992.
- [6] Yuval Peres, *An invitation to sample paths of brownian motion*,
<http://stat-www.berkeley.edu/~peres/bmall.pdf>, 2001.
- [7] Stephen Brady, *Construction and properties of brownian motion*,
http://math.hawaii.edu/home/talks/brady_talk.pdf, 2006.