

**MESTRADO**  
**MATEMÁTICA FINANCEIRA**

**TRABALHO FINAL DE MESTRADO**  
**RELATÓRIO DE ESTÁGIO**

LIABILITY-DRIVEN INVESTMENTS

RODRIGO PEREIRA ENGENHEIRO

NOVEMBRO, 2020

# **MESTRADO**

## **MATEMÁTICA FINANCEIRA**

### **TRABALHO FINAL DE MESTRADO**

#### **RELATÓRIO DE ESTÁGIO**

**LIABILITY-DRIVEN INVESTMENTS**

**RODRIGO PEREIRA ENGENHEIRO**

**ORIENTAÇÃO:**  
**JORGE BARROS LUÍS**  
**JOÃO PINTO**

**NOVEMBRO, 2020**

## RESUMO

Diversas crises financeiras tiveram sobre os fundos de pensões efeitos de decréscimo do valor dos ativos, redução do *funding level* e, por vezes, necessidade de contribuições adicionais por parte do *sponsor* ou de intervenção de organismos regulatórios. No ambiente descrito, fundos de pensões cuja estratégia de investimento passa apenas pela diversificação dos ativos parecem condenados a fracassar no longo-prazo, apesar de este continuar a ser um princípio financeiro basilar.

É como resposta a este contexto que surgem os *Liability-Driven Investments*, estratégias especialmente preparadas para proteger os fundos de pensões de fatores de risco como como o risco de taxa de juro. Neste trabalho, apresentam-se quatro modelos pertencentes a essa categoria e comparam-se os resultados por eles produzidos. Os modelos são o Modelo Tradicional de Duração, o Modelo Vetorial de Duração, o Modelo de Duração *Key-Rate* e o Modelo de Duração da Componente Principal.

Todos os modelos mostram um bom desempenho na reprodução da trajetória das responsabilidades, mas o Modelo de Duração *Key-Rate* destaca-se pelo facto de ter necessitado de menos contribuições para atingir um *funding level* mais elevado.

**PALAVRAS-CHAVE:** Fundos de Pensões; *Liability-Driven Investments*; Modelo Tradicional de Duração; Modelo Vetorial de Duração; Modelo de Duração *Key-Rate*; Modelo de Duração da Componente Principal.

## ABSTRACT

Pension schemes suffered from the same effects in various financial crisis. These effects were the reduction of the value of assets, the reduction of the funding level and, sometimes, the necessity for additional contributions from sponsor or for intervention from regulatory organisms. In the described environment, pension schemes whose investment strategy is based only on asset diversification are condemned to fail in the long-term, even considering that this is a valuable financial principle.

Liability-Driven Investments appear as an answer to this context. These are strategies prepared to protect pension schemes from risk factors like interest rate risk. In this work, the author presents four models from this category and compares the results produced by them. The models are Traditional Duration Model, Duration Vector Model, Key-Rate Duration Model and Principal Component Duration Model.

Each model shows a good performance on following the liabilities path, but the Key-Rate Duration Model stands out by the fact that it needed less contributions in order to achieve a higher funding level.

**KEYWORDS:** Pension Schemes; Liability-Driven Investments; Traditional Duration Model; Duration Vector Model; Key-Rate Duration Model; Principal Component Duration Model.

## ÍNDICE

Resumo .....	i
Abstract.....	ii
Índice .....	iii
Índice de Figuras .....	v
Índice de Tabelas .....	vi
Agradecimentos .....	vii
1. Introdução.....	1
2. Revisão da Literatura.....	2
2.1 Conceitos Básicos.....	2
2.2 Liability-Driven Investments.....	10
2.2.1 Modelo Tradicional de Duração .....	11
2.2.2 Modelo Vetorial de Duração .....	14
2.2.3 Modelo de Duração Key-Rate .....	16
2.2.4 Modelo de Duração da Componente Principal.....	18
3. Estudo de Caso .....	20
3.1 Implementação dos Modelos .....	22
3.1.1 Modelo Tradicional de Duração .....	22
3.1.2 Modelo Vetorial de Duração .....	24
3.1.3 Modelo de Duração Key-Rate .....	27
3.1.4 Modelo de Duração da Componente Principal.....	30
3.2 Comparação de Resultados.....	32
3.2.1 Ativos do Fundo de Pensões antes de Contribuições .....	32
3.2.2 Contribuições acumuladas .....	33
3.2.3 Funding Level.....	33

4. Conclusão .....	34
Referências .....	36
Apêndices .....	38
Apêndice A – Obtenção das fórmulas da duração e convexidade.....	38
Apêndice B – Modelo de Nelson e Siegel.....	39
Apêndice C – Média das medidas de duração de ativos e responsabilidades .....	41
Apêndice D – Correlação entre as variações anuais nas yields.....	45
Apêndice E – Covariância entre as variações anuais nas key-rates .....	46
Apêndice F – Vetores próprios, valores próprios e matriz $U^*$ .....	47
Apêndice G – Resultados da implementação dos modelos .....	48

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Média da alocação das obrigações no MTD .....	24
Figura 2 – Média da alocação das obrigações no MVD.....	26
Figura 3 – Média do valor da função objetivo no MDKR.....	27
Figura 4 – Soma da média das medidas <i>EKRD</i> .....	28
Figura 5 – Média da alocação das obrigações no MDKR .....	29
Figura 6 – Média do valor da função objetivo no MDCP .....	31
Figura 7 – Média da alocação das obrigações no MDCP.....	32
Figura 8 – Média do valor atualizado das responsabilidades .....	33
Figura G.1 – Média dos AFPaC em cada um dos modelos.....	48
Figura G.2 – Média da volatilidade dos AFPaC em cada um dos modelos .....	48
Figura G.3 – Média das contribuições em cada um dos modelos .....	49
Figura G.4 – Média da volatilidade das contribuições em cada um dos modelos....	49
Figura G.5 – Média do FL em cada um dos modelos.....	50
Figura G.6 – Média da volatilidade do FL em cada um dos modelos.....	50

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela I – Média do valor da função objetivo no MTD .....	23
Tabela II – Média do valor da função objetivo no MVD .....	25
Tabela C.I – Média da duração dos ativos e das responsabilidades .....	41
Tabela C.II – Média da convexidade dos ativos e das responsabilidades .....	41
Tabela C.III – Média da medida <i>D1</i> dos ativos e das responsabilidades .....	42
Tabela C.IV – Média da medida <i>D2</i> dos ativos e das responsabilidades .....	42
Tabela C.V – Média da medida <i>D3</i> dos ativos e das responsabilidades .....	43
Tabela C.VI – Média das medidas <i>KRD</i> das responsabilidades.....	43
Tabela C.VII – Média das medidas <i>KRD</i> dos ativos.....	44
Tabela C.VIII – Média das medidas <i>EKRD</i> .....	44
Tabela D.I – Matriz das correlações entre as variações anuais nas <i>yields</i> .....	45
Tabela E.I – Matriz das covariâncias entre as variações anuais nas <i>key-rates</i> .....	46
Tabela F.I – Matriz dos vetores próprios da matriz das covariâncias.....	47
Tabela F.II – Matriz dos valores próprios da matriz das covariâncias.....	47
Tabela F.III – Matriz $U^*$ da matriz das covariâncias.....	47



## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço aos meus pais, por terem pautado a minha educação pelo rigor e por me terem ensinado desde cedo a importância do trabalho, do esforço e do mérito próprio. Sem tudo isto, nunca estaria apto para aproveitar as minhas capacidades, muito menos disponível para as desenvolver. Devo-lhes o meu percurso académico e a ética com que sempre o abordei.

Em segundo lugar, agradeço ao meu orientador, professor Jorge Barros Luís, pela sugestão do tema deste trabalho que tanto gozo me deu fazer e que me fez crescer, não só do ponto de vista académico, mas também do ponto de vista profissional. Agradeço também pelo acompanhamento que me foi dando ao longo do tempo, pela confiança que depositou em mim e pela paciência.

Agradeço à Mercer pela oportunidade de ter realizado este trabalho e especialmente à minha equipa (*Performance Reporting Team - Delegated Solutions*) e ao meu *People Manager*, João Pinto, pela colaboração e pela compreensão.

Agradeço ao meu amigo Francisco Fonseca que, sem qualquer obrigação e de forma totalmente desinteressada, se dispôs a ler o meu trabalho e a oferecer-me as suas valiosas sugestões.

Por último, agradeço à minha família e amigos que, nas horas boas e nas horas más, estiveram sempre disponíveis para me ouvir, para me presentear com uma palavra de conforto e para me encorajar.

## 1. INTRODUÇÃO

Este é um trabalho que pretende, essencialmente, estudar e testar a aplicação de *Liability-Driven Investments* (LDI), estratégias de investimento pensadas para suprimir as dificuldades associadas à gestão de fundos de pensões com benefícios definidos. Resumidamente, estas estratégias procuram assegurar que a evolução do valor dos ativos acompanha a evolução do valor das responsabilidades em fundos de pensões deste tipo.

No entanto, toda esta problemática insere-se naturalmente numa mais ampla que abrange, grosso modo, tudo o que está relacionado com fundos de pensões. Esta inclui aspetos regulamentares relacionados com o funcionamento dos fundos de pensões de acordo com a lei em vigor em cada país, uma temática por si só bastante vasta; tecnicismos do âmbito do atuariado, disciplina que aplica conceitos da matemática, da economia e da computação de modo a prever compromissos futuros que deverão ser cumpridos; decisões sobre em que tipo de ativos aplicar as contribuições para o fundo de forma a que esses compromissos futuros sejam cumpridos; assuntos mais específicos, como questões do foro administrativo, contabilístico, demográfico e sociocultural ou aspetos micro e macroeconómicos.

Como tal, não é surpresa que seja necessário, para discorrer sobre LDI e perceber o tema na sua real magnitude, um determinado conhecimento prévio sobre alguns destes tópicos. Visto que, como já foi mencionado, esta é uma área do conhecimento bastante singular, não abordada no mestrado em Matemática Financeira e sobre a qual me tenho vindo a debruçar profissionalmente, afigura-se relevante efetuar, antes de mais, uma exposição breve de alguns conceitos que poderão não ser evidentes para todos os leitores.

De uma forma resumida, os capítulos que se seguem encontram-se divididos de uma forma bastante simples. Primeiro, far-se-á uma revisão de alguns conceitos básicos relacionados com fundos de pensões - tipos, indicadores, funções, modo de funcionamento - e, seguidamente, será feita uma revisão de literatura relevante relacionada com LDI, com apresentação de modelos concretos. Numa segunda fase implementar-se-ão esses modelos, efetuando-se comparações entre os resultados obtidos por cada um deles e concluindo-se sobre a sua eficácia.

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

### 2.1 Conceitos Básicos

Ainda antes de procurar responder a questões de natureza profundamente técnica e com algum grau de complexidade, importa responder a uma questão primária que, por se nos afigurar de simples resposta, não pode deixar de exigir que nela coloquemos um determinado nível de precisão e exatidão: o que é um fundo de pensões?

Nos países com um grau de desenvolvimento elevado, a população pertencente a grupos etários mais idosos assume especial relevância. Fruto da qualidade de vida proporcionada por esses países a grande parte dos cidadãos, a proporção desses grupos etários na totalidade da população tende a ser superior à verificada em países em desenvolvimento. E, para a maioria das pessoas pertencentes a esses grupos etários, as pensões constituem a maioria, quando não a totalidade, dos seus rendimentos. Segundo Sullivan (2004), uma pensão é o rendimento, na forma de uma anuidade, que uma pessoa reformada recebe no lugar de ganhos provenientes do trabalho. As pensões podem ser providenciadas pelo Estado ou, na esfera do setor privado, por empresas, seguradoras ou outras instituições credenciadas para o efeito.

Em Devolder *et al* (2012), um fundo de pensões é definido como sendo um mecanismo que tem como finalidade oferecer um rendimento regular pós-reforma a um grupo específico de pessoas. O mecanismo é sistemático no sentido em que oferecerá benefícios a cada uma das pessoas com base em regras precisas que serão iguais para todas elas. Por outro lado, terá sido iniciado por uma determinada entidade que é responsável pelo seu funcionamento e continuidade; a esta entidade dá-se o nome de *sponsor*. Geralmente, os beneficiários de um fundo de pensões passam a gozar de uma anuidade até ao momento da sua morte, embora existam variantes - os beneficiários poderão gozar de uma anuidade apenas durante um período de tempo definido ou poderão receber um pagamento *lump-sum* aquando da sua reforma juntamente com uma anuidade de valor reduzido, por exemplo.

Sullivan (2004) chama a atenção para um facto que deve ser retido e que sublinha a importância deste tipo de mecanismo. Sem fundos de pensões, os trabalhadores ver-se-iam obrigados a poupar por iniciativa e sob orientação própria para a sua reforma. Evidentemente, poucos teriam o conhecimento suficiente para pouparem na quantidade adequada. Os mais cautelosos tenderiam a sacrificar demasiado consumo no imediato; os

menos cautelosos tenderiam a não sacrificar o suficiente. Assim, os fundos de pensões são uma forma mais eficiente de transferir consumo dos estágios pertencentes à vida ativa para a reforma, pois asseguram uma anuidade durante este período. Contudo, não deixam de existir riscos associados a essa transferência. No geral, existe o risco de que o valor da pensão a receber pelo beneficiário seja inferior ao esperado. Isto pode acontecer, por exemplo, devido a uma fraca *performance* do fundo de pensões ou à incapacidade do *sponsor* para honrar os seus compromissos. E, ainda que um membro tome conhecimento destes factos em tempo útil, existe o risco de que a mudança para um outro fundo de pensões seja impossível ou extremamente onerosa.

Uma das distinções comumente efetuadas quando se discute esta temática é entre fundos de pensões do tipo *Pay As You Go* (PAYG) e fundos de pensões com reserva, ou *funded pension schemes*.

Blake (2006) define os fundos de pensões do tipo PAYG como aqueles em que as pensões atuais são pagas apenas com recurso às contribuições dos trabalhadores ativos e/ou do *sponsor*. Ou seja, neste caso as pensões são meras transferências dos atuais trabalhadores para os atuais pensionistas. O modo de funcionamento deste tipo de fundos de pensões é cíclico: os atuais trabalhadores financiam as pensões dos trabalhadores que os precederam e, por sua vez, confiam aos trabalhadores que lhes irão suceder o financiamento das suas próprias pensões.

Por outro lado, o mesmo autor define os fundos de pensões com reserva como aqueles em que as pensões atuais são financiadas por uma reserva de fundos, resultado da acumulação das contribuições dos trabalhadores ao longo dos anos e do seu investimento em determinados ativos, normalmente de cariz financeiro. Neste sentido, é um tipo de fundo de pensões mais sofisticado do que o anterior, pois as contribuições feitas por uma geração de trabalhadores são investidas e pagas a essa mesma geração de trabalhadores após a sua reforma.

Note-se que, num fundo de pensões com reserva, em caso de paragem do funcionamento do mecanismo, os direitos dos participantes estarão salvaguardados (ainda que, possivelmente, apenas em parte) pela existência dessa mesma reserva de fundos. Uma paragem do funcionamento do mecanismo implicará que não se lhe somarão novas contribuições; no entanto, poderão ser pagas pensões de acordo com a reserva existente no momento da paragem. De forma oposta, num fundo de pensões do tipo PAYG, em

caso de paragem do funcionamento do mecanismo, esses direitos não poderão ser de modo algum garantidos. Pela lógica explicada anteriormente, se cessarem as contribuições, não poderão ser pagas pensões aos pensionistas atuais, tampouco aos futuros. Esta é a razão pela qual este tipo de fundos de pensões são uma solução a contemplar apenas para sistemas de índole estatal – a garantia virtual de perpetuidade do Estado permite evitar o problema mencionado.

Devolder *et al* (2012) oferece uma reflexão detalhada sobre os riscos de cada um destes tipos de fundo de pensões. Existe uma exposição óbvia do regime PAYG ao risco demográfico de renovação (a diminuição do número de trabalhadores irá diminuir o valor das contribuições e colocar em risco o pagamento de pensões) e ao risco de sustentabilidade das finanças públicas (a falência do Estado poderá colocar em causa o pagamento de pensões). Esses mesmos riscos são significativamente mitigados nos fundos de pensões com reserva, embora estes sofram de forma mais acentuada com o risco demográfico de longevidade (causado pelo aumento inesperado da esperança média de vida, aumentando o tempo de usufruto de benefícios por parte dos pensionistas). Por outro lado, os fundos de pensões do tipo PAYG encontram-se relativamente protegidos do efeito da inflação (um aumento do valor das pensões devido a este fenómeno é compensado igualmente por um aumento dos salários dos trabalhadores atuais e, conseqüentemente, do valor das suas contribuições), de variações na taxa de juro (visto que este tipo de fundos de pensões não possui responsabilidades, não as verá aumentar em caso de redução da taxa de juro)<sup>1</sup> e de choques nos mercados financeiros (uma diminuição do valor de mercado dos ativos não os afetarão, porque este tipo de fundo de pensões não é possuidor de ativos)<sup>2</sup>, enquanto que os fundos de pensões com reserva são especialmente suscetíveis a acontecimentos dessa espécie.

A própria definição de fundo de pensões com reserva introduz a figura do seu gestor. De acordo com Blake (2006), um gestor de um fundo de pensões é um indivíduo

---

<sup>1</sup> Convém ter em conta que, se a entidade estatal responsável pelo pagamento de pensões possuir um fundo de reserva que funcione em regime de capitalização e tenha como objetivo a estabilização dos seus saldos, variações na taxa de juro poderão impactar negativamente a sua rendibilidade. Em Portugal, este mecanismo existe sob a tutela do Ministério do Trabalho, Solidariedade e Segurança Social com o nome de Fundo de Estabilização Financeira da Segurança Social (FEFSS). Por outro lado, variações na taxa de juro também poderão impactar negativamente o orçamento do Estado e ser, por essa via, consideradas desfavoráveis ao pagamento de pensões.

<sup>2</sup> Os choques nos mercados financeiros poderão ter os mesmos efeitos descritos na nota de rodapé anterior para as variações na taxa de juro.

ou uma empresa que gere os ativos de um determinado fundo de pensões. As suas funções passam por estruturar um portfólio ótimo, particularmente: tendo em conta o perfil das responsabilidades componentes do fundo de pensões em questão; efetuando ajustamentos a esse portfólio em função de alterações da conjuntura; medindo a *performance* dos investimentos realizados, quantificando a contribuição de cada grupo de ativos e comparando-a com a *performance* de um *benchmark* específico que represente características desse grupo; e transferindo diversos tipos de risco para outras entidades através de instrumentos financeiros específicos para o efeito.

Tonks (2006) aponta dois motivos principais para que a gestão de um fundo de pensões seja delegada num gestor. O primeiro, como é óbvio, será a sua maior especialização e capacidade relativamente à tarefa em questão. O segundo, menos evidente, prende-se com os descontos obtidos nas comissões pagas a outras instituições financeiras quando vários fundos de pensões se agregam sob a alçada de um mesmo gestor. Apesar destas vantagens, o trabalho do gestor necessita de ser monitorizado, sob pena de que os objetivos que o fundo de pensões se propõe atingir não sejam alcançados. Normalmente, o gestor é remunerado de acordo com uma taxa conhecida por *Annual Management Charge* (AMC), que corresponde simplesmente a uma proporção do valor total anual de cada um dos fundos sob a sua gestão. Em casos raros, a AMC pode assumir também a forma de um montante fixo. Vale a pena lembrar que esta não é a única taxa suportada por um fundo de pensões.

No entanto, a principal dualidade do universo dos fundos de pensões é aquela que opõe os fundos de pensões com benefícios definidos, ou *Defined Benefits* (DB) *pension schemes*, aos fundos de pensões com contribuições definidas, ou *Defined Contributions* (DC) *pension schemes*. Blake (2006) apresenta de forma extensiva cada um deles.

Num fundo de pensões com benefícios definidos são os benefícios oferecidos pelo fundo aos pensionistas, e não as contribuições que os membros ativos têm de fazer para o fundo, que se encontram definidos à partida. Desta forma, o *scheme* compromete-se a pagar pensões de acordo com regras específicas e independentemente de tudo o resto. As contribuições são calculadas de modo a assegurar o pagamento dessas pensões. O risco dos investimentos é, portanto, suportado pelo *sponsor*.

O mais usual é que este tipo de fundo ofereça pensões que se encontram relacionadas com o último salário (ou com uma média dos últimos salários) do

trabalhador antes da sua reforma. Seja qual for o método para o obter, chamemos-lhe salário anual de referência. Genericamente, a fórmula utilizada para calcular a pensão anual a que o futuro beneficiário do *scheme* terá direito é a seguinte:

$$\text{Salário anual de referência} \times \text{Tempo de serviço} \times \text{Accrual rate} \quad (1)$$

Em que o tempo de serviço corresponde aos anos do trabalhador enquanto membro do fundo de pensões e em que a *accrual rate* é a parte do salário de referência a que o trabalhador terá direito como pensão por cada ano como membro do *scheme* - no Reino Unido, esta taxa é, normalmente, 1/60 ou 1/80 (Sullivan, 2004). Por exemplo, se o último salário auferido por um trabalhador antes da reforma ascender a 48,000 unidades monetárias e este tiver sido um membro do *scheme* durante 30 anos, assumindo uma *accrual rate* de 1/80, este terá direito a uma pensão anual de 18,000 unidades monetárias.

Os fundos que relacionam as pensões com a média dos salários auferidos pelo trabalhador ao longo dos seus anos como membro são uma variação introduzida mais recentemente aos DB *pension schemes* tradicionais. Nestes casos, é feito o seguinte cálculo:

$$\sum_{i=1}^I \text{Salário anual}_i \times \text{Accrual rate} \quad (2)$$

Em que o índice  $i = 1, 2, \dots, I$  corresponde aos vários anos de trabalho. As várias parcelas do somatório são reavaliadas em cada um dos anos seguintes até à reforma do trabalhador de acordo com as regras do fundo de pensões. A taxa de reavaliação pode ser extraída de diversos índices de preços ou dos retornos do próprio fundo de pensões, para além de poder existir uma taxa mínima de reavaliação. Na data de avaliação dos benefícios do membro do *scheme*, os valores calculados para cada um dos anos são somados, perfazendo a pensão anual do futuro beneficiário. Por exemplo, se no primeiro ano um trabalhador auferir um salário de 20,000 unidades monetárias, assumindo uma *accrual rate* de 1/80, no final desse primeiro ano de trabalho este terá direito a uma pensão anual de 250 unidades monetárias. Se no segundo ano o trabalhador auferir um salário de 22,000 unidades monetárias, em princípio no final desse segundo ano este teria direito a uma pensão anual de 525 unidades monetárias. No entanto, se a pensão que ele ganhou no primeiro ano for reavaliada de acordo com a evolução do Índice de Preços no Consumidor (IPC) e assumirmos que esta foi de 2%, no final do segundo ano o

trabalhador terá direito a uma pensão anual de 530 unidades monetárias. Este processo é levado a cabo até à data de avaliação dos seus benefícios.

Os conceitos de défice e de excedente são conceitos exclusivamente associados aos fundos de pensões com benefícios definidos por uma razão lógica. Apenas em fundos de pensões deste tipo é possível confrontar o nível dos ativos que lhe pertencem com o nível das responsabilidades impostas pelos seus membros e beneficiários. Isto porque, lembrando o que já foi escrito, nos *DB pension schemes* os benefícios a oferecer pelo fundo aos pensionistas encontram-se definidos à partida. Tal permite, a cada momento, o cálculo das suas responsabilidades ou, mais concretamente, do valor atual de todos os pagamentos de pensões que terão lugar no futuro. Por outro lado, os Ativos do Fundo de Pensões (AFP) num determinado momento são calculados da seguinte forma:

$$AFP_{t_i} = AFP_{t_i-1} - Benefícios_{t_i} + Rendibilidade AFP_{t_i} + Contribuições_{t_i} \quad (3)$$

Deste modo, um *DB pension scheme* apresentará um défice se o valor dos Ativos do Fundo de Pensões antes de Contribuições (AFPaC) for inferior ao valor das suas responsabilidades; de forma oposta, apresentará um excedente se o valor dos AFPaC for superior ao valor das suas responsabilidades. Existe uma outra forma de expressar exatamente esta ideia - através do conceito de *Funding Level* (FL). Apresenta-se em seguida a fórmula que permite obter o FL:

$$FL_{t_i} = \frac{AFPaC_{t_i}}{Responsabilidades_{t_i}} \times 100 \quad (4)$$

Um FL inferior a 100% indicará, naturalmente, a existência de um défice; um FL superior a 100% indicará, por sua vez, a existência de um excedente. O valor monetário do défice ou do excedente dá pelo nome de *Funding Position* (FP).

Esta comparação entre ativos e responsabilidades, feita no âmbito dos *DB pension schemes*, é apresentada formalmente numa avaliação atuarial. Este é um documento produzido pelo atuário ao serviço do fundo de pensões, por norma de 3 em 3 anos. A avaliação atuarial tem de ter em conta, não só os benefícios que já foram garantidos pelos membros devido ao seu tempo de serviço, como também as contribuições necessárias para cobrir o custo dos benefícios que serão futuramente garantidos pelos membros.

Como é lógico, o montante das responsabilidades dependerá também da taxa escolhida para atualizar os benefícios que serão pagos no futuro, ou *discount rate*. Podemos inverter o raciocínio para perceber mais facilmente que esta corresponde ao



retorno esperado dos ativos do fundo de pensões: assume-se que os ativos necessários hoje para honrar todos os compromissos futuros capitalizarão a essa mesma taxa. No entanto, existem outras premissas que influenciarão o valor das responsabilidades, como previsões para a taxa de crescimento dos salários, para a taxa de inflação e para o tempo de reforma. Todas estas premissas são escolhidas pelos responsáveis do fundo de pensões, sob aconselhamento do atuário. Com esta informação, é possível fazer uma análise ao modo como variações nessas premissas, mantendo tudo o resto constante, impactarão o valor das responsabilidades.

Assim, uma variação positiva na *discount rate* irá, naturalmente, causar um decréscimo das responsabilidades, pois a taxa utilizada para atualizar os benefícios que serão pagos no futuro será mais elevada. No entanto, é possível estabelecer uma regra simples que permitirá quantificar o impacto de variações na *discount rate* nas responsabilidades. Para tal, é preciso compreender o conceito de duração de Macaulay, apresentado em Macaulay (1938). Este pode ser interpretado como uma medida do tempo que o detentor de uma obrigação terá de esperar até receber o valor atual dos seus *cash-flows*. Admita-se a existência de uma obrigação que efetua pagamentos nos momentos  $t_i$ , em que  $i = 1, \dots, I$ . O uso da seguinte fórmula permite o cálculo da sua duração de Macaulay:

$$DurMac = \frac{\sum_{i=1}^I t_i \times \frac{C_{t_i}}{(1+y)^{t_i}}}{P} \quad (5)$$

Em que  $C_i$  corresponde a um pagamento de cupão ou do valor nominal no momento  $i$ ,  $y$  corresponde à *yield* e  $P$  corresponde ao preço da obrigação. A duração modificada é uma extensão da duração de Macaulay e é apresentada da seguinte forma (Hull, 2017):

$$Dur = \frac{DurMac}{1+y} \quad (6)$$

Admitindo que existe apenas um pagamento de cupão por período. Esta é uma medida útil que pode ser utilizada na seguinte fórmula, que calcula de forma aproximada a percentagem de variação no preço da obrigação para uma determinada variação na *yield*:

$$\frac{\Delta P}{P} = - Dur \times \Delta y \quad (7)$$

Ora, a duração modificada pode ser calculada para as responsabilidades de um fundo de pensões com benefícios definidos. Neste caso, os *cash-flows* serão os benefícios a pagar em cada um dos períodos futuros, a *yield* será a *discount rate* escolhida pelos responsáveis do *scheme* e pelo atuário e o preço será a soma do valor atual dos benefícios a pagar em cada um dos períodos - ou seja, as responsabilidades.

Porém, o cálculo poderá ser mais complexo, devido à imensidão de *cash-flows* e de períodos. A fórmula (7) confirma que variações na *discount rate* terão um efeito de sinal contrário nas responsabilidades, visto que a duração modificada é naturalmente sempre positiva. Note-se ainda que, se for calculada a duração modificada também para os ativos do *scheme*, é possível perceber o efeito de uma variação da *discount rate* sobre o seu FL e sobre a sua FP. Daqui em diante, sempre que neste trabalho for feita referência à duração, entenda-se duração modificada.

Por outro lado, um aumento da taxa prevista de crescimento dos salários irá produzir um incremento no valor das responsabilidades. A explicação para este fenómeno pode, por exemplo, remeter para as fórmulas (1) e (2) apresentadas anteriormente neste subcapítulo: nesses tipos de fundos de pensões com benefícios definidos, salários superiores são o equivalente a benefícios superiores no futuro e a maiores responsabilidades.

Da mesma forma, se se prever um aumento da taxa de inflação, as responsabilidades tomarão um valor mais elevado. Isto prende-se com o facto de grande parte dos DB *pension schemes* oferecerem benefícios que se encontram de alguma forma indexados à taxa de inflação ou a taxas semelhantes extraídas de outros índices de preços. Este facto já foi notado anteriormente neste trabalho quando se reconheceu a existência de taxas de reavaliação para os fundos que relacionam as pensões com a média dos salários auferidos pelo trabalhador ao longo dos seus anos como membro. Como é evidente, um aumento da taxa de inflação significa também responsabilidades mais elevadas devido ao simples facto de que os salários nominais tendem a reagir a esse fenómeno.

Por último, a previsão de um aumento do tempo de reforma também terá um efeito de expansão sobre as responsabilidades. A explicação é óbvia: prevê-se que se terão de pagar pensões durante períodos mais longos, portanto as responsabilidades serão maiores.

Resta sublinhar a importância dos *DB pension schemes* no contexto deste trabalho. LDI é uma técnica que se aplica e que só faz sentido no âmbito da gestão deste tipo de fundos de pensões. Se apenas neste tipo de fundos de pensões é possível confrontar o nível dos seus ativos com o nível das suas responsabilidades, também apenas para este tipo de fundos de pensões faz sentido procurar estratégias de gestão dos ativos que garantam uma evolução do seu valor de forma a assegurar o cumprimento de todas as responsabilidades.

Num fundo de pensões com contribuições definidas são as contribuições requeridas pelo fundo aos pensionistas, e não os benefícios oferecidos, que se encontram definidas à partida. A pensão que um membro irá receber é completamente incerta até ao dia em que este transita para beneficiário, pois é como se cada membro tivesse o seu fundo de pensão particular, ou *pot* - o seu valor dependerá das contribuições realizadas, da *performance* dos investimentos que o membro escolheu (de entre um leque pré-selecionado pelos responsáveis do fundo de pensões em conjunto com o seu gestor) e dos custos que estes acarretaram. Neste caso, o risco dos investimentos é suportado pelo próprio membro, não pelo *sponsor*.

## 2.2 *Liability-Driven Investments*

Importa nesta fase do trabalho expor, em traços gerais, o conceito de LDI. Scheuenstuhl (2012) contextualiza o aparecimento e disseminação deste tipo de estratégias como uma resposta aos efeitos de diversas crises financeiras no ocidente, de uma forma geral, sobre os *schemes*: decréscimo significativo do valor dos ativos, redução do FL e, por vezes, necessidade de contribuições adicionais por parte do *sponsor* ou de intervenção de organismos regulatórios. No ambiente descrito, *schemes* cuja estratégia de investimento passa apenas pela diversificação dos ativos parecem condenados a fracassar no longo-prazo, apesar de este continuar a ser um princípio financeiro basilar.

Tendo em conta o carácter cíclico das crises atrás mencionadas e o tipo de responsabilidades inerentes aos *DB pension schemes*, parece normal e, mais do que isso, necessário que a gestão desses fundos de pensões inclua, a partir de uma dada altura, uma estratégia que interligue ativos e responsabilidades, protegendo o *scheme* de eventos excecionais que coloquem em causa o seu objetivo. No seu sentido mais estrito, uma estratégia de LDI significa uma total correspondência entre os *cash-flows* originados pelos ativos detidos pelo fundo de pensões e os *cash-flows* correspondentes às suas

responsabilidades.<sup>3</sup> Mas, de uma forma mais comum, as estratégias de LDI estão apenas preparadas para anular variações significativas do valor das responsabilidades despoletadas por fatores de risco como a taxa de juro ou a taxa de inflação. Neste contexto, o *hedging* - uso de instrumentos financeiros para reduzir ou eliminar um determinado tipo de risco, que pode estar relacionado com variações do preço do petróleo, de uma determinada taxa de câmbio ou do nível do mercado acionista, entre outras (Hull, 2017) - destes fatores de risco é geralmente feito com recurso a obrigações, a derivados ou a uma combinação dos dois.

No entanto, nem todos os *schemes* se encontrarão numa fase adequada para a implementação deste tipo de estratégia. Naturalmente, serão os fundos de pensões cujo FL já igualou ou superou a fasquia dos 100% que pretenderão conservar esse equilíbrio ou excedente. Os fundos de pensões cujo FL ainda se encontra abaixo dessa fasquia pretenderão antes que os seus ativos variem em montantes superiores aos das suas responsabilidades, de modo a eliminarem o défice existente.

Uma limitação das estratégias LDI que merece ser referida prende-se com a hipotética inexistência de ativos que permitam colocá-las em prática, dependendo da própria estratégia a implementar, das características das responsabilidades do fundo de pensões em questão e do tipo de risco que se pretende reduzir ou eliminar. Por exemplo, será difícil encontrar instrumentos que permitam fazer face aos riscos associados à taxa de crescimento dos salários e ao tempo de reforma.

Parece adequado que se introduzam e comparem agora diferentes estratégias LDI, estratégias estas que têm como propósito encontrar o portfólio ótimo de imunização. De uma forma geral, o conceito de imunização refere-se ao investimento dos ativos de um fundo de pensões de tal forma que este se torne imune a variações na taxa de juro (Redington, 1952). Mais concretamente, no âmbito deste trabalho, referir-se-á a estratégias em que, através do investimento num portfólio de obrigações, se procura replicar uma determinada medida da duração das responsabilidades.

### 2.2.1 Modelo Tradicional de Duração

Efetuar o *matching* da duração dos ativos com a das responsabilidades é uma forma comum de reduzir o risco associado a variações da taxa de juro suportado por um

---

<sup>3</sup> Ver, por exemplo, Kocherlakota *et al* (1988) e Kocherlakota *et al* (1990) para modelos que procuram efetuar este tipo de *matching*.

fundo de pensões. Pretende-se com esta estratégia que ativos e responsabilidades do fundo de pensões tenham a mesma sensibilidade a essas variações.

Já foi neste trabalho abordado o conceito de duração, suas formas de cálculo e aplicação. Tendo em conta o que sobre ele foi referido, é possível interpretar a duração como uma medida linear da forma como o preço de uma obrigação se altera em função de variações da *yield*. Ou seja, a sua fórmula poderá ser obtida através da primeira derivada do preço de uma obrigação em ordem à *yield* (ver Apêndice A). Todavia, é pouco provável que o preço de uma obrigação varie linearmente em função da *yield*. Sendo assim, é necessária uma outra medida que ajude a prever essas variações com mais exatidão.

A convexidade é obtida através da segunda derivada do preço de uma obrigação em ordem à *yield* (ver Apêndice A). É possível de ser interpretada como uma medida da forma como a duração de uma obrigação se altera em função de variações na *yield*. A fórmula utilizada no seu cálculo é a seguinte (Brown & Reilly, 2012):

$$Con = \frac{\sum_{i=1}^I (t_i^2 + t_i) \times \frac{C_{t_i}}{(1+y)^{t_i}}}{\frac{P}{(1+y)^2}} \quad (8)$$

A ideia de efetuar o *matching* da duração como estratégia de gestão integrada de ativos e responsabilidades teve a sua génese em Redington (1952). Suponha-se que um fundo de pensões investiu num conjunto de ativos (obrigações *default-free* que efetuam pagamentos de cupão e do valor nominal), tendo também responsabilidades que se materializam em pagamentos a efetuar ao longo do tempo. Suponha-se que é conhecido o valor dos ativos e das responsabilidades, sendo estes atualizados à mesma *yield* ou *discount rate*  $y$ . Defina-se uma variável  $S$ , diferenciável duas vezes em ordem a  $y$ , que corresponde à diferença entre o valor dos ativos e das responsabilidades:

$$S_y = \sum_{i=1}^I \frac{A_{t_i}}{(1+y)^{t_i}} - \sum_{i=1}^I \frac{L_{t_i}}{(1+y)^{t_i}} \quad (9)$$

Segundo o teorema de Taylor, a aproximação quadrática a  $S_{y+\Delta y}$  é dada por:

$$S_{y+\Delta y} = S_y + \frac{S'_y}{1!} \times \Delta y + \frac{S''_y}{2!} \times \Delta y^2 \quad (10)$$

Recordando parte do que já foi exposto neste trabalho, torna-se perceptível que  $S'_y$  não é mais do que a diferença entre a duração dos ativos e a duração das responsabilidades

do fundo de pensões. Desta forma, de modo a anular o segundo membro de  $S_{y+\Delta y}$ , basta que os ativos e as responsabilidades tenham a mesma duração.

Em relação ao terceiro membro de  $S_{y+\Delta y}$ , sabe-se que  $\Delta y^2$  será sempre positivo. Sendo  $S_y''$  a diferença entre a convexidade dos ativos e a convexidade das responsabilidades do fundo de pensões, será à partida conveniente que a convexidade daqueles seja superior à convexidade destas. Isto porque, se ativos e responsabilidades tiverem a mesma duração e a convexidade dos ativos for superior à das responsabilidades, o fundo de pensões experienciará aumentos da sua FP qualquer que seja a variação de  $y$  (desde que esta não seja suficientemente acentuada para tornar relevantes os termos mais elevados do polinómio de Taylor).

Depois deste enquadramento, existem condições para formalizar o problema de otimização. Seja  $Dur_L$  a duração e  $Con_L$  a convexidade das responsabilidades do fundo de pensões. Suponha-se que se encontra à disposição um leque de obrigações  $n = 1, \dots, N$ . Defina-se um vetor com a duração de cada uma das  $N$  obrigações:

$$Dur_A = \begin{bmatrix} Dur_{A_1} \\ Dur_{A_2} \\ \dots \\ Dur_{A_N} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Defina-se um vetor com a convexidade de cada uma das  $N$  obrigações:

$$Con_A = \begin{bmatrix} Con_{A_1} \\ Con_{A_2} \\ \dots \\ Con_{A_N} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Por último, defina-se um vetor com o peso de cada uma das  $N$  obrigações no total do portfólio de ativos:

$$\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_N] \quad (13)$$

Concretamente, formalizar-se-á o problema do seguinte modo:

$$\min_{\alpha} \left\| \begin{matrix} (\alpha \times Dur_A - Dur_L)^2 \\ (\alpha \times Con_A - Con_L)^2 \end{matrix} \right\| \quad (14)$$

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n = 1 \quad (15)$$

$$0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (16)$$

Note-se que, em (14), pretende-se minimizar ao mesmo tempo a diferença entre a duração dos ativos e das responsabilidades e a diferença entre a convexidade dos ativos e

das responsabilidades. Porém, a abordagem de Redington (1952) incitava a que o problema, qualquer que ele fosse, estivesse sujeito a uma condição de igualdade entre a duração dos ativos e das responsabilidades e a uma condição de superioridade da convexidade dos ativos face à das responsabilidades. Ao passo que as responsabilidades têm uma duração e uma convexidade muito elevadas que tendem a ir decrescendo, existem no mercado poucas obrigações com maturidades superiores a 30 anos (uma solução para este problema seria incluir derivados no portfólio de ativos para aumentar a sua duração e convexidade). Assim, existirão períodos em que o fundo de pensões, mesmo investindo a totalidade dos seus recursos na obrigação com a maior maturidade, não conseguirá igualar a duração dos seus ativos com a das suas responsabilidades. De forma ainda mais prolongada, existirão períodos em que a convexidade das responsabilidades do fundo de pensões será sempre superior à dos ativos, independentemente das obrigações em que este invista os seus recursos. Como é habitual, em (15) estabelece-se que a soma dos pesos de cada uma das obrigações no total do portfólio de ativos tem de perfazer 100%. Por último, em (16) exclui-se a possibilidade de fazer *short sell* de obrigações e de investir mais do que a totalidade dos recursos numa só obrigação.

Apesar do atrativo da sua simplicidade, há que ter em conta que este modelo se baseia em duas premissas irrealistas. Em primeiro lugar, assume que todos os ativos e responsabilidades serão atualizados a uma mesma *yield*, independentemente da sua maturidade – assume uma *yield curve* completamente plana. Em segundo lugar, assume que a aproximação quadrática a  $S_{y+\Delta y}$  é suficiente – assume que existirão apenas pequenas variações paralelas na *yield curve*.

### 2.2.2 Modelo Vetorial de Duração

Este modelo é uma generalização do modelo tradicional de duração, na medida em que não assume que existirão apenas pequenas variações paralelas numa *yield curve* completamente plana. De modo a eliminar esta premissa, é necessário que *cash-flows* correspondentes a diferentes períodos sejam atualizados com diferentes *yields* ou *discount rates*.

O Modelo Vetorial de Duração, como o nome indica, implica o cálculo de um vetor de medidas de risco. Este modelo é apresentado de forma extensiva em Chambers & Nawalkha (1997). Seja  $A_0$  o valor de um portfólio de obrigações no momento presente,

efetuando estas pagamentos de cupão e do valor nominal representados por  $C_{t_i}$  e ocorrendo estes nos momentos  $t_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, I$ . Seja este portfólio a totalidade dos ativos de um fundo de pensões. Seja  $f_t$  a curva das taxas de juro *forward* instantâneas. Então, uma deslocação na curva das taxa de juro *forward* instantâneas de  $f_t$  para  $f'_t$  pode ser representada por  $f'_t = f_t + \Delta f_t$  e uma variação instantânea no valor do portfólio de obrigações pode ser representada por:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta A_0}{A_0} = & -D_1^A \times \Delta f_0 - D_2^A \times \left[ \frac{1}{2} \times \left( \frac{\partial \Delta f_t}{\partial t} - \Delta f_0^2 \right) \right]_{t=0} - D_3^A \\ & \times \left[ \frac{1}{3!} \times \left( \frac{\partial^2 \Delta f_t}{\partial t^2} - 3 \times \Delta f_0 \times \frac{\partial \Delta f_t}{\partial t} + \Delta f_0^3 \right) \right]_{t=0} - \dots - D_Q^A \\ & \times \left[ \frac{1}{Q!} \times \left( \frac{\partial^{Q-1} \Delta f_t}{\partial t^{Q-1}} + \dots + (-1)^{Q+1} \times \Delta f_0^Q \right) \right]_{t=0} \quad (17) \end{aligned}$$

Em que  $q = 1, 2, \dots, Q$  e:

$$D_q^A = \frac{\sum_{i=1}^I t_i^q \times \frac{C_{t_i}}{e^{t_i \times y_{t_i}}}}{A_0} \quad (18)$$

Assim, a variação percentual no valor do portfólio de obrigações é resultado do produto de dois vetores. O primeiro vetor depende da maturidade das obrigações do portfólio. O primeiro elemento deste vetor é simplesmente uma média ponderada do tempo até à maturidade. Os restantes elementos são igualmente médias ponderadas do tempo até à maturidade, mas elevados ao quadrado, ao cubo, e por aí em diante. O segundo vetor depende das deslocações na curva das taxas de juro *forward* instantâneas. Neste vetor, o primeiro elemento representa uma variação no nível da curva das taxas de juro *forward* instantâneas no momento 0 (dada por  $\Delta f_0$ ); o segundo elemento representa a diferença entre o quadrado dessa variação e o seu declive (dado por  $\partial \Delta f_t / \partial t$  em  $t = 0$ ); e o terceiro elemento representa a interação entre essa variação, o cubo dessa variação, o seu declive e a sua curvatura (dada por  $\partial^2 \Delta f_t / \partial t^2$  em  $t = 0$ ). Obviamente, a variação instantânea no valor das responsabilidades de um fundo de pensões submete-se exatamente à mesma lógica. Geralmente, os três primeiros membros do primeiro vetor são suficientes para capturar o risco de taxa de juro inerente a um conjunto de obrigações ou de responsabilidades.

O objetivo será o de encontrar um portfólio ótimo de ativos que replique o comportamento das responsabilidades do fundo de pensões. Portanto, se se admitir que,



tal como no modelo apresentado em 2.2.1, os ativos do fundo de pensões podem ser investidos em  $n = 1, 2, \dots, N$  obrigações e que o vetor  $\alpha$  comporta o peso de cada uma das  $N$  obrigações no total do portfólio de ativos, o problema de otimização será formalizado da seguinte forma:

$$\min_{\alpha} \left\| \begin{array}{l} (\alpha \times D_1^A - D_1^L)^2 \\ (\alpha \times D_2^A - D_2^L)^2 \\ (\alpha \times D_3^A - D_3^L)^2 \end{array} \right\| \quad (19)$$

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n = 1 \quad (20)$$

$$0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (21)$$

Idealmente, pretender-se-ia igualar  $\alpha \times D_q^A$  a  $D_q^L$ , para  $q = 1, 2, 3$ . Pelos mesmos motivos apresentados no problema de otimização em 2.2.1, existirão períodos em que será impossível igualar a medida de risco  $D$  para ativos e responsabilidades, até porque desta vez a função objetivo, expressa em (19), terá mais do que duas restrições. As condições (20) e (21) são as mesmas do problema de otimização anterior e, como tal, têm aqui o mesmo significado que tinham no contexto desse problema.

### 2.2.3 Modelo de Duração Key-Rate

À semelhança do que acontecia no Modelo Vetorial de Duração, este é um modelo que permite efetuar o *hedging* de variações aleatórias na *yield curve*. Contudo, enquanto que o Modelo Vetorial de Duração oferece proteção diretamente contra mudanças na forma da *yield curve* (no seu nível, declive e curvatura), o Modelo de Duração *Key-Rate* oferece proteção contra variações num número finito de *key-rates* que servem de *proxies* para as mudanças na forma da *yield curve*. O modelo apresentado em seguida é inspirado no apresentado em Ho (1992).

Admita-se novamente que *cash-flows* correspondentes a diferentes períodos são atualizados com diferentes *yields* de obrigações. No contexto deste modelo, defina-se  $KRD_{t_i}$  como a duração *key-rate*, o negativo da primeira derivada do preço de uma obrigação em ordem a uma *yield* em particular sobre o preço dessa mesma obrigação. Então, a percentagem de variação no preço da obrigação para uma variação em cada uma das diferentes *yields* será:

$$\frac{\Delta P}{P} = - \sum_{i=1}^I KRD_{t_i} \times \Delta y_{t_i} \quad (22)$$

Desta forma, facilmente se deduz que a soma das várias  $KRD_{t_i}$  tenderá para a medida tradicional de duração.

Risco é um termo bastante utilizado no contexto da teoria moderna do portfólio (Markowitz, 1952). Neste caso, o risco associado à obrigação pode ser obtido através do cálculo da variância de (22):

$$\begin{aligned} Var\left(\frac{\Delta P}{P}\right) &= Var\left(-\sum_{i=1}^I KRD_{t_i} \times \Delta y_{t_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^I KRD_{t_i}^2 \times Var(\Delta y_{t_i}) + 2 \\ &\times \sum_{i=1}^I \sum_{i \neq j}^I KRD_{t_i} \times KRD_{t_j} \times Cov(\Delta y_{t_i}, \Delta y_{t_j}) \end{aligned} \quad (23)$$

Logicamente, (22) e (23) servem também para calcular, respetivamente, a percentagem de variação no valor das responsabilidades de um fundo de pensões e a sua variância. Admita-se que  $A$  representa os ativos de um fundo de pensões e  $L$  representa as suas responsabilidades. Desta maneira:

$$\begin{aligned} Var\left(\frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta A}{A}\right) &= Var\left(-\sum_{i=1}^I EKRD_{t_i} \times \Delta y_{t_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^I EKRD_{t_i}^2 \times Var(\Delta y_{t_i}) + 2 \\ &\times \sum_{i=1}^I \sum_{i \neq j}^I EKRD_{t_i} \times EKRD_{t_j} \times Cov(\Delta y_{t_i}, \Delta y_{t_j}) \end{aligned} \quad (24)$$

Em que  $EKRD_{t_i}$  representa a diferença entre  $KRD_{t_i}^L$  e  $KRD_{t_i}^A$ . De novo, admita-se que existem  $n = 1, 2, \dots, N$  obrigações disponíveis para investimento e que o vetor  $\alpha$  inclui o peso de cada uma dessas  $N$  obrigações no total do portfólio de ativos. Admita-se também que se selecionaram  $i = 1, 2, \dots, I$  key-rates. Deste modo,  $EKRD$  será um vetor  $I \times 1$ . Defina-se  $\sigma$  como a matriz simétrica das covariâncias entre as diversas variações nas key-rates:

$$\sigma = \begin{bmatrix} Cov(\Delta y_{t_1}, \Delta y_{t_1}) & Cov(\Delta y_{t_1}, \Delta y_{t_2}) & \dots & Cov(\Delta y_{t_1}, \Delta y_{t_I}) \\ Cov(\Delta y_{t_2}, \Delta y_{t_1}) & Cov(\Delta y_{t_2}, \Delta y_{t_2}) & \dots & Cov(\Delta y_{t_2}, \Delta y_{t_I}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Cov(\Delta y_{t_I}, \Delta y_{t_1}) & Cov(\Delta y_{t_I}, \Delta y_{t_2}) & \dots & Cov(\Delta y_{t_I}, \Delta y_{t_I}) \end{bmatrix} \quad (25)$$

Finalmente, é possível formalizar o problema de otimização, de acordo com Falkenstein & Hanweck (1996):

$$\min_{\alpha} EKRD^T \times \sigma \times EKRD \quad (26)$$

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n = 1 \quad (27)$$

$$0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (28)$$

A função objetivo (26) pretende minimizar a variância da diferença entre variações no valor de ativos e responsabilidades apresentada em (24). O significado das condições (27) e (28) já foi explicitado no contexto dos problemas de otimização apresentados em 2.2.1. e 2.2.2., onde estas também se encontram presentes.

#### 2.2.4 Modelo de Duração da Componente Principal

Neste subcapítulo assume-se que os movimentos na *yield curve* podem ser sumarizados por variáveis construídas através da aplicação da técnica estatística que dá o nome a este modelo - análise da Componente Principal (CP). De uma forma muito resumida, esta é uma técnica que pretende reunir a informação contida em determinadas variáveis principais num conjunto menor de variáveis derivadas a partir do conjunto principal que sejam representativas desses dados. Beliaeva *et al* (2005) serve como base para a apresentação que neste trabalho se faz deste modelo.

Este modelo tem por princípio que quaisquer variações nas *yields* estão associadas a um conjunto único de variações nas CP. Da mesma forma, quaisquer variações nas CP estão associadas a um conjunto único de variações nas *yields*. Por conseguinte, apresentam-se as variações nas CP como combinações lineares de variações nas *yields*:

$$\Delta CP_i = \sum_{i=1}^I U_{ji} \times \Delta y_{t_i} \quad (29)$$

Em que  $U_{ji}$  se denominam como os coeficientes da CP. Este modelo faz igualmente uso da matriz das covariâncias utilizada na formulação do anterior problema de otimização. Essa matriz é simétrica por definição e, como tal, pode ser decomposta em:

$$\sigma = U^T \times \lambda \times U \quad (30)$$

Em que  $U$  é uma matriz  $I \times I$  em que cada linha corresponde a um vetor próprio de  $\sigma$  e  $\lambda$  é uma matriz diagonal  $I \times I$  que comporta os valores próprios de  $\sigma$ . Assim, os coeficientes da CP são os elementos de  $U$  e formam os vetores próprios da matriz das covariâncias. Para obter cada um dos vetores próprios, é necessário obter primeiro os valores próprios de  $\sigma$  através da resolução da seguinte equação:

$$Det[\sigma - \lambda] = 0 \quad (31)$$

E os vetores próprios serão solução para o seguinte conjunto de equações:

$$(\sigma - \lambda_j) \times U_j = 0 \quad (32)$$

Em que  $j = 1, 2, \dots, I$ . Para além disso,  $U$  é ortogonal, ou seja, a sua matriz inversa é igual à sua matriz transposta. Fazendo uso desta propriedade e partindo de (29), é também possível expressar as variações nas *yields* como combinações lineares de variações nas CP:

$$\Delta y_{t_i} = \sum_{j=1}^I U_{ji} \times \Delta CP_j \quad (33)$$

Os coeficientes da primeira CP correspondem aos elementos do vetor próprio associado ao maior valor próprio; os coeficientes da segunda CP correspondem aos elementos do vetor próprio associado ao segundo maior valor próprio; e por aí em diante. Porque as variações nas *yields* podem ser explicadas pelas  $I$  CP e a variância de cada CP é dada pela magnitude do seu valor próprio, a variância total das *yields* é a seguinte:

$$\sum_{j=1}^I \lambda_j \quad (34)$$

E a proporção da variância total das *yields* explicada por cada uma das CP é dada por:

$$\frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^I \lambda_j} \quad (35)$$

Normalmente, as três primeiras CP são suficientes para explicar a quase totalidade da variância das *yields*. Representam, respetivamente, variações no nível, no declive e na curvatura da *yield curve*.

De qualquer forma, os valores próprios implicam variâncias bastante diferentes para cada CP, fazendo com que variações no nível, no declive e na curvatura da *yield curve* não sejam igualmente prováveis. Para que essas variações sejam igualmente prováveis, altera-se o modelo de forma a que cada uma delas tenha variância unitária:

$$\Delta y_{t_i} = \sum_{j=1}^3 U_{ji} \times \sqrt{\lambda_j} \times \frac{\Delta CP_j}{\sqrt{\lambda_j}} + \varepsilon_i \quad (36)$$

Em que  $\varepsilon_i$  representa as variações não explicadas pelas três CP. Designe-se  $U_{ji} \times \sqrt{\lambda_j}$  como  $U_{ji}^*$  e  $\Delta CP_j / \sqrt{\lambda_j}$  como  $\Delta CP_j^*$ .

A percentagem de variação no preço da obrigação para uma variação em cada uma das diferentes *yields* será:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P}{P} &= - \sum_{i=1}^I KRD_{t_i} \times \sum_{j=1}^3 U_{ji}^* \times \Delta CP_j^* \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta P}{P} &= - \sum_{j=1}^3 \Delta CP_j^* \times \sum_{i=1}^I KRD_{t_i} \times U_{ji}^* \quad (37) \end{aligned}$$

Designa-se  $\sum_{i=1}^I KRD_{t_i} \times U_{ji}^*$  como  $PCD_j$ . De novo, admita-se que existem  $n = 1, 2, \dots, N$  obrigações disponíveis para investimento e que o vetor  $\alpha$  inclui o peso de cada uma dessas  $N$  obrigações no total do portfólio de ativos. A otimização será conseguida através da resolução do seguinte problema:

$$\min_{\alpha} \left\| \begin{array}{l} (\alpha \times PCD_1^A - PCD_1^L)^2 \\ (\alpha \times PCD_2^A - PCD_2^L)^2 \\ (\alpha \times PCD_3^A - PCD_3^L)^2 \end{array} \right\| \quad (38)$$

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n = 1 \quad (39)$$

$$0 \leq \alpha_n \leq 1 \quad (40)$$

Em (38) pretende-se minimizar a diferença entre a medida de risco  $PCD_j$  correspondente aos ativos e às responsabilidades do fundo de pensões. As condições (39) e (40) mantêm o mesmo significado que tinham no contexto dos anteriores problemas.

### 3. ESTUDO DE CASO

No presente capítulo implementam-se os quatro modelos apresentados em 2.2, o que implicará a resolução sucessiva de problemas de otimização. Em termos gerais, a experiência será feita com auxílio do *Microsoft Excel 2016*<sup>4</sup> e basear-se-á na gestão dos ativos de um fundo de pensões durante 20 anos, de acordo com cada um dos modelos apresentados anteriormente. Ao longo dos anos, o *scheme* terá de fazer face às suas responsabilidades. O problema de otimização inerente a cada um dos modelos será resolvido em cada um dos *time steps* para diferentes *yield curves* com recurso à ferramenta *Solver*, incluída no *Microsoft Excel 2016*.

Neste contexto, admitir-se-á a existência de *projected payouts*, para um total de 80 anos, embora as estratégias de imunização sejam implementadas apenas nos 20 primeiros anos. Assim sendo, as responsabilidades estendem-se para lá do término da experiência. Considerar-se-á uma determinada estrutura fixa de *projected payouts*.

<sup>4</sup> Ver, por exemplo, Lai *et al* (2010) para uma abordagem geral à modelização financeira utilizando *Microsoft Excel* e *Visual Basic for Applications* (VBA).

Os ativos disponíveis para investimento serão constituídos por nove obrigações que efetuarão pagamentos de cupão e do valor nominal periodicamente até à sua maturidade. As maturidades das obrigações serão de 1, 2, 3, 5, 7, 10, 15, 20 e 30 anos. Todas as obrigações terão um valor nominal de 10,000 unidades monetárias e pagarão uma taxa de cupão anual de 5%.

As *yield curves* basear-se-ão em *yields* observadas associadas a obrigações soberanas emitidas por diversos países que serão extraídas da plataforma *Thomson Reuters Eikon*. Neste caso, as *yields* correspondentes a cada um dos países foram extraídas anualmente no período compreendido entre 30 de junho de 2001 e 30 de junho de 2020.

Devido à natural incompletude dos dados (os países não emitem obrigações para todas as maturidades compreendidas entre 1 e 30 anos; para além disso, em muitas das maturidades para as quais foram efetivamente emitidas obrigações, observam-se quebras nas séries temporais), será necessário um modelo que ajude a estimar *yield curves* completas (*i.e.*, que incluam todas as maturidades de 1 a 30 anos) com base nos dados existentes. O modelo utilizado para o efeito foi o modelo exposto originalmente em Nelson & Siegel (1987) e dissecado no Apêndice B. Este modelo foi escolhido pois a *yield curve* não inclui maturidades inferiores a 1 ano; caso contrário, tornar-se-ia conveniente utilizar o modelo apresentado em Svensson (1994). Por uma questão de simplificação, para maturidades superiores a 30 anos assumir-se-á que a *yield curve* é plana e igual à *yield* estimada para uma maturidade de 30 anos (esta informação será relevante apenas para o cálculo do valor e das medidas de duração das responsabilidades).

Em suma: para um dado ano e uma dada estratégia de imunização, existirão tantas soluções como o número de *yield curves* estimadas para cada ano (neste caso 33, porque foram extraídos dados para 33 países), visto que o valor e medidas de duração das responsabilidades e dos ativos dos fundos de pensões dependem exatamente dessas *yield curves*.

Partir-se-á da premissa que as obrigações adquiridas em cada *time step* serão vendidas no seguinte, momento em que se adquirirá um novo lote de obrigações. Isto porque em cada *time step* existirá uma solução diferente para o problema de otimização em questão, o que exige um reajustamento periódico nas alocações do portfólio de ativos do fundo de pensões. Por uma questão de simplificação, ignorar-se-á a existência de eventuais custos de transação resultantes destas operações.

Existirão ainda contribuições cujo valor em cada *time step* dependerá do FL nesse ano. Estas obedecerão ao seguinte cálculo:

$$Contribuições_{t_i} = \begin{cases} CM_{t_i}, & \text{se } FL < 90\% \\ 0.01 \times Responsabilidades_{t_i}, & \text{se } 90\% \leq FL < 110\% \\ 0, & \text{se } 110\% \leq FL < 120\% \\ (1.2 - FL_{t_i}) \times Responsabilidades_{t_i}, & \text{se } FL \geq 120\% \end{cases} \quad (41)$$

Em que a variável Contribuição Máxima (CM) será calculada da seguinte forma:

$$CM_{t_i} = \max \left\{ \frac{0.9 - FL_{t_i}}{PR_{t_i}} \times Responsabilidades_{t_i}; 0.01 \times Responsabilidades_{t_i} \right\} \quad (42)$$

E em que a variável Plano de Recuperação (PR) corresponderá à diferença entre o número de anos que se supõem necessários para o FL regressar ao limiar mínimo (neste caso, assumir-se-á que são 5 anos) e o número de anos que passaram desde que o PR foi posto em prática. As contribuições feitas em cada *time step* transitarão para o seguinte em formato de *cash* (não sujeito a capitalização), momento em que se somarão ao montante resultante da venda das obrigações adquiridas previamente e que servirá para adquirir um novo lote de obrigações. De salientar que, se o FL ultrapassar os 120%, se procederá a uma devolução que reponha o FL nessa mesma fasquia.

Por último, no *time step* 1 admitir-se-á que o FL será igual a 100% e que não existirá lugar a *payout* nem a recebimento de contribuições.<sup>5</sup>

### 3.1 Implementação dos Modelos

Depois da apresentação dos quatro modelos em 2.2., discutir-se-á nos próximos subcapítulos a sua implementação. Para além de aspetos concretos relativos ao experimento levado a cabo, terão especial protagonismo nesta secção o comportamento da função objetivo e da alocação dos ativos do fundo de pensões.

#### 3.1.1 Modelo Tradicional de Duração

No decurso da implementação deste modelo, o problema de otimização resolvido foi ligeiramente diferente do que já havia sido apresentado em 2.2.1 devido a uma limitação da ferramenta *Solver*, que não permite o estabelecimento de duas funções

---

<sup>5</sup> As *spreadsheets* onde foi feita a implementação de cada um dos modelos podem ser encontradas em [gofile.io/d/L8UKmr](https://gofile.io/d/L8UKmr). Os outros ficheiros que deram suporte à implementação podem ser requisitados junto do autor mediante pedido.

objetivo em simultâneo. Consequentemente, a função objetivo expressa em (14) foi substituída por:

$$\min_{\alpha} (\alpha \times Dur_A - Dur_L)^2 + (\alpha \times Con_A - Con_L)^2 \quad (43)$$

Tabela I – Média do valor da função objetivo no MTD

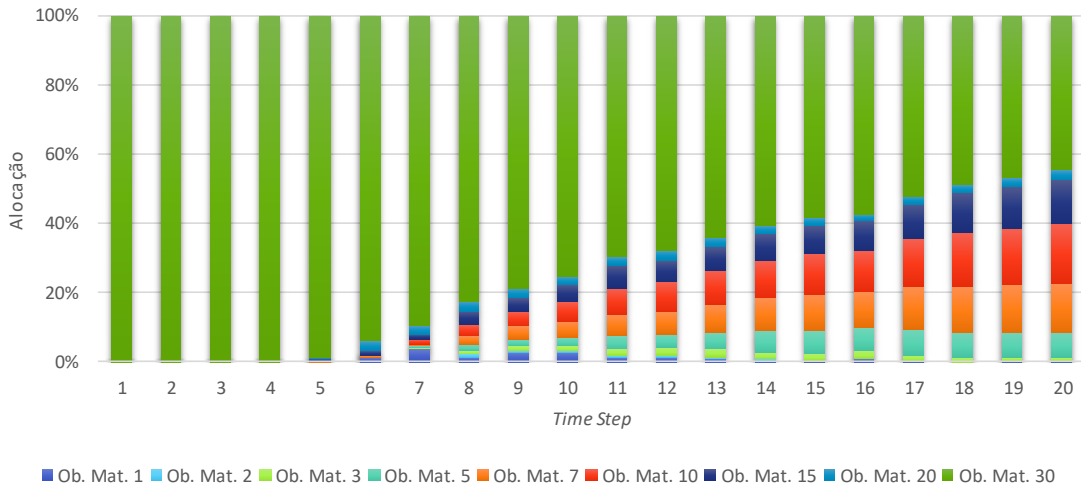
<i>Time Step</i>	Função Objetivo	<i>Time Step</i>	Função Objetivo
1	5,926.20	11	0.00
2	4,049.88	12	0.00
3	3,045.31	13	0.00
4	1,071.36	14	0.00
5	920.60	15	0.00
6	68.54	16	0.00
7	2.05	17	0.00
8	0.01	18	0.00
9	0.00	19	0.00
10	0.00	20	0.00

Na tabela I é possível observar a média do valor da função objetivo em cada *time step*. Note-se que esta média decai rapidamente de valores na ordem das unidades de milhar para valores muito próximos de 0. Este fenómeno não se deveu a ajustes de qualquer espécie na função objetivo ao longo da experiência. Deveu-se apenas à natural evolução da duração e da convexidade das obrigações e das responsabilidades.

Uma observação das tabelas C.I e C.II exibidas no Apêndice C permite perceber que a duração e a convexidade de uma obrigação serão tanto maiores quanto a sua maturidade. Do *time step* 1 ao 5, as médias da duração e da convexidade de qualquer obrigação eram inferiores às das responsabilidades. Nesse período, as médias do valor da função objetivo refletem o investimento exclusivo na obrigação que minimiza essas diferenças – logicamente, a obrigação com a maturidade mais longa (30 anos). A partir do *time step* 6, as médias da duração e da convexidade das responsabilidades tornaram-se inferiores às dessa obrigação e o investimento simultâneo nessa e noutras obrigações permitiu aproximar as médias do valor da função objetivo de 0.



Figura 1 – Média da alocação das obrigações no MTD



A figura 1 mostra a média da alocação de cada uma das obrigações em cada *time step*. Nos cinco primeiros *time steps*, a média da alocação respeitante à obrigação com maturidade de 30 anos iguala ou ronda os 100%, o que se encontra em linha com a análise que foi feita no parágrafo anterior. No *time step* 6 e a partir daí, a média da alocação dessa obrigação diminui de forma gradual mas significativa, até ao ponto de no último *time step* ficar reduzida a menos de 50%.

De forma oposta, é de destacar neste período a evolução crescente da média da alocação das obrigações com maturidade de 5, 7, 10 e 15 anos. No *time step* 6, representavam cerca de um quarto da alocação média excluindo a obrigação com maturidade mais longa (que, por sua vez, se aproximava dos 6% da alocação média total); contudo, no *time step* 20, representavam mais de 90% dessa mesma alocação (que nesse período rondava já os 55% da alocação média total). A alocação média final inclui todas as obrigações, embora os títulos com maturidade de 1, 2, 3 e 20 anos em conjunto tenham apenas uma alocação média residual de aproximadamente 4%.

### 3.1.2 Modelo Vetorial de Duração

Tal como na implementação do Modelo Tradicional de Duração, devido à limitação da ferramenta *Solver* já referida anteriormente, a função objetivo expressa em (19) foi substituída por:

$$\min_{\alpha} (\alpha \times D_1^A - D_1^L)^2 + (\alpha \times D_2^A - D_2^L)^2 + (\alpha \times D_3^A - D_3^L)^2 \quad (44)$$

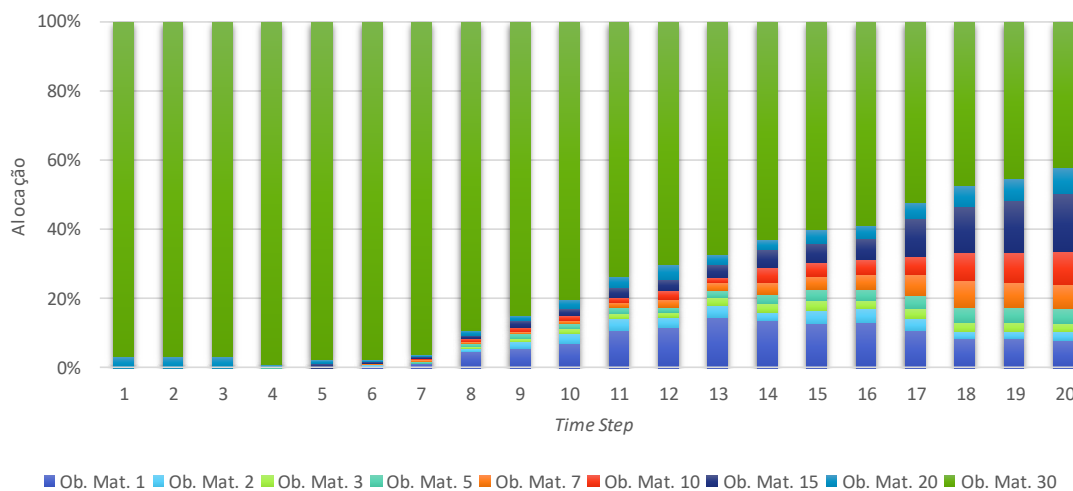
Tabela II – Média do valor da função objetivo no MVD

<i>Time Step</i>	Função Objetivo	<i>Time Step</i>	Função Objetivo
1	20,380,645.61	11	127.38
2	14,587,032.79	12	134.87
3	11,551,988.68	13	25.71
4	6,434,653.22	14	4.94
5	6,402,002.26	15	3.13
6	1,452,534.50	16	6.21
7	505,083.26	17	3.76
8	53,824.13	18	0.79
9	3,343.69	19	0.81
10	353.64	20	2.23

Na tabela II é possível observar a média do valor da função objetivo em cada *time step*. Esta assume valores bastante mais elevados do que no modelo anterior. Isto porque, se os valores da média das medidas  $D1$  (tabela C.III) e  $D2$  (tabela C.IV) são comparáveis aos valores da média da duração e da convexidade, respetivamente, os valores da média da medida  $D3$  (tabela C.V) são bastante superiores a qualquer um deles. Existem semelhanças óbvias entre (7) e (8) e (18) para  $q$  igual a 1 e a 2, respetivamente. Mas para  $q$  igual a 3, (18) não tem correspondência com nenhuma medida utilizada no Modelo Tradicional de Duração. Desta forma, se a função objetivo (44) dá conta da soma do quadrado das diferenças entre as medidas  $D1$ ,  $D2$  e  $D3$  de ativos e responsabilidades, é natural que, no geral, esta assumia valores mais elevados do que a função objetivo (43), que se resume à soma do quadrado das diferenças entre a duração e a convexidade de ativos e responsabilidades.

As medidas  $D1$ ,  $D2$  e  $D3$  de uma obrigação serão tanto maiores quanto a sua maturidade. Do *time step* 1 ao 7, pelo menos uma das médias das três medidas de qualquer obrigação era inferior à das responsabilidades. Nesse período, as médias do valor da função objetivo refletem o investimento exclusivo na obrigação que minimiza essas diferenças – novamente, a obrigação com maturidade de 30 anos. A partir do *time step* 8, as médias das medidas  $D1$ ,  $D2$  e  $D3$  dessa obrigação tornaram-se mais elevadas do que as das responsabilidades e o investimento simultâneo nessa e noutras obrigações permitiu reduzir drasticamente as médias do valor da função objetivo.

Figura 2 – Média da alocação das obrigações no MVD



No que respeita à média da alocação de cada uma das obrigações em cada *time step*, na figura 2 saltam à vista algumas semelhanças com o Modelo Tradicional de Duração. Desde logo, o facto de nos primeiros *time steps* a média da alocação respeitante à obrigação com maturidade de 30 anos igualar ou rondar os 100%. Isto encontra-se em linha com a explicação feita no parágrafo anterior. No *time step* 8 e a partir daí, a média da alocação dessa obrigação diminui insistentemente, até ao ponto de no último *time step* ficar reduzida a pouco mais de 40%.

A principal diferença face a esse modelo reside no facto de a distribuição da alocação média das obrigações ser bastante mais variada. Excluindo a obrigação com maturidade de 30 anos, destacam-se as obrigações com maturidade de 1 e 15 anos. No *time step* 6 representavam cerca de metade da alocação média excluindo a obrigação com maturidade mais longa (que rondava ainda um décimo da alocação média total); no *time step* 20, representavam aproximadamente 43% dessa mesma alocação (que, por essa altura, ascendia já a 57% da alocação média total). Ainda no *time step* 20, a obrigação com a alocação média mais baixa (a obrigação com maturidade de 2 anos) obtém cerca de 2%, sendo que no modelo anterior em momento algum esta chegava sequer a 1% (no último *time step* a sua alocação média aproximava-se de 0%). Isto reforça a ideia de que, apesar das semelhanças face ao modelo anterior, a alocação média total no Modelo Vetorial de Duração é bastante mais equilibrada.

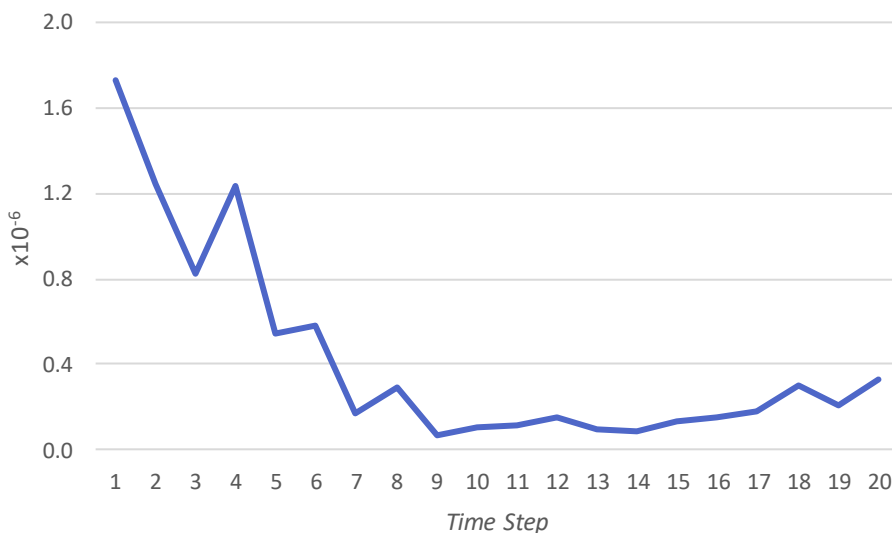
### 3.1.3 Modelo de Duração Key-Rate

A implementação deste modelo exige a escolha das *key-rates* a utilizar e, posteriormente, o cálculo da matriz das covariâncias entre as diversas variações nas *key-rates*.

A escolha das *key-rates* foi feita da seguinte forma. Admitiu-se como *proxy* para as variações nas *yields*, de uma forma global, o histórico das *yields* das obrigações emitidas pelo governo dos Estados Unidos da América no período compreendido entre 30 de junho de 1991 e 30 de junho de 2000, com uma periodicidade anual. Com esse histórico (que incluía *yields* a 1, 2, 3, 5, 7, 10 e 30 anos) estimaram-se *yield curves* completas (novamente com recurso ao modelo de Nelson e Siegel apresentado no Apêndice B) e calculou-se uma matriz das correlações entre as variações absolutas anuais em cada uma das *yields*, que se encontra reproduzida na tabela D.I. Dividiram-se as maturidades em oito grupos devidamente assinalados a azul nessa figura. Esta divisão foi feita de acordo com a dimensão das correlações entre as variações anuais nas *yields*. Selecionaram-se como *key-rates* as *yields* a 1, 3, 5, 7, 10, 17, 25 e 29 anos. Apesar de em Ho (1992) terem sido escolhidas onze *key-rates*, não são oferecidas nesse artigo indicações no que respeita à sua seleção.

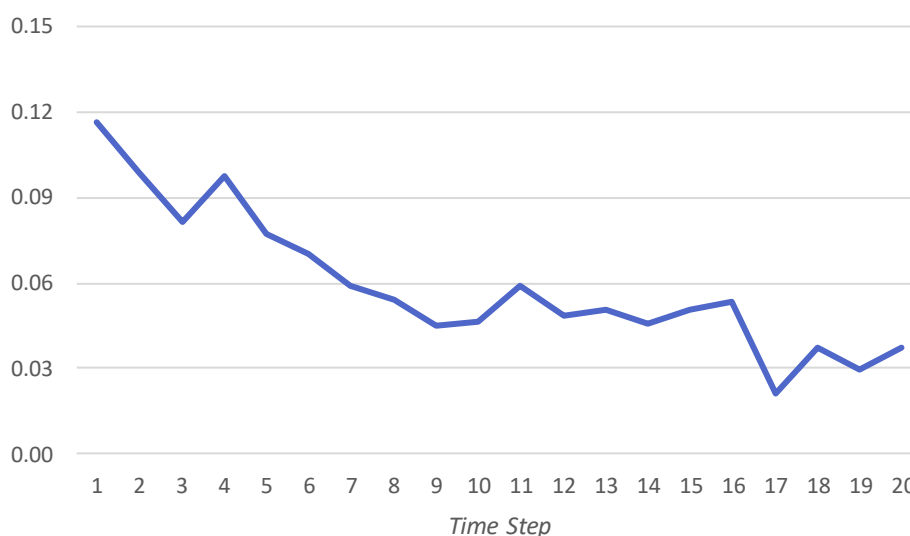
Em seguida foi calculada a matriz das covariâncias entre as variações anuais nas *key-rates*, visível na tabela E.I. De modo a simplificar a implementação deste modelo, esta matriz manteve-se constante ao longo dos vinte *time steps*.

Figura 3 – Média do valor da função objetivo no MDKR



A figura 3 mostra a evolução da média do valor da função objetivo ao longo dos *time steps*. Os valores muito baixos ao longo de toda a experiência devem-se à própria natureza da função objetivo, que multiplica a matriz das covariâncias (cujos valores mais altos se encontram na casa das décimas de milésimo) por vetores que comportam a diferença entre as *key-rates* das responsabilidades e dos ativos (cujos valores mais elevados são décimas de unidade). Em linha com o que aconteceu nos dois modelos anteriores, assiste-se a uma tendência decrescente da média do valor da função objetivo, com ligeiras variações. Isto acontece essencialmente porque, sendo a matriz das covariâncias constante ao longo da experiência, a soma das medidas *EKRD* assume também uma clara tendência decrescente. É através da diferença entre a média das medidas *KRD* das responsabilidades (tabela C.VI) e a média das medidas *KRD* dos ativos (tabela C.VII) que se obtém a média das medidas *EKRD* (tabela C.VIII). Aliás, se se comparar a figura 3 com a figura 4, que ilustra a evolução da soma da média das medidas *EKRD* ao longo dos *time steps*, percebem-se as semelhanças entre os dois gráficos.

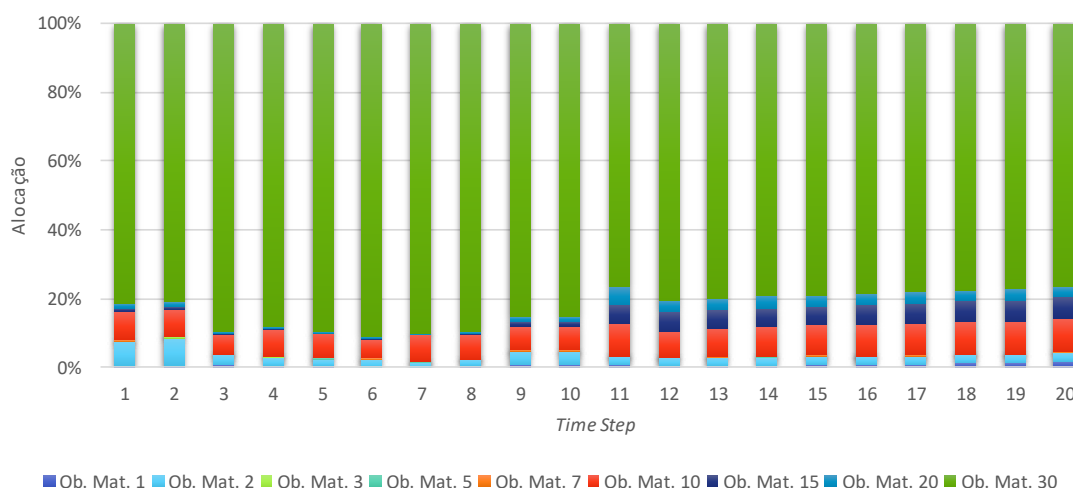
Figura 4 – Soma da média das medidas *EKRD*



A média da alocação de cada uma das obrigações em cada *time step*, visível na figura 5, mostra uma preponderância quase absoluta das obrigações com maturidade de 2, 10, 15, 20 e 30 anos. Para que se perceba o domínio deste grupo de obrigações, a soma da média das suas alocações atinge um mínimo no último *time step* que mesmo assim ronda os 97%.

Começando pela obrigação com maturidade de 30 anos, que grosso modo representou ao longo de toda a experiência entre 80% a 90% desse grupo. É facilmente perceptível que toda essa predominância advém do simples facto de que esta é a única obrigação que permitiu ao longo da experiência efetuar o *matching* da duração *key-rate* a 25 e a 29 anos das responsabilidades. Até ao *time step* 10 a média da duração *key-rate* a 29 anos das responsabilidades excedia a da obrigação com maturidade de 30 anos. A partir do *time step* 10 a situação inverteu-se e agravou-se, o que significa que se tornou cada vez mais necessário o auxílio de outras obrigações que reduzissem o valor da *KRD* a 29 anos dos ativos para valores próximos da das responsabilidades. Isso explica, em parte, o decréscimo ligeiro da alocação média dessa obrigação até final.

Figura 5 – Média da alocação das obrigações no MDKR



Juntamente com a obrigação com maturidade de 30 anos, a obrigação com maturidade de 20 anos é a única que permite o *matching* da duração *key-rate* a 17 anos das responsabilidades. A partir do *time-step* 9, esta passa definitivamente e em específico a efetuar melhor esse *matching* do que a obrigação com maturidade mais longa, o que explica o protagonismo que assume nesse período.

A partir daqui, será perfeitamente normal que as obrigações com maturidade de 1 ano, 3 anos, 5 anos e 7 anos tenham tido apenas posições residuais na alocação média ao longo da experiência (excluindo um ou outro caso pontual), pois algumas das durações *key-rate* selecionadas coincidem com as suas maturidades (os períodos em que todas elas realizam pagamentos de cupão e do valor nominal), o que faz com que a *KRD*

correspondente de cada uma dessas obrigações seja demasiado elevada em comparação com a das responsabilidades e impeça um bom *matching*.

Por exemplo, no que concerne à duração *key-rate* a 1 ano das responsabilidades, é a obrigação com maturidade de 3 anos que permitiria o melhor *matching*. Mas o facto da média da sua *KRD* a 3 anos ser muito elevada em comparação com a das responsabilidades faz com que seja a obrigação com maturidade de 2 anos a substituí-la nesse papel.

Sobram as obrigações com maturidade de 10 anos e 15 anos. O peso da primeira obrigação justifica-se com o facto de esta ser a obrigação que melhor faz o *matching* conjunto das *KRD* a 3, 5 e 7 anos das responsabilidades. Mas o investimento nesta obrigação traz custos, pois a sua duração *key-rate* a 10 anos é muito elevada em comparação com a das responsabilidades. Sendo a obrigação com maturidade de 15 anos a que melhor faz o *matching* dessa *KRD*, conclui-se que a sua presença na alocação média serve para minimizar o impacto nocivo da obrigação com maturidade de 10 anos no resultado da função objetivo. Mesmo assim, a média da *EKRD* a 10 anos tem a maior dimensão em todos os *time steps*.

### 3.1.4 Modelo de Duração da Componente Principal

Tal como nos dois primeiros modelos, a função objetivo (38) teve de ser alterada devido à limitação da ferramenta *Solver*:

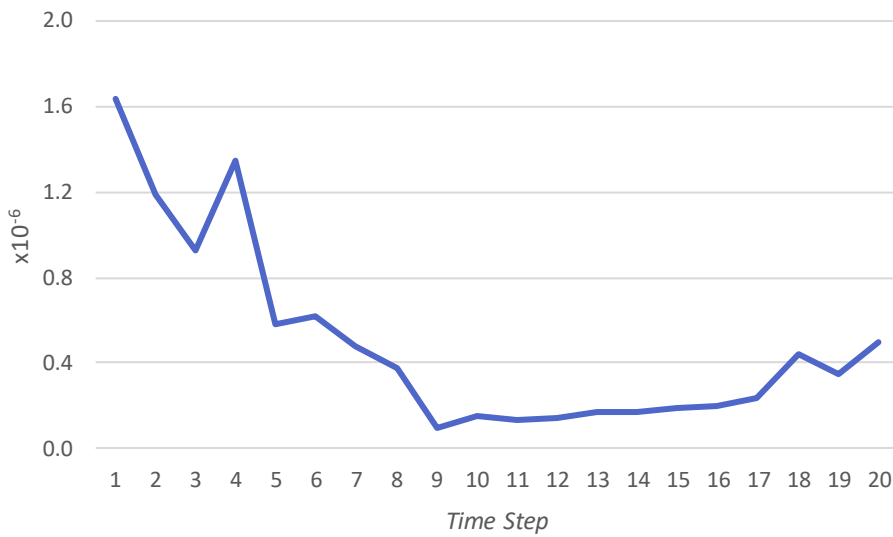
$$\min_{\alpha} (\alpha \times PCD_1^A - PCD_1^L)^2 + (\alpha \times PCD_2^A - PCD_2^L)^2 + (\alpha \times PCD_3^A - PCD_3^L)^2 \quad (45)$$

Depois de calculadas as matrizes  $U^T$  (tabela F.I) e  $\lambda$  (tabela F.II) a partir da matriz das covariâncias da tabela E.I, torna-se perceptível que a proporção da variância total das *yields* explicada pelas três primeiras CP é de 99.8%. Tendo isto em conta, a matriz  $U^*$  utilizada na implementação do modelo pode ser encontrada na tabela F.III.

Novamente de modo a simplificar a implementação deste modelo, esta matriz manteve-se constante ao longo dos vinte *time steps*.

Na figura 6 é possível observar, tal como no modelo anterior, a tendência decrescente da média da função objetivo ao longo dos *time steps*. Para além disso, esta assumiu sempre valores muito diminutos. Esta figura é bastante semelhante à figura 3; tal não surpreende visto que ambas as funções objetivo dependem, de formas diferentes, da diferença entre as *KRD* das responsabilidades e as *KRD* dos ativos.

Figura 6 – Média do valor da função objetivo no MDCP

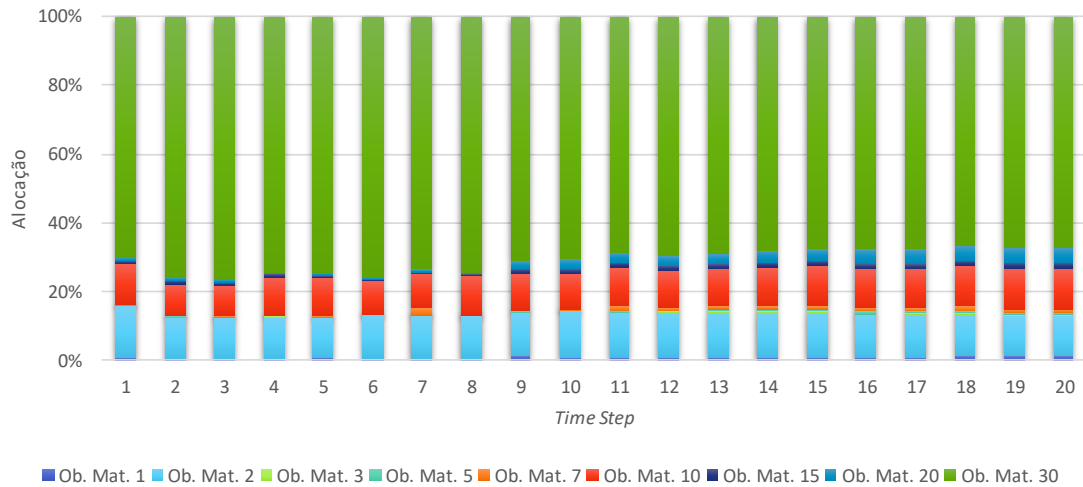


Assim, é também bastante provável que a alocação média das obrigações ao longo da experiência seja bastante semelhante à que foi obtida no Modelo de Duração *Key-Rate*. Na figura 7 confirmam-se essas suspeitas. A principal diferença reside no facto das obrigações com maturidade de 2 anos e 10 anos terem ganho peso em prejuízo das obrigações com maturidade de 15 anos e 30 anos. Isto é explicado pelo facto dos elementos da matriz  $U^*$  que ponderam as durações *key-rate* cujo *matching* era feito essencialmente pelas obrigações com maturidade de 15 e 30 anos (linhas 5 a 8 da tabela F.III) serem inferiores aos elementos que ponderam as durações *key-rate* cujo *matching* era efetuado essencialmente pelas obrigações com maturidade de 2 e 10 anos (linhas 1 a 4 da tabela F.III).

Apesar de tudo isto, o grupo de cinco obrigações continua a dominar a alocação média, com um mínimo de cerca de 96% no último *time step*. No entanto, a obrigação com maturidade de 30 anos passa a representar ao longo da experiência cerca de 70% desse grupo e as obrigações com maturidade de 2 e 10 anos em conjunto cerca de 25%.



Figura 7 – Média da alocação das obrigações no MDCP



### 3.2 Comparação de Resultados

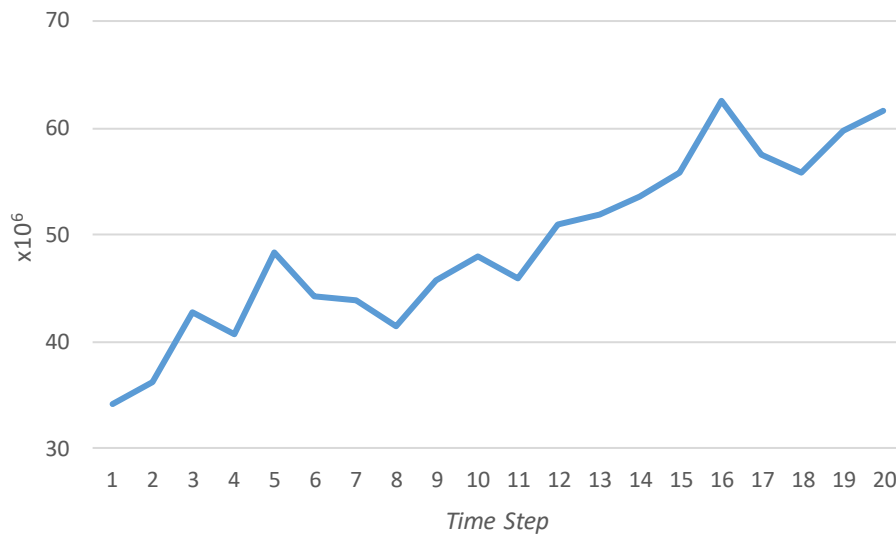
Por último, nos próximos subcapítulos discutir-se-ão os resultados obtidos por cada modelo no que respeita aos AFPaC, às contribuições acumuladas e ao FL.

#### 3.2.1 Ativos do Fundo de Pensões antes de Contribuições

A figura G.1 mostra a comparação entre a média dos AFPaC ao longo dos *time steps* para cada um dos modelos apresentados. Existiu uma ligeira dominância do Modelo de Duração *Key-Rate* e do Modelo de Duração da Componente Principal a partir do *time step* 16; antes disso, a média dos AFPaC foi sempre bastante semelhante para todos os modelos. Com base nestes resultados, é possível prever desde já que o Modelo de Duração *Key-Rate* será o modelo que, no último *time step*, apresentará a maior média do FL. A figura 8, que mostra a média do valor atualizado das responsabilidades ao longo da experiência, explica o trajeto dos AFPaC na figura G.1 e mostra a eficácia dos modelos em fazer com que este mimetize o das responsabilidades.

É possível verificar na figura G.2 que a magnitude da média da volatilidade (desvio-padrão) dos AFPaC aumentou com a magnitude da média dos AFPaC para todos os modelos. Apesar da média da volatilidade de todos os modelos ter evoluído de forma bastante próxima, a partir do *time step* 16 as do Modelo de Duração da *Key-Rate* e do Modelo de Duração da Componente Principal tornaram-se ligeiramente superiores, o que condiz com a análise feita no parágrafo anterior.

Figura 8 – Média do valor atualizado das responsabilidades



### 3.2.2 Contribuições acumuladas

Na figura G.3 é perceptível que a média das contribuições acumuladas de todos os modelos seguiu uma trajetória ascendente até ao *time step* 15. A partir daí, o único que manteve uma trajetória ascendente até final foi o Modelo Vetorial de Duração; os outros três modelos, de forma mais ou menos acentuada e com ligeiras oscilações em alguns casos, iniciaram nesse ponto uma tendência decrescente. Relembre-se que o esquema de contribuições apresentado em (41) depende do FL. Assim, é possível prever desde já que o Modelo Vetorial de Duração será o modelo que, no último *time step*, apresentará a menor média do FL. O modelo que, de forma destacada, finaliza com uma menor média das contribuições acumuladas é o Modelo de Duração *Key-Rate*.

Ao longo da experiência, o Modelo Tradicional de Duração apresentou a menor média da volatilidade das contribuições acumuladas (figura G.4), pois a sua curva da média das contribuições acumuladas é também a mais estável dos quatro modelos. De forma inversa, a curva da média das contribuições acumuladas mais sujeita a variações é a do Modelo de Duração da Componente Principal, o que fez com que ao longo da experiência este exibisse a maior média da volatilidade das contribuições acumuladas.

### 3.2.3 Funding Level

Com os resultados obtidos relativamente aos AFPaC e às contribuições acumuladas, foram feitas duas previsões que são possíveis de constatar na figura G.5: no

*time step* 20, o Modelo de Duração *Key-Rate* alcançou a maior média do FL e o Modelo Vetorial de Duração alcançou a menor média do FL. De resto, a média do FL de todos os modelos seguiu uma tendência crescente ao longo da experiência, embora tenha existido alguma instabilidade no que respeita à forma como estes se hierarquizaram. Essa tendência crescente não é propriamente o objetivo de uma estratégia LDI, que pretende apenas conservar um determinado FL considerado desejável (ver subcapítulo 2.2). No entanto, e visto que graficamente é perceptível a eficácia dos modelos em assegurar que os AFPaC seguem a mesma trajetória das responsabilidades, é possível afirmar que a mencionada tendência crescente resulta de um plano de contribuições que peca por ser excessivo. Provavelmente, este deveria ter-se baseado em regras que, por exemplo, requeressem contribuições apenas em situações em que o FL se afastasse negativamente de 100%. A principal conclusão a retirar é que o FL depende de forma bastante significativa do plano de contribuições.

Em relação à média da volatilidade do FL de cada um dos modelos observável na figura G.6, o Modelo de Duração *Key-Rate* e o Modelo de Duração da Componente Principal destacaram-se claramente com valores superiores ao longo de todos os períodos. Se se observarem as curvas da média do FL destes modelos, percebe-se que, em comparação com as dos outros dois, estas oscilaram bastante ao longo dos períodos e, em alguns momentos, assistiram-se até a inversões significativas contrárias à tendência. Isto encontra-se em linha com a informação contida na figura G.6.

#### 4. CONCLUSÃO

O conjunto dos resultados apontam para uma ligeira dominância do Modelo de Duração *Key-Rate*; da mesma forma, revelam um desempenho ligeiramente inferior do Modelo Vetorial de Duração. Os critérios utilizados foram três indicadores que certamente serão relevantes para os *sponsors*, mas naturalmente existirão muitos outros. Deste modo, não é possível chegar à conclusão de que determinado modelo é o melhor com base apenas nestes resultados (apesar de ser natural que modelos mais complexos produzam melhores resultados, o que se verifica até certo ponto neste trabalho). Até porque seria interessante realizar a mesma experiência com um plano de contribuições menos exigente, algo que já foi mencionado e certamente teria facilitado a comparação e ajudado à clareza das conclusões.

Analisando a experiência em si, existiriam muitos aspetos que, se por um lado a complexificariam, também a tornariam mais próxima da realidade. Desde logo, a modelização das *yields*, que permitiriam simular um número elevado de vezes as *yield curves* em cada *time step*, algo que certamente traria mais consistência aos resultados. Também se poderia proceder à modelização das responsabilidades, tendo como base a simulação de diversos fatores que influenciam o seu valor, tais como a própria *yield curve*, a taxa de inflação, a taxa de mortalidade, as dinâmicas de progressão de carreira, o número de trabalhadores, etc. O ajuste do plano de contribuições ao longo dos períodos com base no desempenho do próprio fundo de pensões também seria algo interessante a adicionar à experiência. Tudo isto traria custos do ponto de vista computacional, o que eventualmente poderia torná-la irrealizável. Mas este parágrafo não deve ser interpretado como sugestões para um único trabalho futuro, antes como possíveis caminhos a seguir para quem se pretender debruçar sobre esta temática.

Existem outras versões dos modelos aqui apresentados que poderão ser estudadas e aplicadas noutros trabalhos do mesmo género. O Modelo Vetorial de Duração Generalizado, apresentado em Nawalkha *et al* (2003), é um exemplo. As suas medidas de duração são semelhantes às do Modelo Vetorial de Duração, mas o valor atualizado dos *cash-flows* é ponderado por  $g(t)^q$  em vez de simplesmente por  $t^q$ . Como alternativa ao Modelo de Duração *Key-Rate* apresentado e implementado neste trabalho, poder-se-á atentar em Reitano (1996) com uma proposta de imunização que utiliza como medida de risco uma média ponderada da variância do portfólio e de uma medida que representa o risco existente no pior cenário. Em relação ao Modelo de Duração da Componente Principal, seria importante atentar nas conclusões de Falkenstein & Hanweck (1997), que sugere que a terceira CP deve ser ignorada, pois a sua instabilidade poderá ter impacto negativo no *hedging*.

Em conclusão, as estratégias LDI poderão ser sem dúvidas úteis à gestão dos ativos de fundos de pensões e este trabalho cumpre o papel de trazer à luz algumas delas, analisando resultados produzidos num contexto experimental e apontando caminhos para investigação futura.

## REFERÊNCIAS

- Beliaeva, N., Nawalkha, S. & Soto, G. (2005). *Interest Rate Risk Modeling: The Fixed Income Valuation Course*, New Jersey: John Wiley & Sons.
- Blake, D. (2006). *Pension Finance*, Chichester: John Wiley & Sons.
- Brown, K. & Reilly, F. (2012). *Investment Analysis and Portfolio Management*, 10<sup>a</sup> Ed. Mason: Cengage Learning.
- Chambers, D. & Nawalkha, S. (1997). *The M-Vector Model: Derivation and Testing of Extensions to M-Square* [Em linha]. Disponível em: <https://papers.ssrn.com/abstract=979600>
- Devolder, P., Janssen, J. & Manca, R. (2012). *Stochastic Methods for Pension Funds*, London: ISTE.
- Falkenstein, E. & Hanweck, J. (1996). Minimizing Basis Risk from Non-Parallel Shifts in the Yield Curve. *The Journal of Fixed Income* 6 (1), 60-68.
- Falkenstein, E. & Hanweck, J. (1997). Minimizing Basis Risk from Non-Parallel Shifts in the Yield Curve Part II: Principal Components. *The Journal of Fixed Income* 7 (1), 85-90.
- Ho, T. (1992). Key Rate Durations: Measures of Interest Rate Risks. *The Journal of Fixed Income* 2 (2), 29-44.
- Hull, J. (2017). *Options, Futures and Other Derivatives*, 10<sup>a</sup> Ed. New York: Pearson Education.
- Kocherlakota, R., Rosenbloom, E. & Shiu, E. (1988). Algorithms for Cash-Flow Matching. *Transactions of Society of Actuaries* 40, 477-484.
- Kocherlakota, R., Rosenbloom, E. & Shiu, E. (1990). Cash-Flow Matching and Linear Programming Duality. *Transactions of Society of Actuaries* 42, 281-293.
- Lai, D., Tung, H. & Wong, M. (2010). *Professional Financial Computing Using Excel and VBA*, Singapore: John Wiley & Sons.

- Macaulay, F. (1938). *Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the U.S. since 1856*, New York: National Bureau of Economic Research.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance* 7 (1), 77-91.
- Nawalkha, S., Soto, G. & Zhang, J. (2003). Generalized M-Vector Models for Hedging Interest Rate Risk. *Journal of Banking and Finance* 27 (8), 1581-1604.
- Nelson, C. & Siegel, A. (1987). Parsimonious Modeling of Yield Curves. *The Journal of Business* 60 (4), 473-489.
- Redington, F. (1952). Review of the Principles of Life-Office Valuations. *Journal of the Institute of Actuaries* 78 (3), 286-340.
- Reitano, R. (1996). Non-Parallel Yield Curve Shifts and Stochastic Immunization. *The Journal of Portfolio Management* 22 (2), 71-78.
- Scheuenstuhl, G. (2012). *Liability Driven Investment Strategies – For Prudent Pension Investing in Turbulent Capital Markets* [Em linha]. Disponível em: [https://www.risklab.com/media/scheuenstuhl\\_ldi\\_strategies.pdf](https://www.risklab.com/media/scheuenstuhl_ldi_strategies.pdf)
- Sullivan, M. (2004). *Understanding Pensions*, Oxford: Routledge.
- Svensson, L. (1994). *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994*, Cambridge: National Bureau of Economic Research.
- Tonks, I. (2006). Pension Fund Management and Investment Performance. In: Clark, G., Munnell, A. & Orszag, J. (Eds.) *The Oxford Handbook of Pensions and Retirement Income*, Oxford: Oxford University Press.

## APÊNDICES

### Apêndice A – Obtenção das fórmulas da duração e convexidade

Mantendo a notação do corpo do trabalho, o preço de uma obrigação é obtido fazendo uso da seguinte fórmula:

$$P = \sum_{i=1}^I C_{t_i} \times (1 + y)^{-t_i}$$

E a primeira derivada do preço da obrigação em ordem à *yield* será:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dy} &= \sum_{i=1}^I -t_i \times C_{t_i} \times (1 + y)^{-t_i-1} \\ \Leftrightarrow \frac{dP}{dy} &= (1 + y)^{-1} \times \sum_{i=1}^I -t_i \times C_{t_i} \times (1 + y)^{-t_i} \end{aligned}$$

Dividindo isto pelo negativo do preço da obrigação, é possível obter-se (6):

$$\begin{aligned} Dur &= \frac{\sum_{i=1}^I t_i \times \frac{C_{t_i}}{(1 + y)^{t_i+1}}}{P} \\ \Leftrightarrow Dur &= \frac{\frac{\sum_{i=1}^I t_i \times \frac{C_{t_i}}{(1 + y)^{t_i}}}{P}}{1 + y} \end{aligned}$$

A segunda derivada do preço da obrigação em ordem à *yield* será:

$$\begin{aligned} \frac{d^2P}{dy^2} &= (1 + y)^{-1} \times \left[ \sum_{i=1}^I t_i^2 \times C_{t_i} \times (1 + y)^{-t_i-1} \right] + (1 + y)^{-2} \\ &\quad \times \left[ \sum_{i=1}^I t_i \times C_{t_i} \times (1 + y)^{-t_i} \right] \\ \Leftrightarrow \frac{d^2P}{dy^2} &= (1 + y)^{-2} \times \left[ \sum_{i=1}^I (t_i^2 + t_i) \times C_{t_i} \times (1 + y)^{-t_i} \right] \end{aligned}$$

Dividindo a segunda derivada do preço da obrigação em ordem à *yield* pelo preço da obrigação, é possível obter-se a fórmula apresentada em (8):

$$\begin{aligned} Con &= \frac{\sum_{i=1}^I (t_i^2 + t_i) \times \frac{C_{t_i}}{(1 + y)^{t_i+2}}}{P} \\ \Leftrightarrow Con &= \frac{\frac{\sum_{i=1}^I (t_i^2 + t_i) \times \frac{C_{t_i}}{(1 + y)^{t_i}}}{P}}{(1 + y)^2} \end{aligned}$$

*Apêndice B – Modelo de Nelson e Siegel*

Considerem-se duas estratégias de investimento. A primeira pressupõe o investimento de 1 unidade monetária num momento futuro  $t_1$ , obtendo o investidor no momento  $t_2$  o seguinte montante:

$$1 \times e^{f_{t_1,t_2} \times (t_2 - t_1)}$$

A variável  $f_{t_1,t_2}$  é conhecida no preciso momento - é a taxa de juro *forward* entre os momentos  $t_1$  e  $t_2$ . A segunda estratégia de investimento consiste em fazer *short sell* de uma obrigação de cupão-zero, com valor nominal de 1 unidade monetária e com maturidade no momento  $t_1$ , e investir o valor dessa venda até ao momento  $t_2$ :

$$\frac{1}{e^{y_{t_1} \times t_1}} \times e^{y_{t_2} \times t_2}$$

Ambas as estratégias requerem apenas o investimento de 1 unidade monetária no momento  $t_1$ , produzindo as duas o mesmo “lucro” para o investidor. Então:

$$e^{f_{t_1,t_2} \times (t_2 - t_1)} = \frac{e^{y_{t_2} \times t_2}}{e^{y_{t_1} \times t_1}}$$

Calculando os *logs* dos dois lados da equação obtém-se:

$$f_{t_1,t_2} = \frac{y_{t_2} \times t_2 - y_{t_1} \times t_1}{t_2 - t_1}$$

A mesma expressão pode ser também apresentada da seguinte forma:

$$f_{t_1,t_2} = y_{t_2} + \frac{y_{t_2} - y_{t_1}}{t_2 - t_1} \times t_1$$

E a taxa de juro *forward* instantânea no momento  $t$ , ou  $\lim_{dt \rightarrow 0} f_{t,t+dt}$ , será:

$$f_t = y_t + \frac{\partial y}{\partial t} \times t$$

Esta é uma equação diferencial de primeira ordem que, uma vez resolvida, transforma-se na seguinte expressão:

$$t \times y_t = \int_0^t f_s ds$$



Daqui se conclui que a *yield* de uma obrigação de cupão-zero que matura em  $t$  é uma média das taxas de juro *forward* instantâneas desde o momento 0 até ao momento  $t$ . Nelson & Siegel (1987) sugere a seguinte parametrização para a curva das taxas de juro *forward* instantâneas:

$$f_t = \alpha_1 + \alpha_2 \times e^{-\frac{t}{\beta}} + \alpha_3 \times \frac{t}{\beta} \times e^{-\frac{t}{\beta}}$$

Substituindo esta parametrização na penúltima equação:

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{1}{t} \times \int_0^t \alpha_1 + \alpha_2 \times e^{-\frac{s}{\beta}} + \alpha_3 \times \frac{s}{\beta} \times e^{-\frac{s}{\beta}} ds \\ \Leftrightarrow y_t &= \frac{1}{t} \times \left[ \alpha_1 \times s - \alpha_2 \times \beta \times e^{-\frac{s}{\beta}} - \alpha_3 \times s \times e^{-\frac{s}{\beta}} - \alpha_3 \times \beta \times e^{-\frac{s}{\beta}} \right]_0^t \\ \Leftrightarrow y_t &= \frac{1}{t} \times (\alpha_1 \times t - \alpha_2 \times \beta \times e^{-\frac{t}{\beta}} + \alpha_2 \times \beta - \alpha_3 \times t \times e^{-\frac{t}{\beta}} - \alpha_3 \times \beta \times e^{-\frac{t}{\beta}} + \alpha_3 \\ &\quad \times \beta) \\ \Leftrightarrow y_t &= \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) \times \frac{\beta}{t} \times \left( 1 - e^{-\frac{t}{\beta}} \right) - \alpha_3 \times e^{-\frac{t}{\beta}} \end{aligned}$$

Foram extraídas anualmente durante um período de 20 anos *yield curves* reais associadas a obrigações soberanas emitidas por diversos países. Com base nesses dados empíricos, estimaram-se os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\beta$  através da resolução em cada período do seguinte problema de otimização, representando  $t_i$  (com  $i = 1, 2, \dots, 30$ ) as maturidades para as quais se pretendem estimar as *yields* das obrigações de cupão-zero:

$$\min_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta} \sum_{i=1}^{30} \left[ y_{t_i}^R - \alpha_1 - (\alpha_2 + \alpha_3) \times \frac{\beta}{t_i} \times \left( 1 - e^{-\frac{t_i}{\beta}} \right) + \alpha_3 \times e^{-\frac{t_i}{\beta}} \right]^2$$

Encontrando-se esta função objetivo sujeita às seguintes restrições:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\geq 0 \\ \alpha_2 &\leq 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &\geq 0 \\ -10 &\leq \alpha_3 \leq 10 \\ 1 &\leq \beta \leq 30 \end{aligned}$$

A estimação dos parâmetros para cada país e período foi feita através da ferramenta *Solver*, incluída no *Microsoft Excel 2016*.

Apêndice C – Média das medidas de duração de ativos e responsabilidades

Tabela C.I – Média da duração dos ativos e das responsabilidades

Time Step	Duração das Obrigações									Duração das Responsabilidades
	1	2	3	5	7	10	15	20	30	
1	0.94	1.83	2.68	4.23	5.62	7.40	9.75	11.51	13.90	15.34
2	0.95	1.84	2.67	4.29	5.57	7.35	9.72	11.50	14.01	15.13
3	0.97	1.87	2.73	4.38	5.72	7.60	10.16	12.15	14.90	15.72
4	0.97	1.87	2.72	4.38	5.68	7.51	9.98	11.93	14.90	15.27
5	0.97	1.89	2.76	4.45	5.82	7.74	10.39	12.46	15.55	15.62
6	0.96	1.86	2.73	4.42	5.78	7.70	10.32	12.37	15.32	14.82
7	0.95	1.86	2.72	4.41	5.76	7.68	10.29	12.35	15.31	14.38
8	0.95	1.85	2.70	4.39	5.72	7.60	10.12	12.04	14.69	13.45
9	0.98	1.90	2.77	4.46	5.83	7.74	10.31	12.29	15.12	13.48
10	0.97	1.90	2.77	4.47	5.86	7.79	10.40	12.43	15.36	13.44
11	0.97	1.88	2.74	4.42	5.79	7.69	10.27	12.26	15.11	12.83
12	0.97	1.90	2.77	4.46	5.86	7.81	10.47	12.59	15.71	13.14
13	0.98	1.91	2.80	4.50	5.92	7.90	10.66	12.88	16.27	13.15
14	0.98	1.92	2.81	4.52	5.97	7.99	10.80	13.06	16.41	13.00
15	0.98	1.91	2.79	4.50	5.96	7.99	10.86	13.23	16.91	13.14
16	0.99	1.93	2.82	4.53	6.04	8.14	11.15	13.70	17.90	13.66
17	0.99	1.93	2.82	4.53	6.02	8.09	11.05	13.54	17.55	12.94
18	0.98	1.92	2.81	4.51	5.99	8.05	10.98	13.44	17.44	12.65
19	0.98	1.92	2.82	4.53	6.06	8.17	11.25	13.90	18.36	12.98
20	0.99	1.94	2.85	4.56	6.11	8.26	11.42	14.19	18.97	13.05

Tabela C.II – Média da convexidade dos ativos e das responsabilidades

Time Step	Convexidade das Obrigações									Convexidade das Responsabilidades
	1	2	3	5	7	10	15	20	30	
1	1.79	5.16	9.94	23.09	40.07	70.56	128.65	189.40	305.42	372.47
2	1.81	5.18	9.95	23.73	39.99	70.56	129.14	190.92	311.59	366.63
3	1.87	5.38	10.35	24.60	41.81	74.30	137.92	206.38	340.03	386.90
4	1.87	5.35	10.27	24.38	41.07	72.51	133.78	200.43	338.62	365.85
5	1.88	5.44	10.49	25.02	42.62	75.90	141.68	213.51	362.37	382.81
6	1.83	5.29	10.23	24.64	41.91	74.76	139.38	209.68	351.04	344.97
7	1.82	5.27	10.19	24.56	41.71	74.39	138.77	208.98	350.30	326.97
8	1.80	5.21	10.08	24.30	41.19	73.23	135.38	201.59	329.86	291.88
9	1.92	5.50	10.57	25.10	42.57	75.40	139.25	207.76	344.54	293.99
10	1.90	5.50	10.59	25.20	42.91	76.19	141.27	211.59	353.79	292.45
11	1.87	5.39	10.37	24.75	42.08	74.76	138.58	207.40	344.93	269.95
12	1.90	5.49	10.59	25.18	43.09	76.75	143.30	216.51	367.22	282.00
13	1.93	5.57	10.75	25.53	43.73	78.07	146.57	222.95	384.14	279.19
14	1.94	5.61	10.85	25.78	44.41	79.49	149.66	227.73	389.53	272.80
15	1.92	5.56	10.76	25.60	44.31	79.65	151.24	232.54	408.49	278.33
16	1.94	5.65	10.96	26.00	45.35	81.98	157.45	245.47	445.14	298.33
17	1.95	5.65	10.95	25.97	45.09	81.24	155.21	240.62	431.03	269.88
18	1.93	5.61	10.85	25.78	44.73	80.59	153.93	238.67	428.86	258.87
19	1.94	5.65	10.96	26.04	45.57	82.65	159.74	250.86	461.96	269.60
20	1.98	5.74	11.13	26.33	46.24	84.05	163.35	258.38	483.80	270.89

Tabela C.III – Média da medida D1 dos ativos e das responsabilidades

<i>Time Step</i>	Medida D1 das Obrigações									Medida D1 das Responsabilidades
	1	2	3	5	7	10	15	20	30	
1	1.00	1.95	2.85	4.50	5.96	7.84	10.26	12.04	14.44	15.96
2	1.00	1.95	2.82	4.43	5.88	7.75	10.18	11.99	14.48	15.65
3	1.00	1.95	2.84	4.46	5.94	7.90	10.52	12.52	15.25	16.07
4	1.00	1.95	2.85	4.48	5.94	7.84	10.38	12.35	15.29	15.66
5	1.00	1.95	2.86	4.53	6.04	8.02	10.72	12.82	15.97	16.02
6	1.00	1.95	2.86	4.54	6.06	8.07	10.78	12.89	15.88	15.34
7	1.00	1.95	2.86	4.54	6.06	8.06	10.78	12.89	15.92	14.93
8	1.00	1.95	2.86	4.53	6.04	8.01	10.63	12.60	15.28	13.99
9	1.00	1.95	2.86	4.55	6.06	8.05	10.68	12.67	15.49	13.81
10	1.00	1.95	2.86	4.55	6.08	8.08	10.76	12.80	15.71	13.75
11	1.00	1.95	2.86	4.54	6.05	8.03	10.68	12.70	15.52	13.17
12	1.00	1.95	2.86	4.55	6.07	8.07	10.79	12.91	15.99	13.39
13	1.00	1.95	2.86	4.56	6.10	8.15	10.96	13.20	16.56	13.38
14	1.00	1.95	2.86	4.57	6.12	8.20	11.06	13.32	16.64	13.22
15	1.00	1.95	2.86	4.56	6.12	8.21	11.14	13.52	17.18	13.36
16	1.00	1.95	2.87	4.58	6.15	8.28	11.33	13.89	18.05	13.81
17	1.00	1.95	2.87	4.58	6.14	8.26	11.26	13.75	17.74	13.11
18	1.00	1.95	2.86	4.57	6.13	8.23	11.21	13.67	17.66	12.83
19	1.00	1.95	2.87	4.58	6.16	8.31	11.42	14.08	18.52	13.12
20	1.00	1.95	2.87	4.59	6.17	8.35	11.53	14.29	19.05	13.13

Tabela C.IV – Média da medida D2 dos ativos e das responsabilidades

<i>Time Step</i>	Medida D2 das Obrigações									Medida D2 das Responsabilidades
	1	2	3	5	7	10	15	20	30	
1	1.00	3.85	8.35	21.54	39.18	71.34	132.81	196.80	318.71	390.47
2	1.00	3.84	8.24	21.13	38.54	70.49	131.99	196.55	321.97	379.82
3	1.00	3.85	8.31	21.32	39.09	72.27	137.80	208.11	344.35	391.19
4	1.00	3.85	8.36	21.45	38.97	71.47	135.23	204.44	347.78	375.86
5	1.00	3.86	8.39	21.77	39.82	73.52	140.87	214.58	367.72	387.41
6	1.00	3.86	8.39	21.81	40.04	74.07	141.76	215.49	362.99	355.32
7	1.00	3.86	8.39	21.80	40.00	73.98	141.68	215.73	364.49	338.92
8	1.00	3.86	8.38	21.75	39.83	73.35	139.06	209.02	343.48	302.10
9	1.00	3.86	8.40	21.85	40.05	73.78	139.81	210.32	350.17	296.76
10	1.00	3.86	8.40	21.88	40.17	74.21	141.18	213.16	357.44	293.22
11	1.00	3.86	8.39	21.79	39.93	73.63	139.96	211.21	351.94	272.59
12	1.00	3.86	8.40	21.86	40.13	74.17	141.95	216.25	367.62	279.64
13	1.00	3.86	8.41	21.94	40.40	75.05	144.81	222.53	385.65	277.02
14	1.00	3.86	8.41	21.99	40.58	75.67	146.60	225.31	386.94	268.65
15	1.00	3.86	8.41	21.96	40.57	75.87	148.20	230.29	406.49	273.82
16	1.00	3.86	8.42	22.05	40.84	76.77	151.66	239.08	436.60	289.86
17	1.00	3.86	8.42	22.03	40.77	76.46	150.34	235.72	425.29	263.24
18	1.00	3.86	8.41	22.00	40.66	76.14	149.42	234.11	423.61	252.89
19	1.00	3.86	8.42	22.06	40.91	77.11	153.34	243.68	452.65	261.29
20	1.00	3.86	8.43	22.10	41.05	77.60	155.27	248.75	470.80	260.51

Tabela C.V – Média da medida *D3* dos ativos e das responsabilidades

<i>Time Step</i>	Medida <i>D3</i> das Obrigações									Medida <i>D3</i> das Responsabilidades
	1	2	3	5	7	10	15	20	30	
1	1.00	7.65	24.76	105.44	265.86	681.12	1,851.69	3,558.58	8,180.13	11,927.77
2	1.00	7.63	24.39	103.34	261.49	673.24	1,842.29	3,560.29	8,295.65	11,517.39
3	1.00	7.65	24.62	104.31	265.57	691.88	1,931.29	3,790.05	8,916.13	11,827.86
4	1.00	7.66	24.80	104.92	264.44	683.02	1,890.95	3,718.48	9,059.09	11,236.98
5	1.00	7.67	24.90	106.66	270.61	704.09	1,976.74	3,919.04	9,619.27	11,633.40
6	1.00	7.67	24.89	106.88	272.20	709.49	1,988.51	3,932.40	9,452.53	10,257.96
7	1.00	7.67	24.88	106.82	271.90	708.47	1,987.42	3,937.75	9,499.13	9,608.94
8	1.00	7.66	24.86	106.54	270.60	701.88	1,946.67	3,800.54	8,873.87	8,240.05
9	1.00	7.67	24.92	107.06	272.22	706.18	1,957.01	3,824.61	9,077.94	8,068.49
10	1.00	7.67	24.94	107.24	273.17	710.66	1,978.40	3,882.43	9,293.25	7,910.39
11	1.00	7.67	24.89	106.76	271.37	704.77	1,960.57	3,845.68	9,134.12	7,160.41
12	1.00	7.67	24.93	107.15	272.84	710.60	1,992.25	3,950.72	9,606.89	7,380.97
13	1.00	7.67	24.96	107.57	274.83	719.63	2,035.48	4,075.43	10,131.63	7,215.40
14	1.00	7.68	24.98	107.84	276.25	726.24	2,062.97	4,129.84	10,150.47	6,864.21
15	1.00	7.67	24.95	107.71	276.20	728.62	2,089.34	4,236.11	10,755.80	7,018.92
16	1.00	7.68	24.99	108.16	278.20	738.14	2,143.94	4,419.31	11,678.73	7,537.17
17	1.00	7.68	24.99	108.08	277.66	734.75	2,122.59	4,348.15	11,326.97	6,586.79
18	1.00	7.68	24.97	107.89	276.84	731.43	2,108.92	4,318.05	11,292.90	6,219.25
19	1.00	7.68	24.99	108.23	278.74	741.86	2,170.77	4,515.86	12,167.71	6,430.02
20	1.00	7.68	25.01	108.47	279.82	747.00	2,201.19	4,621.34	12,723.13	6,355.62

Tabela C.VI – Média das medidas *KRD* das responsabilidades

<i>Time Step</i>	Medida <i>KRD</i>							
	1	3	5	7	10	17	25	29
1	0.05	0.12	0.18	0.28	0.34	0.53	0.45	0.40
2	0.07	0.11	0.18	0.24	0.39	0.44	0.44	0.40
3	0.05	0.10	0.20	0.27	0.33	0.46	0.46	0.41
4	0.05	0.12	0.18	0.25	0.39	0.53	0.46	0.41
5	0.04	0.13	0.21	0.29	0.36	0.49	0.46	0.41
6	0.04	0.11	0.20	0.26	0.35	0.50	0.44	0.39
7	0.05	0.14	0.23	0.31	0.39	0.49	0.43	0.38
8	0.05	0.14	0.21	0.30	0.44	0.50	0.40	0.34
9	0.05	0.16	0.26	0.29	0.37	0.45	0.39	0.33
10	0.05	0.14	0.24	0.32	0.38	0.45	0.39	0.33
11	0.06	0.17	0.23	0.36	0.45	0.44	0.37	0.31
12	0.05	0.15	0.25	0.29	0.41	0.46	0.38	0.33
13	0.06	0.14	0.27	0.30	0.41	0.45	0.39	0.33
14	0.05	0.15	0.23	0.36	0.41	0.46	0.39	0.32
15	0.05	0.17	0.23	0.32	0.42	0.46	0.40	0.34
16	0.05	0.13	0.26	0.31	0.38	0.47	0.43	0.37
17	0.06	0.14	0.25	0.32	0.39	0.47	0.41	0.33
18	0.05	0.18	0.26	0.34	0.39	0.46	0.40	0.32
19	0.05	0.15	0.24	0.31	0.40	0.48	0.42	0.34
20	0.06	0.15	0.25	0.31	0.39	0.49	0.43	0.34

Tabela C.VII – Média das medidas *KRD* dos ativos

<i>Time Step</i>	<b>Medida KRD</b>							
	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>10</b>	<b>17</b>	<b>25</b>	<b>29</b>
<b>1</b>	0.07	0.14	0.20	0.25	0.76	0.29	0.27	0.26
<b>2</b>	0.08	0.13	0.19	0.23	0.70	0.28	0.28	0.27
<b>3</b>	0.07	0.13	0.19	0.24	0.61	0.33	0.32	0.30
<b>4</b>	0.06	0.14	0.20	0.25	0.72	0.31	0.31	0.30
<b>5</b>	0.06	0.13	0.19	0.24	0.71	0.32	0.33	0.33
<b>6</b>	0.05	0.13	0.20	0.25	0.61	0.33	0.33	0.32
<b>7</b>	0.05	0.13	0.20	0.25	0.75	0.33	0.33	0.32
<b>8</b>	0.06	0.14	0.21	0.26	0.72	0.32	0.31	0.30
<b>9</b>	0.06	0.13	0.20	0.26	0.71	0.31	0.30	0.29
<b>10</b>	0.06	0.13	0.20	0.25	0.69	0.31	0.30	0.30
<b>11</b>	0.06	0.14	0.21	0.26	0.86	0.29	0.27	0.26
<b>12</b>	0.05	0.13	0.20	0.26	0.77	0.30	0.29	0.28
<b>13</b>	0.05	0.12	0.19	0.25	0.80	0.30	0.30	0.30
<b>14</b>	0.05	0.12	0.19	0.25	0.83	0.30	0.30	0.29
<b>15</b>	0.05	0.11	0.18	0.24	0.84	0.30	0.31	0.31
<b>16</b>	0.05	0.10	0.17	0.22	0.86	0.29	0.32	0.34
<b>17</b>	0.05	0.11	0.17	0.23	0.85	0.30	0.32	0.33
<b>18</b>	0.05	0.11	0.17	0.23	0.88	0.29	0.31	0.33
<b>19</b>	0.05	0.10	0.16	0.21	0.88	0.29	0.33	0.35
<b>20</b>	0.05	0.09	0.15	0.20	0.89	0.28	0.34	0.37

Tabela C.VIII – Média das medidas *EKRD*

<i>Time Step</i>	<b>Medida EKRD</b>							
	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>10</b>	<b>17</b>	<b>25</b>	<b>29</b>
<b>1</b>	-0.01	-0.03	-0.02	0.04	-0.42	0.24	0.18	0.14
<b>2</b>	-0.01	-0.02	-0.01	0.01	-0.31	0.15	0.16	0.13
<b>3</b>	-0.01	-0.03	0.00	0.03	-0.29	0.13	0.14	0.10
<b>4</b>	-0.01	-0.02	-0.02	0.01	-0.33	0.22	0.15	0.10
<b>5</b>	-0.02	0.00	0.02	0.05	-0.35	0.17	0.12	0.09
<b>6</b>	-0.01	-0.02	0.00	0.01	-0.26	0.17	0.11	0.07
<b>7</b>	0.00	0.01	0.04	0.06	-0.36	0.16	0.10	0.06
<b>8</b>	-0.01	0.00	0.00	0.04	-0.28	0.17	0.08	0.04
<b>9</b>	-0.01	0.03	0.05	0.04	-0.34	0.14	0.09	0.04
<b>10</b>	-0.01	0.00	0.04	0.07	-0.32	0.14	0.08	0.04
<b>11</b>	0.00	0.03	0.02	0.10	-0.41	0.15	0.11	0.06
<b>12</b>	0.00	0.02	0.05	0.04	-0.36	0.16	0.10	0.05
<b>13</b>	0.01	0.02	0.08	0.05	-0.38	0.15	0.09	0.03
<b>14</b>	0.00	0.04	0.04	0.12	-0.42	0.16	0.09	0.03
<b>15</b>	0.00	0.05	0.05	0.09	-0.42	0.16	0.09	0.02
<b>16</b>	0.00	0.03	0.09	0.09	-0.47	0.18	0.11	0.03
<b>17</b>	0.01	0.04	0.08	0.10	-0.46	0.17	0.09	0.00
<b>18</b>	0.00	0.07	0.09	0.12	-0.49	0.18	0.08	-0.01
<b>19</b>	0.00	0.06	0.09	0.10	-0.47	0.19	0.09	-0.02
<b>20</b>	0.00	0.06	0.10	0.10	-0.50	0.20	0.09	-0.03

Apêndice D – Correlação entre as variações anuais nas yields

Tabela D.I – Matriz das correlações entre as variações anuais nas yields

1	1	0.9814	0.9566	0.9316	0.9055	0.8786	0.8519	0.8263	0.8022	0.7797	0.7591	0.7403	0.7233	0.7081	0.6945	0.6826	0.6721	0.6630	0.6552	0.6486	0.6430	0.6383	0.6344	0.6312	0.6285	0.6263	0.6243	0.6226	0.6209	0.6192
2	0.9814	1	0.9933	0.9780	0.9573	0.9336	0.9088	0.8841	0.8605	0.8381	0.8174	0.7983	0.7809	0.7653	0.7513	0.7390	0.7283	0.7190	0.7112	0.7045	0.6991	0.6946	0.6910	0.6882	0.6860	0.6842	0.6828	0.6816	0.6806	0.6795
3	0.9566	0.9933	1	0.9951	0.9827	0.9655	0.9459	0.9253	0.9049	0.8851	0.8664	0.8489	0.8329	0.8184	0.8054	0.7939	0.7838	0.7752	0.7680	0.7620	0.7571	0.7532	0.7501	0.7478	0.7461	0.7449	0.7439	0.7432	0.7425	0.7418
4	0.9316	0.9780	0.9951	1	0.9961	0.9861	0.9724	0.9568	0.9404	0.9240	0.9080	0.8929	0.8788	0.8659	0.8542	0.8439	0.8350	0.8273	0.8208	0.8155	0.8113	0.8079	0.8054	0.8036	0.8022	0.8013	0.8006	0.8000	0.7995	0.7988
5	0.9055	0.9573	0.9827	0.9961	1	0.9969	0.9891	0.9785	0.9662	0.9533	0.9403	0.9276	0.9156	0.9045	0.8944	0.8854	0.8776	0.8709	0.8652	0.8606	0.8570	0.8541	0.8520	0.8505	0.8493	0.8485	0.8479	0.8473	0.8466	0.8457
6	0.8786	0.9336	0.9655	0.9861	0.9969	1	0.9976	0.9916	0.9833	0.9737	0.9636	0.9534	0.9435	0.9342	0.9256	0.9179	0.9112	0.9054	0.9005	0.8965	0.8934	0.8909	0.8891	0.8877	0.8866	0.8858	0.8850	0.8842	0.8832	0.8820
7	0.8519	0.9088	0.9459	0.9724	0.9891	0.9976	1	0.9982	0.9935	0.9871	0.9796	0.9717	0.9638	0.9562	0.9490	0.9426	0.9368	0.9319	0.9277	0.9242	0.9215	0.9193	0.9176	0.9163	0.9152	0.9142	0.9132	0.9121	0.9107	0.9090
8	0.8263	0.8841	0.9253	0.9568	0.9785	0.9916	0.9982	1	0.9986	0.9950	0.9899	0.9842	0.9781	0.9720	0.9662	0.9608	0.9560	0.9518	0.9482	0.9453	0.9428	0.9409	0.9393	0.9379	0.9367	0.9355	0.9342	0.9327	0.9309	0.9286
9	0.8022	0.8605	0.9049	0.9404	0.9662	0.9833	0.9935	0.9986	1	0.9989	0.9961	0.9922	0.9878	0.9831	0.9785	0.9741	0.9702	0.9666	0.9636	0.9610	0.9588	0.9570	0.9555	0.9541	0.9527	0.9513	0.9496	0.9477	0.9454	0.9426
10	0.7797	0.8381	0.8851	0.9240	0.9533	0.9737	0.9871	0.9950	0.9989	1	0.9991	0.9970	0.9940	0.9906	0.9871	0.9836	0.9804	0.9775	0.9749	0.9727	0.9707	0.9690	0.9675	0.9660	0.9645	0.9628	0.9608	0.9585	0.9557	0.9523
11	0.7591	0.8174	0.8664	0.9080	0.9403	0.9636	0.9796	0.9899	0.9961	0.9991	1	0.9993	0.9977	0.9954	0.9928	0.9902	0.9877	0.9853	0.9830	0.9812	0.9794	0.9778	0.9763	0.9747	0.9730	0.9711	0.9688	0.9661	0.9629	0.9591
12	0.7403	0.7983	0.8489	0.8929	0.9276	0.9534	0.9717	0.9842	0.9922	0.9970	0.9993	1	0.9995	0.9982	0.9965	0.9946	0.9927	0.9908	0.9888	0.9873	0.9857	0.9842	0.9827	0.9811	0.9792	0.9771	0.9745	0.9715	0.9679	0.9637
13	0.7233	0.7809	0.8329	0.8788	0.9156	0.9435	0.9638	0.9781	0.9878	0.9940	0.9977	0.9995	1	0.9996	0.9987	0.9974	0.9960	0.9945	0.9930	0.9916	0.9902	0.9888	0.9873	0.9856	0.9837	0.9814	0.9786	0.9753	0.9714	0.9668
14	0.7081	0.7653	0.8184	0.8659	0.9045	0.9342	0.9562	0.9720	0.9831	0.9906	0.9954	0.9982	0.9996	1	0.9997	0.9990	0.9980	0.9970	0.9958	0.9947	0.9934	0.9921	0.9906	0.9889	0.9869	0.9845	0.9816	0.9781	0.9739	0.9691
15	0.6945	0.7513	0.8054	0.8542	0.8944	0.9256	0.9490	0.9662	0.9785	0.9871	0.9928	0.9965	0.9987	0.9997	1	0.9998	0.9993	0.9985	0.9977	0.9967	0.9957	0.9944	0.9930	0.9914	0.9893	0.9868	0.9838	0.9802	0.9758	0.9708
16	0.6826	0.7390	0.7939	0.8439	0.8854	0.9179	0.9426	0.9608	0.9741	0.9836	0.9902	0.9946	0.9974	0.9990	0.9998	1	0.9998	0.9994	0.9988	0.9981	0.9972	0.9961	0.9948	0.9932	0.9912	0.9887	0.9856	0.9819	0.9775	0.9723
17	0.6721	0.7283	0.7838	0.8350	0.8776	0.9112	0.9368	0.9560	0.9702	0.9804	0.9877	0.9927	0.9960	0.9980	0.9993	0.9998	1	0.9999	0.9995	0.9990	0.9983	0.9974	0.9962	0.9947	0.9927	0.9903	0.9872	0.9835	0.9791	0.9739
18	0.6630	0.7190	0.7752	0.8273	0.8709	0.9054	0.9319	0.9518	0.9666	0.9775	0.9853	0.9908	0.9945	0.9970	0.9985	0.9994	0.9999	1	0.9999	0.9996	0.9991	0.9983	0.9973	0.9959	0.9940	0.9917	0.9887	0.9851	0.9807	0.9756
19	0.6552	0.7112	0.7680	0.8208	0.8652	0.9005	0.9277	0.9482	0.9636	0.9749	0.9831	0.9890	0.9930	0.9958	0.9977	0.9988	0.9995	0.9999	1	0.9999	0.9996	0.9990	0.9982	0.9969	0.9953	0.9931	0.9903	0.9868	0.9825	0.9775
20	0.6486	0.7045	0.7620	0.8155	0.8606	0.8965	0.9242	0.9453	0.9610	0.9727	0.9812	0.9873	0.9916	0.9947	0.9967	0.9981	0.9990	0.9996	0.9999	1	0.9999	0.9995	0.9989	0.9979	0.9964	0.9944	0.9918	0.9885	0.9845	0.9797
21	0.6430	0.6991	0.7571	0.8113	0.8570	0.8934	0.9215	0.9428	0.9588	0.9707	0.9794	0.9857	0.9902	0.9934	0.9957	0.9972	0.9983	0.9991	0.9996	0.9999	1	0.9999	0.9995	0.9987	0.9975	0.9958	0.9934	0.9904	0.9866	0.9821
22	0.6383	0.6946	0.7532	0.8079	0.8541	0.8909	0.9193	0.9409	0.9570	0.9690	0.9778	0.9842	0.9888	0.9921	0.9944	0.9961	0.9974	0.9983	0.9990	0.9995	0.9999	1	0.9999	0.9994	0.9985	0.9970	0.9950	0.9923	0.9889	0.9846
23	0.6344	0.6910	0.7501	0.8054	0.8520	0.8891	0.9176	0.9393	0.9555	0.9675	0.9763	0.9827	0.9873	0.9906	0.9930	0.9948	0.9962	0.9973	0.9982	0.9989	0.9995	0.9999	1	0.9998	0.9993	0.9982	0.9965	0.9942	0.9912	0.9873
24	0.6312	0.6882	0.7478	0.8036	0.8505	0.8877	0.9163	0.9379	0.9541	0.9660	0.9747	0.9811	0.9856	0.9889	0.9914	0.9932	0.9947	0.9959	0.9969	0.9979	0.9987	0.9994	0.9998	1	0.9998	0.9992	0.9975	0.9960	0.9934	0.9900
25	0.6285	0.6860	0.7461	0.8022	0.8493	0.8866	0.9152	0.9367	0.9527	0.9645	0.9730	0.9792	0.9837	0.9869	0.9893	0.9912	0.9927	0.9940	0.9953	0.9964	0.9975	0.9985	0.9993	0.9998	1	0.9998	0.9990	0.9976	0.9955	0.9926
26	0.6263	0.6842	0.7449	0.8013	0.8485	0.8858	0.9142	0.9355	0.9513	0.9628	0.9711	0.9771	0.9814	0.9845	0.9868	0.9887	0.9903	0.9917	0.9931	0.9944	0.9958	0.9970	0.9982	0.9991	0.9998	1	0.9997	0.9989	0.9973	0.9950
27	0.6243	0.6828	0.7439	0.8006	0.8479	0.8850	0.9132	0.9342	0.9496	0.9608	0.9688	0.9745	0.9786	0.9816	0.9838	0.9856	0.9872	0.9887	0.9903	0.9918	0.9934	0.9950	0.9965	0.9979	0.9990	0.9997	1	0.9997	0.9987	0.9971
28	0.6226	0.6816	0.7432	0.8000	0.8473	0.8842	0.9121	0.9327	0.9477	0.9585	0.9661	0.9715	0.9753	0.9781	0.9802	0.9819	0.9835	0.9851	0.9868	0.9885	0.9904	0.9923	0.9942	0.9960	0.9976	0.9989	0.9997	1	0.9997	0.9986
29	0.6209	0.6806	0.7425	0.7995	0.8466	0.8832	0.9107	0.9309	0.9454	0.9557	0.9629	0.9679	0.9714	0.9739	0.9758	0.9775	0.9791	0.9807	0.9825	0.9845	0.9866	0.9889	0.9912	0.9934	0.9955	0.9973	0.9987	0.9997	1	0.9996
30	0.6192	0.6795	0.7418	0.7988	0.8457	0.8820	0.9090	0.9286	0.9426	0.9523	0.9591	0.9637	0.9668	0.9691	0.9708	0.9723	0.9739	0.9756	0.9775	0.9797	0.9821	0.9846	0.9873	0.9900	0.9926	0.9950	0.9971	0.9986	0.9996	1

*Apêndice E – Covariância entre as variações anuais nas key-rates*

Tabela E.I – Matriz das covariâncias entre as variações anuais nas *key-rates*

	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>7</b>	<b>10</b>	<b>17</b>	<b>25</b>	<b>29</b>
<b>1</b>	0.000133	0.000126	0.000114	0.000103	0.000089	0.000068	0.000056	0.000054
<b>3</b>	0.000126	0.000131	0.000123	0.000113	0.000100	0.000078	0.000066	0.000063
<b>5</b>	0.000114	0.000123	0.000119	0.000113	0.000102	0.000083	0.000072	0.000069
<b>7</b>	0.000103	0.000113	0.000113	0.000109	0.000101	0.000085	0.000074	0.000071
<b>10</b>	0.000089	0.000100	0.000102	0.000101	0.000097	0.000084	0.000073	0.000070
<b>17</b>	0.000068	0.000078	0.000083	0.000085	0.000084	0.000076	0.000067	0.000064
<b>25</b>	0.000056	0.000066	0.000072	0.000074	0.000073	0.000067	0.000060	0.000058
<b>29</b>	0.000054	0.000063	0.000069	0.000071	0.000070	0.000064	0.000058	0.000056

*Apêndice F – Vetores próprios, valores próprios e matriz  $U^*$*

Table F.I – Matriz dos vetores próprios da matriz das covariâncias

0.387789	0.595538	0.682203	0.165588	0.008532	0.039771	-0.019525	0.009919
0.414753	0.362094	-0.373112	-0.621755	-0.114019	-0.339033	0.175392	-0.111217
0.408680	0.112326	-0.408769	0.132183	-0.106848	0.496693	-0.430646	0.438432
0.392216	-0.069386	-0.270707	0.473109	0.057546	0.166781	0.251539	-0.670700
0.362819	-0.236938	-0.055997	0.340875	0.360791	-0.541008	0.210491	0.475105
0.303510	-0.380516	0.231144	-0.377369	0.537376	0.067131	-0.458821	-0.251910
0.263335	-0.391524	0.251045	-0.283071	-0.177277	0.446002	0.598512	0.213657
0.252278	-0.377581	0.188218	0.077225	-0.722377	-0.335919	-0.327245	-0.103145

Table F.II – Matriz dos valores próprios da matriz das covariâncias

0.000702	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000071	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000006	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Table F.III – Matriz  $U^*$  da matriz das covariâncias

0.010271	0.005006	0.001703
0.010985	0.003044	-0.000932
0.010825	0.000944	-0.001021
0.010389	-0.000583	-0.000676
0.009610	-0.001992	-0.000140
0.008039	-0.003198	0.000577
0.006975	-0.003291	0.000627
0.006682	-0.003174	0.000470



Apêndice G – Resultados da implementação dos modelos

Figura G.1 – Média dos AFPaC em cada um dos modelos

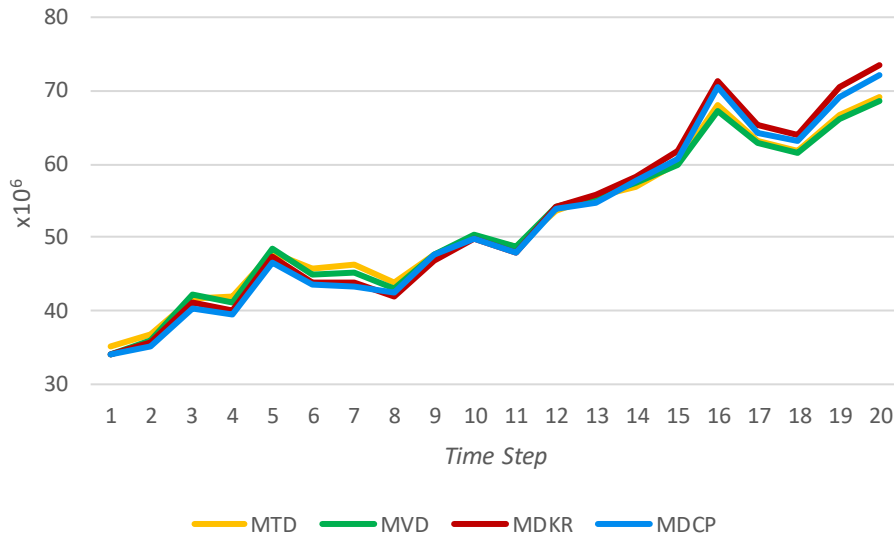


Figura G.2 – Média da volatilidade dos AFPaC em cada um dos modelos

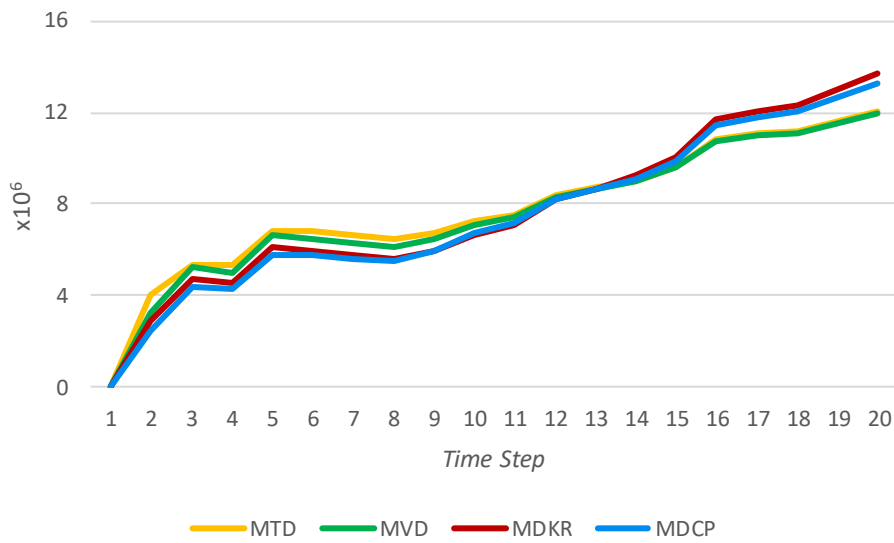


Figura G.3 – Média das contribuições em cada um dos modelos

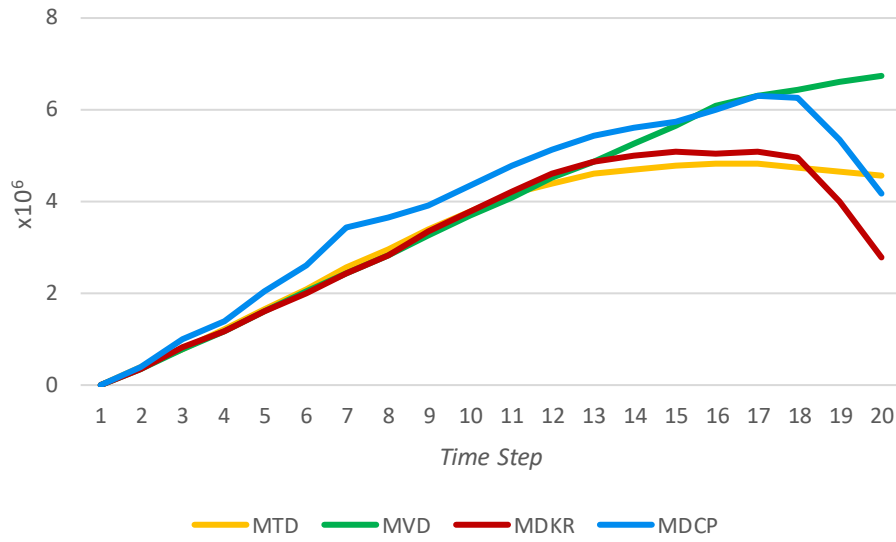


Figura G.4 – Média da volatilidade das contribuições em cada um dos modelos

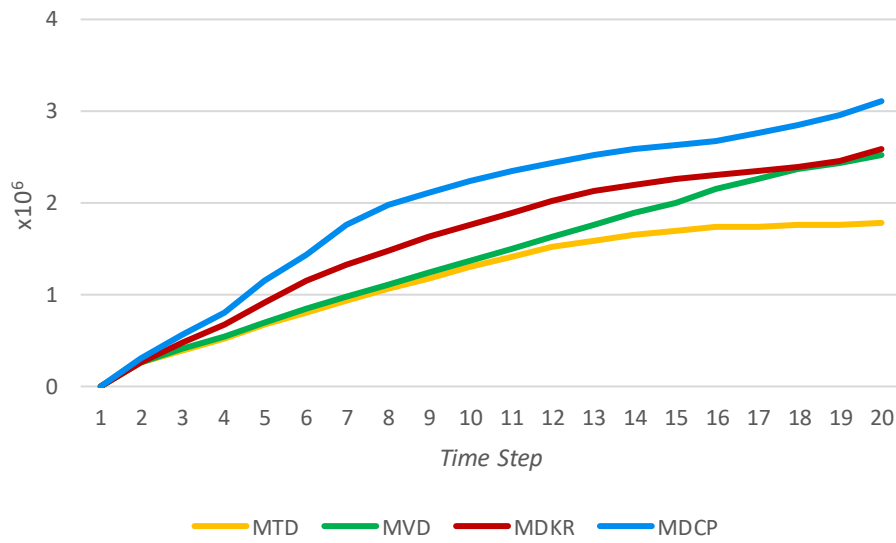


Figura G.5 – Média do FL em cada um dos modelos

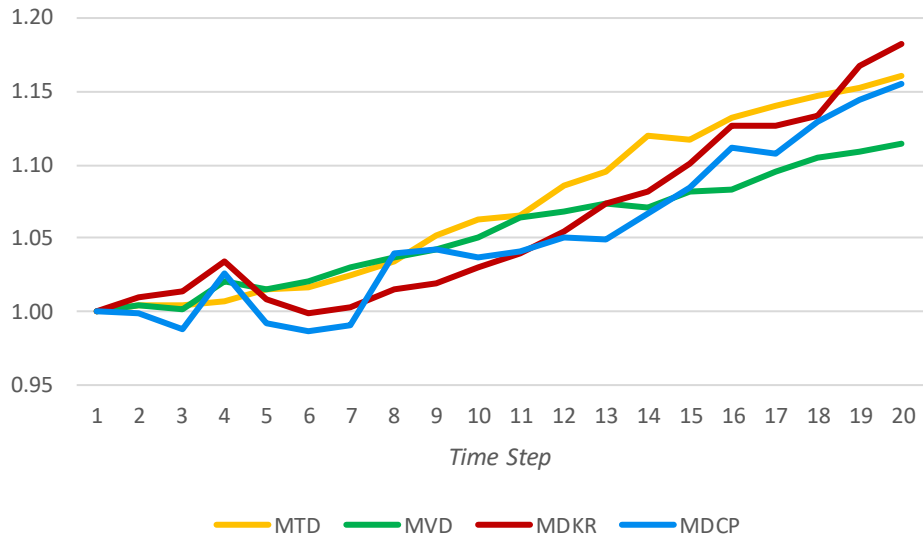


Figura G.6 – Média da volatilidade do FL em cada um dos modelos

