



Instituto Superior de Economia e Gestão

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

DESDE 1911

**MESTRADO**  
**MATEMÁTICA FINANCEIRA**

**TRABALHO FINAL DE MESTRADO**  
**DISSERTAÇÃO**

**PERCOLAÇÃO EM SISTEMAS FINANCEIROS SIMULADOS**

**POR NATÁLIA NAVIN**

**SETEMBRO - 2012**



Instituto Superior de Economia e Gestão

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

DESDE 1911

# **MESTRADO EM MATEMÁTICA FINANCEIRA**

## **TRABALHO FINAL DE MESTRADO DISSERTAÇÃO**

**PERCOLAÇÃO EM SISTEMAS FINANCEIROS SIMULADOS**

**NATÁLIA NAVIN**

### **ORIENTAÇÃO:**

**DR. JOÃO CRUZ**

**PROFESSOR DOUTOR JOÃO GUERRA**

**SETEMBRO - 2012**

# Resumo

Sendo conhecido que as curvas de preços em mercados financeiros apresentam variâncias não finitas e não seguem um movimento Browniano, este facto dificulta a aplicação das ferramentas existentes de matemática financeira. O objectivo deste trabalho é estudar as medidas económicas que melhoram a previsibilidade em modelos descritos por equações diferenciais estocásticas relativamente ao movimento Browniano. Deste modo, pretende-se analisar outras medidas retiradas dos mesmos mecanismos de interacção entre agentes económicos cuja dinâmica apresenta variações com variâncias finitas e, conseqüentemente, a aplicação de equações diferenciais estocásticas com movimento Browniano seja válida.

Sendo a economia feita por trocas entre os agentes económicos, pretende-se olhar para a mesma como sendo um *cluster* das ligações, em que cada nó representa um agente económico e cada ligação entre dois nós representa as trocas entre estes. Pretende-se assim, analisar se estas medidas podem substituir as medidas de preço na modelação de mercados financeiros.

A formação dos *clusters* será analisada à luz da teoria das redes complexas e o estudo das medidas dos mesmos é feito através da teoria da percolação e criticalidade auto-organizada, conceitos estes que serão explicados neste trabalho. Por fim, pretende-se verificar se as medidas dos *clusters* seguem um movimento Browniano, de modo que seja possível avaliar o mercado em função das medidas dos *clusters* em vez das medidas financeiras.

**Palavras Chave:** Redes complexas, percolação, auto-organização crítica, *clusters*, movimento Browniano, passeio aleatório.



# Abstract

It is known that price curves in financial markets have no finite variances and do not follow a Brownian motion and, therefore, this makes it difficult to apply existing tools of financial mathematics. The aim of this work is to study economic measures that improve predictability in models based on stochastic differential equations driven by Brownian motion. Here we intend to study other measures taken from the same mechanisms of interaction between economic agents, whose dynamic shows variations with finite variances and, therefore, the application of stochastic differential equations driven by Brownian motion is valid.

As the economy is based on trade between economic operators, we want to look at the economy as a cluster of links, where each node represents an economic agent and each link between two nodes represents the exchanges made by them. The aim is to examine whether such measures may replace the measures of price modeling in financial markets.

The formation of clusters is explained by the theory of complex networks. The study of measures of clusters is based on percolation theory and self-organized criticality, assuming that the economy has a behavior of self-organized criticality, concepts that will be explained in this dissertation. Finally, we want to verify whether the measures of the clusters follow a Brownian motion to be able to assess the market according to the clusters of measures rather than financial measures.

**Keywords:** Complex Systems, percolation theory, self-organized criticality, clusters, Brownian motion, the random walk.



# Agradecimentos

Primeiro que tudo, gostaria de agradecer à Closer, especialmente ao Dr. João Cruz, pelo seu interesse, orientação e apoio que me deu no decorrer destes últimos meses enquanto estive a escrever e desenvolver o TFM.

Também quero agradecer ao Professor Doutor João Guerra, o meu orientador académico, pela sua disponibilidade e ajuda que foram essenciais para o sucesso do meu trabalho.

Agradeço também aos meus colegas do mestrado por todo o apoio precioso que me deram, não só durante o desenvolvimento do TFM mas também durante a parte curricular do mestrado nas muitas tardes de estudo juntos.

Um grande agradecimento ao Pedro e à Ana, por toda a explicação dos testes econométricos que me deram.

Por fim, mas não menos importante, um especial agradecimento à minha família, especialmente à minha mãe, à minha irmã, e ao Tiago, pela paciência e pelo apoio incondicional que sempre me deram e por nunca deixarem de acreditar em mim, dando-me forças para chegar até ao fim deste Mestrado.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Enquadramento Teórico</b>	<b>3</b>
2.1	Teoria das redes complexas . . . . .	3
2.1.1	O modelo Erdős-Rényi . . . . .	4
2.1.2	O modelo Barabási-Albert . . . . .	6
2.2	Teoria da Percolação . . . . .	7
2.2.1	Percolação - o que é? . . . . .	7
2.2.2	Exemplo - Fogos Florestais . . . . .	8
2.2.3	Quantidades de interesse na teoria da percolação . . . . .	9
2.2.4	Percolação Unidimensional ( $d = 1$ ) . . . . .	12
2.2.5	Percolação em rede Bethe . . . . .	15
2.3	Teoria da Criticalidade . . . . .	18
2.3.1	O que é a Criticalidade? . . . . .	18
2.3.2	Auto - Organização Crítica . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Enquadramento Prático</b>	<b>21</b>
3.1	O Modelo . . . . .	21
3.2	Métodos de Análise . . . . .	22
3.2.1	Movimento Browniano . . . . .	22
3.2.2	Testes realizados . . . . .	23
3.3	Resultados . . . . .	25

<b>4 Conclusões e Perspectivas</b>	<b>29</b>
<b>Bibliography</b>	<b>29</b>
<b>A Anexos</b>	<b>32</b>

# Lista de Figuras

2.1	Percolação numa rede quadrada de tamanho $L=6$ . . . . .	8
2.2	Realizações de percolação bidimensional numa rede quadrada de tamanho $L = 150$ . Probabilidade de ocupação com $p = 0,50$ ; $p = 0,59$ e $p = 0,65$ . . . . .	10
2.3	Probabilidade de Percolação, [9]. . . . .	11
2.4	Exemplo de uma rede unidimensional de tamanho $L = 20$ . Os quadrados escuros representam os pontos ocupados e os quadrados claros representam os pontos vazios. . . . .	12
2.5	Exemplo de uma rede do tipo Bethe. . . . .	15
A.1	As filas de dominós: Exemplo da criticalidade, [9]. . . . .	33
A.2	Gráfico das séries Susceptibilidade dos Agregados e Maior Agregado. . . . .	34
A.3	Gráfico das séries: N° ligações dentro e fora do nó. . . . .	35
A.4	Distribuição: a) das séries observadas; b) do logaritmo das séries. . . . .	36

# Lista de Tabelas

3.1	Resultados dos testes ADF e PP: a) para as séries observadas; b) para o logaritmo das séries. . . . .	26
3.2	Coefficiente da Componente Autoregressiva: a) para as séries observadas; b) para o logaritmo das séries. . . . .	28

# Capítulo 1

## Introdução

A explicação dos fenómenos económicos com base na teoria do movimento Browniano, foi iniciada com Bachelier (1900) [3] no fim do sec. XIX, sem grande impacto sobre o estudo destes fenómenos quando comparado com o que viria a acontecer mais tarde.

Posteriormente, a explicação de Einstein (1905) [13] de que o movimento Browniano correspondia de facto ao fenómeno físico do choque das partículas de um fluido com uma partícula de maior dimensão mergulhada nesse fluido, introduzindo um termo probabilístico no modelo para o deslocamento da partícula de maior dimensão, levou a um interesse crescente e à multiplicação de estudos sobre o movimento Browniano e processos estocásticos semelhantes.

Este desenvolvimento fez-se, quer na Física através da aplicação dos processos estocásticos a inúmeros problemas da fenomenologia, quer na Matemática com o desenvolvimento dos cálculos de Itô e Stratonovich, que contribuíram para o uso do conceito de integral estocástico e equação diferencial estocástica.

Depois do desenvolvimento do cálculo de Itô, a teoria de Bachelier é reformulada por Samuelson [21] e posteriormente por Black, Scholes (1973) [7] e por Merton (1973) [19] e adaptada à valorização de opções europeias.

Recorrendo à física estatística, pretende-se neste trabalho representar uma economia em termos das relações entre os seus agentes, formando assim *clusters* das ligações onde cada nó representa um agente económico e cada ligação entre dois nós representa as trocas por eles feitas.

Não sendo possível prever a evolução das curvas financeiras, uma vez que as variações não são finitas e não seguem um movimento Browniano, é objectivo deste trabalho estudar outras medidas relacionadas, as medidas dos *clusters*, que representam uma economia. Pretende-se verificar se estas medidas seguem um movimento

Browniano de modo que seja possível substituir as medidas de preço na modelação dos mercados financeiros.

A formação dos *clusters* será explicada pela teoria das redes complexas e o estudo das respectivas medidas é feito através da teoria da percolação e da auto-organização crítica.

Este trabalho encontra-se dividido em três partes. Numa primeira parte é feita uma familiarização com a teoria das redes complexas que explica a formação dos *clusters* e as teorias da percolação e criticalidade que explicam as propriedades dos *clusters*. De seguida é apresentado o modelo de uma economia simulada que está na base deste trabalho e os testes que serão aplicados às séries em estudo. Por fim, é feita uma apresentação e discussão dos resultados obtidos.

Sendo bastante difícil obter dados reais sobre a estrutura de rede de uma economia, o estudo tem por base uma economia fictícia para que seja possível posteriormente, tendo em conta os resultados obtidos, motivar a árdua busca de dados reais.

# Capítulo 2

## Enquadramento Teórico

Nesta secção descrevem-se brevemente as teorias que permitem analisar a formação dos *clusters* e as suas propriedades. Inicia-se a secção com a exposição da teoria das redes complexas, seguindo-se com a teoria da percolação e da criticalidade.

### 2.1 Teoria das redes complexas

O estudo da maioria das redes complexas foi iniciado por uma necessidade de compreender vários sistemas reais, tais como as redes de comunicação entre outros casos de maior complexidade. A teoria das redes complexas engloba conceitos de teoria dos grafos, mecânica estatística, sistemas não-lineares e sistemas complexos que são aplicados na modelagem, análise e simulação de sistemas naturais e artificiais. Esta teoria oferece suporte para caracterização, análise e modelagem dos mais variados sistemas complexos.

Os sistemas complexos são formados por muitos elementos capazes de interagir entre si e com o meio ambiente. Este tipo de sistemas tem propriedades como, Holtrup [17], (i) emergência - o aparecimento de uma propriedade ou de uma característica, como enormes eventos catastróficos, não pode ser observado com antecedência como uma característica funcional do sistema; (ii) auto-organização - o sistema organiza-se sem uma norma ou parâmetro externo (e.g. uma lei); (iii) universalidade - os sistemas pertencentes à mesma classe possuem propriedades semelhantes; (iv) complexidade - apenas os sistemas com um grande número de membros que interagem mutuamente são candidatos a sistemas complexos; (v) irreducibilidade - os sistemas complexos só aparecem como um todo e não podem ser analisados por decomposição do sistema nos seus componentes individuais; (vi) adaptação - os sistemas complexos são constituídos por agentes que agem com base em algumas informações sobre todo

o sistema; (vii) ponto crítico - grandes alterações ocorrem como resultado da acumulação de pequenos eventos, até atingir um valor de limiar particular, (o ponto crítico) que causam flutuações enormes no sistema.

As redes complexas (ou grafos) são descritas por um conjunto de vértices (nós) que estão ligados por arestas (conexões, ligações ou *links*) devido a algum tipo de interacção. Matematicamente, segundo Albert & Barabási (2002) [2], uma rede é representada por um grafo que é o par de conjuntos  $G = \{P, E\}$  onde  $P$  é o conjunto de  $N$  nós (vértices ou pontos),  $P_1, P_2, \dots, P_N$  e  $E$  é o conjunto de arestas (ligações ou *links*) que conectam dois elementos de  $P$ . Os grafos são usualmente representados como um conjunto de pontos, cada um correspondendo a um nó, onde dois pontos destes se juntam por uma linha se os nós correspondentes forem conectados.

Uma fonte particularmente rica de ideias tem sido o estudo de grafos aleatórios, grafos em que as arestas são distribuídas de forma aleatória. Existindo redes com topologia complexa e princípios de organização desconhecidos, torna a teoria dos grafos aleatórios útil no estudo deste tipo de redes.

A teoria dos grafos aleatórios foi introduzida por Paul Erdős & Alfréd Rényi (1959, 1960, 1961) [14, 15, 16], depois de Erdős ter descoberto que os métodos probabilísticos eram úteis na resolução de problemas em teoria dos grafos.

Segue-se agora uma breve descrição dos resultados mais importantes da teoria dos grafos aleatórios, focando-se os aspectos mais relevantes para as redes complexas.

### 2.1.1 O modelo Erdős-Rényi

Tal como é afirmado no estudo de Barabási & Albert (2002) [2], em 1959 dois matemáticos húngaros, Paul Erdős e Alfred Rényi, consideraram os grafos como objectos estocásticos sugerindo um modelo de rede baseado em ligações aleatórias, conhecido como grafos aleatórios de Erdős e Rényi.

O grafos aleatórios definidos por Erdős e Rényi são grafos com  $N$  nós conectados por  $n$  arestas escolhidas aleatoriamente de  $N(N-1)/2$  possíveis arestas existindo no total  $C_{[N(N-1)/2]}^n$  grafos com  $N$  nós e  $n$  arestas.

De forma equivalente, um grafo aleatório é representado através do modelo binomial apresentado em Barabási & Albert (2002) [2], onde temos  $N$  nós e a probabilidade de dois nós se conectarem é dada por  $p$ . O número total de arestas é uma variável aleatória com um valor esperado  $E[n] = p[N(N-1)/2]$ . Por exemplo, se tivermos um número grande de nós que se ligam todos uns com os outros, o número de ligações é dado pelo número possível de combinações de nós dois a dois  $N!/(2!(N-2)!)=N(N-1)/2$ . Como  $p$  é a probabilidade de essa ligação ser formada, então o valor esperado de ligações é  $pN(N-1)/2$ . Se  $G_0$  é o grafo com os nós  $P_1, P_2, \dots, P_N$  e

$n$  arestas, a probabilidade de obter este grafo através deste processo de construção é  $P(G_0) = p^n(1 - p)^{N(N-1)/2-n}$ .

A teoria dos grafos estuda as propriedades de grafos com  $N$  nós e com  $N \rightarrow \infty$ . Como tal, Erdős e Rényi usam a definição de que se a probabilidade de um grafo ter uma certa propriedade, por exemplo  $Q$ , se aproximar de um quando  $N \rightarrow \infty$ , então quase todos os grafos têm uma dada propriedade.

Começando com um conjunto de  $N$  vértices isolados, um grafo vai crescer à medida que serão adicionadas novas arestas, pelo que, a construção de grafos também é chamada de evolução. Um grafo cada vez mais conectado, para  $p \rightarrow 1$ , terá um número máximo de arestas  $n = N(N - 1)/2$ .

A descoberta fulcral de Erdős e Rényi foi o aparecimento de muitas propriedades importantes dos grafos aleatórios que, para uma dada probabilidade, o que se verifica é que ou quase todo o grafo tem a propriedade  $Q$  (e.g. todos os pares de nós estão conectados por um trajecto de arestas consecutivas) ou, contrariamente, quase nenhum dos grafos tem essa propriedade. Existe uma probabilidade crítica,  $p_c(N)$ , que identifica a transição de fase para muitas propriedades deste tipo. Se  $p$  crescer mais devagar do que  $p_c$ , com  $N$  a tender para o infinito, então, quase todos os grafos com probabilidade  $p$  perdem a propriedade  $Q$ . No caso contrário, se  $p$  crescer mais rápido do que  $p_c$ , então quase todos os grafos têm a propriedade  $Q$ . Assim, no caso de um grafo com  $N$  nós e uma probabilidade de conexão  $p$ , a probabilidade de este grafo ter a propriedade  $Q$  satisfaz a equação:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{N,p}(Q) = \begin{cases} 0 & \text{se } \frac{p}{p_c} \rightarrow 0 \\ 1 & \text{se } \frac{p}{p_c} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (2.1)$$

Esta probabilidade crítica é o foco de investigação de muitos físicos que estudam fenómenos críticos e identificam  $p_c$  como a probabilidade crítica em percolação que vai ser abordada mais à frente neste estudo.

É importante saber se a probabilidade  $p$  é maior ou menor que a probabilidade crítica  $p_c$  uma vez que, neste modelo, o sistema tem um tamanho fixo,  $N$ . Na teoria dos grafos aleatórios, a probabilidade de ocupação é definida como uma função do tamanho do sistema onde  $p$  representa a fracção das arestas ( das  $N(N-1)/2$  possíveis arestas). Para a mesma probabilidade de ocupação,  $p$ , grafos de dimensões maiores contêm mais arestas e propriedades tais como o aparecimento de ciclos para um  $p$  menor podem ocorrer mais em grafos grandes do que nos grafos menores. Isto significa que, para muitas propriedades  $Q$ , em grafos aleatórios não existe um limite único mas tem que se definir uma função do limiar que depende do tamanho do sistema e  $p_c(N \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ . Contudo, pode-se ver que o grau médio do grafo,

$$E[k] = 2n/N = p(N - 1) \simeq pN, \quad (2.2)$$

onde o  $k$  é o número de vizinhos (o número de ligações que cada nó tem), tem um valor crítico que depende do tamanho do sistema.

Erdős e Rényi estavam mais focados na riqueza matemática das redes aleatórias e não tanto em aplicações práticas, considerando assim apenas as propriedades matemáticas dos grafos. Vários outros modelos surgiram a seguir ao de Erdős e Rényi, um dos quais é o modelo que se segue, o modelo Barabási-Albert.

## 2.1.2 O modelo Barabási-Albert

Ao contrário do modelo anterior, Barabási & Albert (1999) [1] verificaram que a distribuição das conexões de muitas redes complexas não é aleatória, mas é do tipo livre de escala<sup>1</sup> tendo a forma  $P(k) \propto k^{-\gamma}$ , onde  $P(k)$  é a probabilidade de se ter um nó com  $k$  ligações e, portanto, o universo aleatório de Erdős e Rényi tende a não se verificar na natureza.

O modelo de Barabási e Albert consiste num modelo de crescimento que gera redes livres de escala e onde a maioria das redes reais exhibe ligações preferenciais. Assim, a probabilidade de dois nós se conectarem depende do grau do nó ao contrário do que se verificava no modelo de Erdős e Rényi. Estes dois factores, crescimento e ligação preferencial, são o fundamento da introdução do modelo Barabási-Albert, Barabási & Albert [2], que levou pela primeira vez a uma rede com um grau de distribuição da lei de potência, e que não estão presentes no modelo de Erdős e Rényi. Estes dois factores consistem no seguinte:

1. **Crescimento:** começando com um pequeno número de nós ( $m_0$ ), a cada passo é adicionado um nó com  $m$  ( $m \leq m_0$ ) arestas, que ligam o novo nó com os  $m$  nós diferentes já existentes na rede.
2. **Ligação preferencial:** o novo nó, que vai ser adicionado à rede, tende a conectar-se com nós com mais ligações, ou seja, a probabilidade de um novo nó se conectar com o nó  $i$  depende do grau de conectividade  $k_i$  do nó  $i$ , tal que:

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j (k_j)}. \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup>A distribuição livre de escala é o tipo de distribuição de probabilidade que reflecte invariância de escala.

Depois de  $t$  passos no tempo deste procedimento vai resultar uma rede com  $N = t + m_0$  nós e  $mt$  arestas.

Simulações numéricas indicaram, Barabási et al (1999) [6], que estas redes evoluem para um estado livre de escala, com a probabilidade de que um nó tem  $k$  arestas seguindo uma lei de potência com um expoente da expressão  $\gamma_{BA} = 3$ . O expoente de escala é independente de  $m$ , o único parâmetro neste modelo.

O que se verifica, neste tipos de redes geradas pelo modelo livre de escala, é que os vértices mais conectados tendem a receber mais ligações, paradigma conhecido como "o rico fica mais rico". Estas redes são formadas por um reduzido número de vértices altamente conectados, denominados de *hubs*, e por uma grande quantidade de vértices pouco conectados, o que define a distribuição livre de escala.

## 2.2 Teoria da Percolação

Uma das descobertas muito interessantes da teoria dos grafos aleatórios é a existência da probabilidade crítica em que se forma um *cluster* gigante. Traduzido em linguagem de rede, a teoria indica a existência de uma probabilidade crítica,  $p_c$ , de tal forma que abaixo de  $p_c$  a rede é composta por grupos isolados de nós, mas acima de  $p_c$ , um *cluster* gigante prolonga-se por toda a rede. Este fenómeno é similar à transição da percolação. É por isto que é importante introduzir o conceito de percolação no presente estudo.

### 2.2.1 Percolação - o que é?

A teoria da percolação foi proposta pelos matemáticos Broadbent & Hammersly (1957) [8] para estudar a propagação de fluidos em meios desordenados. É bastante relevante em física para explicar eventos como recuperação de petróleo a partir de meios porosos, fogos florestais, modelos de epidemia, redes e terremotos em rochas. O modelo de percolação, permite explicar este tipo de eventos e introduzir alguns conceitos fundamentais dos Sistema Complexos.

Imagine-se, Christensen & Moloney (2005) [10], uma rede  $L \times L$ , onde são pintados alguns quadrados com um ponto no centro, tal como representado na figura 2.1. Esta distribuição dos pontos é aleatória com uma probabilidade  $p$ , independente dos seus vizinhos. Chama-se *cluster* ao grupo de quadrados vizinhos ocupados por estes pontos, onde dois quadrados são chamados vizinhos se tiverem um lado em comum. Se uma grande parte da rede tem os quadrados pintados, significa que o *cluster* percolou a rede toda.

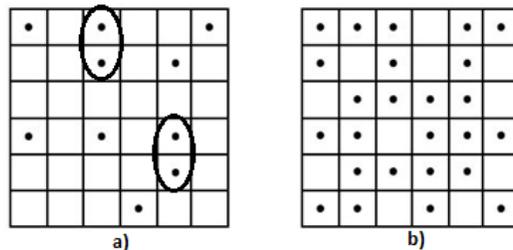


Figura 2.1: Percolação numa rede quadrada de tamanho  $L=6$ .

Na figura a) existem dois *clusters* identificados por um círculo à volta e na figura b), por ter uma probabilidade de ocupação perto de um, só existe um único *cluster* que abrange a rede toda.

A teoria da percolação estuda as propriedades destes *clusters*, onde o tamanho do *cluster*,  $s$ , é dado pelo número de quadrados pintados. É um modelo geométrico que passa por uma transição de fase.

Existem dois tipos de percolação, Crotti(2009) [11]: percolação por ligações e percolação por sítios (pontos). Considerando um *cluster* qualquer, a percolação por ligações é o estudo de fenómenos de percolação nas arestas, e.g. o modelo da infiltração de óleo em solos permeáveis, enquanto que a percolação por sítios estuda os fenómenos de percolação nos vértices (nós) sendo o caso da propagação de fogos florestais. Estes dois tipos de percolação, embora diferentes, apresentam propriedades semelhantes que são estudadas sobre um espaço  $L^d$ , sendo  $d$  a dimensão.

Um processo de percolação consiste na propagação do estado de uma célula activa às células vizinhas que, depois de activadas, continuam o processo de propagação. O processo termina quando não há mais células do agregado que possam ser activadas.

A duração do processo de percolação depende de dois factores, sendo eles o tamanho do agregado e a forma como estão ligados. É evidente que quanto maior for o agregado maior será a duração do processo de percolação e um agregado muito ligado percola muito mais rapidamente do que um agregado com poucas ligações.

O processo de percolação pode ser aplicado a uma variedade de sistemas e processos, mas o estudo da propagação de fogos florestais é o modelo mais simples para perceber como o processo de percolação se desenrola.

## 2.2.2 Exemplo - Fogos Florestais

A ideia da teoria da percolação e o conceito da transição com tempos divergentes podem ser entendidos através do exemplo dos fogos florestais, Stauffer & Aharony

(1994) [23].

O estudo da propagação do fogo numa floresta pode ser formulado na linguagem da percolação, onde a floresta é representada por uma rede com  $N$  sítios. Os sítios estão ocupados aleatoriamente por uma árvore, com probabilidade  $p$ ,  $0 \leq p \leq 1$ , que representa a densidade de florestação. Em média,  $pN$  sítios estão ocupados e  $(1 - p)N$  sítios estão desocupados. A questão é saber quanto tempo leva um fogo para abranger a floresta toda.

A ideia é queimar algumas árvores e ver como estas árvores vão passar o fogo às árvores vizinhas. Ver qual o *cluster* que passa de cima para baixo ou da direita para a esquerda em toda a área. A escolha mais simples é queimar as árvores da primeira linha e ver como o fogo de um lado da floresta irá dominar a floresta inteira. Para isso, é necessário saber como uma árvore vai passar o fogo à outra. Na versão sem vento (percolação por sítios), o fogo propaga-se às quatro árvores vizinhas, a norte, sul, leste e oeste, da árvore a arder. Neste caso, admite-se que uma árvore em chamas só pode passar o fogo à árvore vizinha e não a uma árvore mais afastada. Um fogo dá-se como terminado se não houver mais árvores a arder ou se chegar à última linha. O tempo de vida do fogo é dado pelo número de árvores queimadas até o fogo acabar, que será o tamanho do *cluster* de árvores queimadas,  $s$ .

A probabilidade de o fogo passar de um lado ao outro da floresta (percolar) depende da densidade de árvores na floresta. Existe uma densidade crítica para a qual o fogo se propaga pela primeira vez de um lado ao outro da floresta.

Os resultados destas simulações mostram que existe um valor de  $p$  para qual a duração do fogo aumenta bruscamente, ou seja, existe um valor crítico de  $p$ ,  $p = p_c$ , onde se dá a transição de fase pois separa o caso de extinção do fogo logo no início do processo, para um valor de  $p$  perto de zero, do caso de um incêndio catastrófico para um valor de  $p$  perto de um. É neste ponto que se observa a primeira passagem do fogo de um lado ao outro da floresta, isto é, aparece um agregado de percolação.

### 2.2.3 Quantidades de interesse na teoria da percolação

Por definição, segundo Christensen & Moloney (2005) [10], um *cluster* é percolado se e só se for finito. *Clusters* que se ligam a dois lados opostos do sistema, isto é, que se estendem à escala do sistema, são candidatos a *clusters* percolados em sistemas infinitos. No caso dos fogos florestais anteriormente visto, para a probabilidade crítica  $p_c$  ocorre uma transição de fase, ou seja, o agregado principal estende-se pela primeira vez a toda a escala do sistema.

Apresentam-se aqui as quantidades de interesse de uma rede bidimensional fixa de tamanho  $L$ , medida em unidades de espaços, onde existe um único parâmetro

problemático, a probabilidade de ocupação  $p$ . Para  $p = 0$  a rede não tem *clusters*, enquanto para  $p = 1$  só tem um *cluster* de tamanho  $L^2$ . Quando  $0 < p < 1$  cada realização será diferente pelo que o tamanho de um *cluster* cresce com o valor da probabilidade,  $p$ . A figura seguinte, Christensen & Moloney (2005) [10], ilustra o que foi dito anteriormente, mostrando 3 realizações com a probabilidade  $p$  a aumentar numa rede bidimensional de tamanho  $L \times L = 150 \times 150$ .

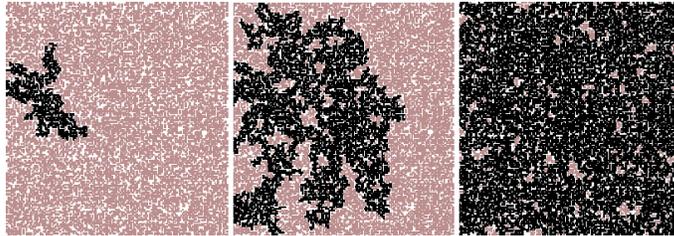


Figura 2.2: Realizações de percolação bidimensional numa rede quadrada de tamanho  $L = 150$ . Probabilidade de ocupação com  $p = 0,50$ ;  $p = 0,59$  e  $p = 0,65$ .

Cada simulação tem uma probabilidade de ocupação com  $p = 0,50$ ;  $p = 0,59$  e  $p = 0,65$  respectivamente. Em cada realização a área sombreada representa o maior *cluster*.

Na imagem da esquerda, o sistema está abaixo do limiar de percolação e não há nenhum *cluster* percolado. Por outro lado, na imagem da direita, o sistema está acima do limiar de percolação e o *cluster* representado é um *cluster* percolado. Verifica-se que o maior *cluster* que percola na totalidade a rede é observado para  $p > 0,59$  na figura do meio.

*Clusters* que percolam de cima para baixo ou da esquerda para a direita são candidatos a *clusters* percolativos num sistema infinito. Num sistema infinito, existe uma probabilidade crítica de ocupação,  $p_c$ , tal que para  $p < p_c$  não existem *clusters* infinitos percolados, enquanto que para  $p > p_c$ , existem *clusters* infinitos percolados. O *cluster* muito grande mas finito que emerge para  $p = p_c$  é chamado de *cluster* percolado.

É também bastante interessante ver o que acontece com a probabilidade de percolação à medida que o tamanho da rede aumenta. Na figura 2.3 é representado este facto e verifica-se que à medida que o tamanho da rede aumenta, a curva vai assemelhar-se a um degrau. No limite (quando  $L = \infty$ ) é este degrau, a função de Heaviside<sup>2</sup>, que descreve a probabilidade de percolação em função da probabilidade  $p$ : 0 para  $p < p_c$  e 1 para  $p > p_c$ .

<sup>2</sup>A função de Heaviside (função degrau) é a função descontínua de valor zero para argumento negativo, e um para argumento positivo.

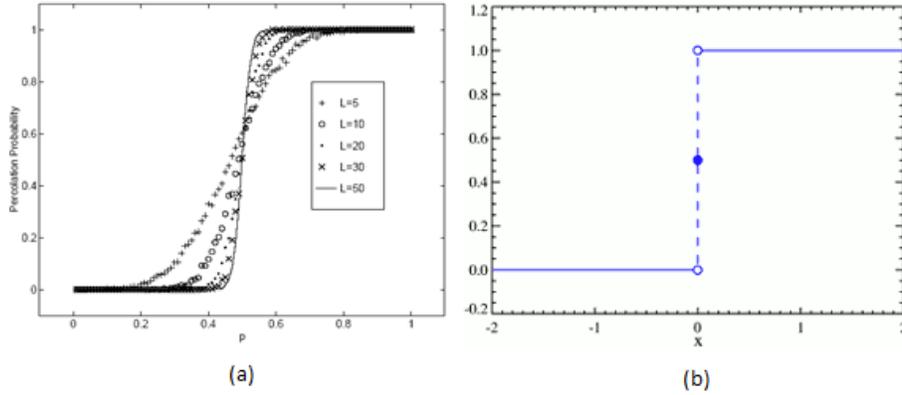


Figura 2.3: Probabilidade de Percolação, [9].

Para sistemas pequenos, aumentando o  $p$  aumenta a probabilidade de percolação, uma vez que aumenta a probabilidade de existir um caminho de quadrados pintados que liga dois lados opostos do sistema. No limite, quando o sistema é infinito, existe uma probabilidade característica  $p_c$ , chamada probabilidade crítica ou limiar de percolação, onde se dá a transição da percolação. Ou seja, abaixo da qual o sistema nunca percola, e acima da qual o sistema percola sempre. A transição de percolação pode ser vista como uma transição de fase, análoga às transições de fase térmicas, onde a temperatura crítica separa regiões de estabilidade de duas fases diferentes.

Algumas das quantidades importantes na teoria da percolação, Stauffer & Aharony (1994) [23], são as seguintes :

1. A **Probabilidade de percolação**,  $P$ , representando a probabilidade de um dado nó pertencer ao *cluster* infinito:

$$P = P_p(|C| = \infty) = 1 - \sum_{s < \infty} P_p(|C| = s), \quad (2.4)$$

onde  $P_p(|C| = s)$  representa a probabilidade de que o *cluster* na origem tem o tamanho  $s$ . Assim sendo,

$$P = \begin{cases} 0 & \text{para } p < p_c \\ > 0 & \text{para } p > p_c \end{cases} \quad (2.5)$$

2. O **tamanho médio do cluster**  $\bar{s}$  (ou susceptibilidade da percolação) é definido como:

$$\bar{s} = E_p(|C|) = \sum_{s=1}^{\infty} sP_p(|C| = s), \quad (2.6)$$

representa o valor esperado do tamanho do *cluster*.

3. A **distribuição do tamanho do *cluster***,  $n_s$ , definida como a probabilidade de um nó ter uma posição fixa num *cluster* de tamanho  $s$ ,

$$n_s = \frac{1}{s}P_p(|C| = s). \quad (2.7)$$

É de notar que  $n_s$  não é idêntico à probabilidade de um nó pertencer ao *cluster* de tamanho  $s$ . Fixando a posição do nó no *cluster* escolhe-se apenas um dos  $s$  possíveis nós, dado que  $P_p(|C| = s)$  é dividida por  $s$ , garantindo assim que só se contam os nós uma única vez.

## 2.2.4 Percolação Unidimensional ( $d = 1$ )

É importante começar por expor o caso da percolação unidimensional por ser um dos poucos casos em que se consegue calcular quantidades exactas, Christensen e Moloney (2005) [10]. Embora as conclusões para o caso unidimensional não sejam generalizáveis a dimensões mais elevadas, algumas das principais características da percolação permanecem válidas.



Figura 2.4: Exemplo de uma rede unidimensional de tamanho  $L = 20$ . Os quadrados escuros representam os pontos ocupados e os quadrados claros representam os pontos vazios.

### Densidade dos *clusters*

No caso de uma realização da percolação numa rede unidimensional, como representada na figura acima, a densidade dos *clusters* é dada pela expressão

$$n(s, p) = \frac{N(s, p; L)}{L} = (1 - p)^2 p^s, \quad (2.8)$$

onde  $N(s, p; L)$  é a frequência do tamanho dos *clusters*,  $s$  é o tamanho do *cluster*,  $p$  é a probabilidade,  $L$  é o tamanho da rede e  $sn(s, p)$  é a probabilidade de um dado ponto pertencer a um  $s$ -*cluster*. Para um dado  $p$ , a densidade  $n(s, p)$  decresce com o crescimento do tamanho do *cluster*,  $s$ , logo grandes *clusters* são raros.

### Tamanho médio dos *clusters*

Por exemplo, na figura acima existem três *clusters* de tamanho um, dois *clusters* de tamanho dois e um *cluster* de tamanho cinco, pelo que o tamanho médio dos *clusters* é da forma

$$\frac{1}{N_{clu}} \sum_{k=1}^{N_{clu}} s_k = \frac{1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 5}{6} = 2. \quad (2.9)$$

Aqui, cada grupo tem o mesmo peso. No entanto, existe uma forma alternativa a partir de uma média onde cada grupo é ponderado de acordo com o seu tamanho, dando mais peso a grandes *clusters*. Em média, o tamanho de um *cluster* a que um ponto pertence é dado por

$$\chi(p) = \frac{1}{N_{occ}} \sum_{k=1}^{N_{clu}} s_k^2. \quad (2.10)$$

Relacionando com a densidade dos *clusters*, obtém-se:

$$\chi(p) = \frac{1}{N_{occ}} \sum_{s=1}^{\infty} s^2 N(s, p, L). \quad (2.11)$$

$N_{occ}$  representa o número de quadrados ocupados e como  $N_{occ} = pL$  tem-se:

$$\begin{aligned} \chi(p) &= \frac{\sum_{s=1}^{\infty} s^2 N(s, p, L)}{pL} = \frac{\sum_{s=1}^{\infty} s^2 n(s, p)}{p} = \frac{\sum_{s=1}^{\infty} s^2 n(s, p)}{\sum_{s=1}^{\infty} s^n(s, p)} = \frac{1}{p} (1-p)^2 \sum_{s=1}^{\infty} s^2 p^s \\ &= \frac{1}{p} (1-p)^2 \left(p \frac{d}{dp}\right) \left(p \frac{d}{dp}\right) \left(\sum_{s=1}^{\infty} p^s\right) = \frac{1+p}{1-p} \quad \text{para } 0 < p < 1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Quando  $p$  se aproxima de um, o tamanho médio dos *clusters*,  $\chi(p)$ , diverge como uma lei de potência com o expoente  $(-1)$  em termos de  $(1-p)$ ,

$$\chi(p) = \frac{1+p}{1-p} \rightarrow 2(1-p)^{-1} \quad \text{para } p \rightarrow 1^-. \quad (2.13)$$

## Transição para percolação

A probabilidade de um ponto pertencer a um *cluster* finito é  $p$ . Numa rede unidimensional, o *cluster* percolado infinito deve incluir todos os quadrados da rede para abranger a rede da esquerda para a direita. A probabilidade de um ponto pertencer ao *cluster* percolado é dado por:

$$P_\infty = \begin{cases} 0 & \text{para } p < 1 \\ 1 & \text{para } p = 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

Para  $p < 1$  não existe percolação, então a probabilidade do ponto pertencer ao *cluster* percolado é zero. Para o caso de  $p = 1$ , existe o *cluster* percolado e todos os pontos pertencem a este *cluster*.

$$P_\infty + \sum_{s=1}^{\infty} sn(s, p) = p. \quad (2.15)$$

Esta equação (2.13) é válida para dimensões maiores e mostra-nos que a probabilidade de um quadrado estar ocupado é igual à probabilidade de este quadrado pertencer ao *cluster* infinito percolado,  $P_\infty$ , adicionado da probabilidade de este local pertencer a um *cluster* finito,  $\sum_{s=1}^{\infty} sn(s, p)$ .

## Função de Correlação

A função de correlação serve para estudar a probabilidade de dois pontos pertencerem ao mesmo *cluster* finito. Seja  $r_i$  a posição no vector do ponto  $i$  em  $d = 1$ . Dado que o ponto  $r_i$  está ocupado, a probabilidade de um ponto na posição  $r_j$  pertencer ao mesmo *cluster*, é dada pela função de correlação  $g(r_i, r_j) = p^r$ , para  $0 < p < 1$ , onde  $r = |r_i - r_j|$  é a distância. Quando  $r = 0$ ,  $g(r_i, r_j) = 1$ . A função de correlação decresce com o aumento da distância  $r$ .

A função de correlação está relacionada com o tamanho médio do *cluster*  $\chi(p)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{r_j} g(r_i, r_j) &= \sum_{r_j} p^{|r_i - r_j|} = \dots + p^2 + p^1 + p^0 + p^1 + p^2 + \dots \\ &= (1 + p)/(1 - p) \\ &= \chi(p). \end{aligned} \quad (2.16)$$

## Probabilidade de ocupação crítica

Neste caso,  $d = 1$ , a probabilidade  $p = 1$  que marca a transição para a fase percolativa, é referida como a probabilidade de ocupação crítica,  $p_c$ . A divergência entre as quantidades até agora apresentadas, pode ser expressa como uma lei de potência em termos de  $(p_c - p)$ .

### 2.2.5 Percolação em rede Bethe

O problema da percolação pode ser resolvido analiticamente em  $d = 1$  e  $d = \infty$ . A rede do tipo Bethe é um exemplo que foge da geometria euclidiana e é o caso mais parecido com o espaço económico. É uma estrutura onde cada nó tem  $z$  nós vizinhos, de tal forma que cada ramo dá origem a outros  $(z - 1)$  sub-ramos.

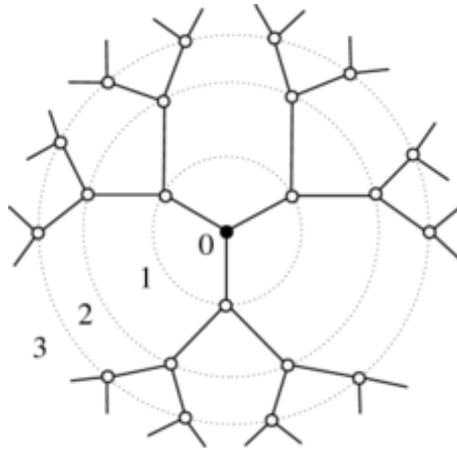


Figura 2.5: Exemplo de uma rede do tipo Bethe.

## Probabilidade de ocupação crítica

O *cluster* percolado é equivalente ao *cluster* que se prolonga ao longo de toda a rede. Imagine-se a realização de uma caminhada no *cluster* de percolação infinito onde cada passo é feito uma única vez. Em cada passo, existem  $(z - 1)$  ramos dos quais apenas  $p(z - 1)$  são acessíveis em média. A fim de continuar a caminhar no *cluster*, deve haver pelo menos um ramo acessível a caminhar. Neste caso a transição da percolação é identificada em:

$$p_c = \frac{1}{z - 1}. \quad (2.17)$$

A probabilidade de ocupação crítica depende de  $z$ . Quando  $z = 2$  temos a probabilidade de ocupação crítica para o caso unidimensional,  $p_c = 1$  enquanto que para  $z > 2$  temos  $p_c < 1$ .

### Tamanho médio dos *clusters*

Em média, o tamanho do *cluster*,  $\chi(p)$ , a que um ponto pertence é dado por:

$$\chi(p) = \frac{p_c(1+p)}{p_c - p}, \quad \text{para } 0 < p < p_c. \quad (2.18)$$

O tamanho médio do *cluster* numa rede Bethe é uma função crescente de  $p$  e diverge quando  $p$  se aproxima de  $p_c$  como uma lei de potência de expoente (-1) em termos da distância de  $p$  até  $p_c$ :

$$\chi(p) = \frac{p_c(1+p)}{p_c - p} \rightarrow p_c(1+p_c)(p_c - p)^{-1} \quad \text{para } p \rightarrow p_c^-, \quad (2.19)$$

$\chi(p)$  cresce para  $p < p_c$  e decresce para  $p > p_c$ . Para  $L \rightarrow \infty$ ,  $\chi(p)$  diverge para  $p \rightarrow p_c$  como uma lei de potência com o expoente crítico  $-\gamma$  em termos da distância de  $p$  para  $p_c$ :

$$\chi(p) \propto (p - p_c)^{-\gamma}, \quad \text{para } p \rightarrow p_c. \quad (2.20)$$

onde para a rede Bethe  $\gamma=1$  e para  $d=2$  o expoente  $\gamma=43/18$ , Christensen & Moloney (2005) [10].

### Transição da percolação

A probabilidade de um ponto pertencer ao *cluster* infinito percolado é dada por:

$$P_\infty = \begin{cases} 0 & \text{para } p \leq p_c \\ p[1 - (\frac{1-p}{p})^3] & \text{para } p > p_c. \end{cases} \quad (2.21)$$

Para  $p$  a aproximar-se de  $p_c$  tem-se

$$P_\infty \propto (p - p_c) \quad \text{para } p \rightarrow p_c^+. \quad (2.22)$$

Para  $p > p_c$  só há um *cluster* percolado e para  $p \leq p_c$  não há *clusters* percolados.  $P_\infty$  é visto como um parâmetro de ordem da percolação e  $p_c$  como ponto crítico. A

maneira como o parâmetro de ordem se relaciona com o ponto crítico  $p = p_c$  é dada pelo expoente crítico,  $\beta$ , onde:

$$P_\infty \propto (p - p_c)^\beta, \quad \text{para } p \rightarrow p_c^+. \quad (2.23)$$

Para a rede Bethe com  $z > 2$ , o expoente  $\beta = 1$  enquanto que para  $d=2$ ,  $\beta = 5/36$ , Christensen & Moloney (2005) [10].

### Número de densidade dos *clusters*

Considere-se um *cluster* de tamanho  $s$ , e seja  $t$  o número de vizinhos livres. Seja  $g(s, t)$  o factor que conta o número de diferentes *clusters* de tamanho  $s$  e perímetro  $t$  e este factor é tabelado até  $s = 40$ , tal como é afirmado em Christensen & Moloney (2005) [10]. Então, o número de densidade do *cluster* é dado por:

$$n(s, p) = \sum_{t=1}^{\infty} g(s, t)(1 - p)^t p^s. \quad (2.24)$$

O somatório  $\sum_{t=1}^{\infty} g(s, t)$  para *clusters* diferentes de tamanho  $s$ , é também tabelado até  $s = 53$  e  $sn(s, p)$  é a probabilidade de um dado ponto pertencer a um *cluster* de tamanho  $s$ . Para um dado  $p$ , a densidade  $n(s, p)$  decresce com o crescimento do tamanho do *cluster*,  $s$ , logo grandes *clusters* são raros. Mas não se consegue construir uma teoria de percolação baseada em *clusters* com  $s$  até 40. Tem que se considerar todos os tamanhos e neste caso não se consegue trabalhar com soluções exactas de densidades de *clusters* para todos os tamanhos, usando-se assim uma aproximação numérica do tipo:

$$n(s, p) \propto \begin{cases} s^{-\tau} & \text{quando } 1 \ll s \ll s_\epsilon \\ \text{decai rapidamente} & \text{quando } s \gg s_\epsilon. \end{cases} \quad (2.25)$$

Para a rede de *Bethe*,  $\tau=5/2$  e para  $d=2$   $\tau=187/91$ , Christensen & Moloney (2005) [10].

### Função correlação

Dado que um ponto  $i$  está ocupado, a probabilidade de um outro ponto  $j$ ,  $l$  gerações à frente, estar também ocupado e pertencer ao mesmo *cluster*, é dada pela função de correlação,  $g(i, j)$ . Uma vez que só há um único caminho entre o ponto  $i$  e o ponto  $j$ ,  $g(i, j) = p^l$ . Neste caso é importante calcular o número médio de pontos,  $N(i; l)$ ,

situados  $l \geq 1$  gerações mais a frente, que estão ocupados e pertencem ao mesmo *cluster* finito, que tem a seguinte expressão:

$$N(i; l) = \sum_{j \in l} g(i, j) = n(l)p^l \quad \text{para} \quad l \geq 1, \quad (2.26)$$

onde  $n(l)$  é o número de nós na geração  $l$  e é dado por  $n(l) = z(z - 1)^{(l-1)}$ . Logo,

$$N(i; l) = z(z - 1)^{(l-1)}p^l \quad \text{para} \quad l \geq 1. \quad (2.27)$$

Para  $p < p_c$  somando as funções de correlação para todos os possíveis  $j$ :

$$\sum_j g(i, j) = \chi(p), \quad \text{para} \quad 0 < p < p_c. \quad (2.28)$$

## 2.3 Teoria da Criticalidade

Segundo Paczuski & Bak (1995) [4] a complexidade é originada pela tendência de um sistema dinâmico grande se organizar sozinho num estado crítico. Num estado crítico, os eventos começam a correlacionar e o ponto crítico separa qualitativamente distintas de um sistema. O sistema apresenta uma transição de fase quando passa de uma fase para a outra (atravessa o ponto crítico). A criticalidade ocorre quando o sistema está no ponto crítico.

### 2.3.1 O que é a Criticalidade?

A criticalidade pode ser explicada através de uma ilustração de reacções em cadeia de peças de dominós (figura A.1 em anexo), quando estas são dispostas em filas e onde a queda de uma peça de dominó provoca a queda dos dominós vizinhos. A densidade de dominós que separa a probabilidade de a maior parte dos dominós caírem ou poucos dominós caírem é de 50%.

Através deste método pode observar-se que quando as peças de dominós estão muito distantes umas das outras, as reacções em cadeia (avalanches) são pequenas e localizadas, representando assim o estado subcrítico do sistema. De modo contrário, quando as peças de dominós estão densamente distribuídas, as reacções em cadeia (avalanches) são grandes. A queda de uma peça de dominó provocará quedas da maior parte de dominós à sua volta e, nestas condições, está-se perante um estado supercrítico do sistema. Existe uma densidade crítica de dominós que separa estes

dois comportamentos extremos. Esta probabilidade de percolação, quando a queda de um dominó provocará quedas de filas de dominós que ligam um lado ao outro do sistema, varia em função da densidade dos dominós para vários tamanhos da rede. O mesmo acontecia no caso dos fogos florestais, onde a curva era tão mais acentuada quanto maior era o tamanho da rede e, no limite de uma rede infinita, esta curva tem a forma de um degrau com o lado vertical nos 50% (figura 2.3). Para esta densidade, de 50%, uma avalanche que começa num dos lados da rede tanto pode fazer cair poucos dominós como pode estender-se até ao outro lado da rede (neste caso diz-se que a avalanche percolou).

### 2.3.2 Auto - Organização Crítica

Um sistema muito simples mas que serve de paradigma para a auto-organização crítica é o da pilha de areia, Christensen & Moloney (2005) [10]. Este paradigma foi proposto como um mecanismo genérico para a invariância de escala de uma classe particular de sistemas em não-equilíbrio.

Imagine-se uma superfície plana onde é adicionado lenta e uniformemente um grão de areia de cada vez sobre esta superfície. À medida que os grãos são adicionados, estes começam a empilhar-se uns sobre os outros criando uma pilha de declive suave. Em dadas alturas, o declive fica demasiadamente íngreme nalguns pontos da pilha e alguns grãos deslizam causando avalanches pequenas e localizadas. À medida que mais areia é adicionada e o declive da pilha aumenta, também o tamanho médio das avalanches aumenta. O declive (médio) da pilha cessa de aumentar quando este atinge o valor correspondente ao ângulo de repouso. Quando mais um grão de areia é adicionado à pilha, este pode provocar uma avalanche de grandes dimensões, incluindo eventualmente uma avalanche muito grande. É neste momento que é feita a passagem de um estado subcrítico para o estado crítico. O estado crítico é o estado quando a pilha de areia não consegue aguentar nem mais um grão de areia sem provocar avalanches muito grandes.

Por outro lado, se o declive da pilha de areia é maior do que o ângulo de repouso, então uma avalanche de grande proporção ocorre de seguida. Este é o estado supercrítico, o qual colapsa até que se atinja de novo o estado crítico.

O estado crítico da pilha de areia é um atrator e a variação de alguns parâmetros do sistema faz saltar a pilha de areia para um outro ponto crítico, pelo que se diz que a pilha, com quedas constantes de grãos de areia, está num estado de auto-organização crítica.

Este fenómeno foi identificado pela primeira vez por Per Bak, Chao Tang e Kurt Wiesenfeld, Bak et al (1987) [5], num trabalho pioneiro publicado na *Physical Review Letters*, e é considerado como sendo um dos mecanismos que pode estar por detrás

do aparecimento dos fractais, das leis de potência e da complexidade na natureza.

O mesmo acontece na economia durante os ciclos económicos. Quando a economia está em expansão, são formadas novas ligações económicas, i.e., são efectuadas novas trocas, e o número de ligações entre os agentes no sistema vai crescer cada vez mais. No entanto, tal como no caso do grão de areia, o agente está sujeito a um limite acima do qual 'tem energia a mais', sendo este o limite de alavancagem. Quando um agente ultrapassa o limite de alavancagem (economicamente traduzido por consumir muito mais que o que produz) ele é rejeitado pelo sistema (o seu consumo é cortado ou o seu crédito é cortado ou esse consumo tem um custo de oportunidade demasiado elevado, várias traduções podem ser encontradas na teoria económica). Como este agente tem ligações com os agentes que o rodeiam, também estes vão ter um corte na sua produção e também estes vão ter alavancagens alteradas. E assim sucessivamente até que a avalanche cesse. Este é o análogo às avalanches no caso da pilha de areia quando se passa do estado subcrítico para o estado crítico. Depois de o sistema económico arrefecer, começa a notar-se um novo crescimento onde a actividade económica vai ficar cada vez mais intensa até atingir um novo ponto crítico. São assim formados os ciclos económicos verificando-se que o sistema económico é um sistema auto-organizado.

# Capítulo 3

## Enquadramento Prático

### 3.1 O Modelo

O modelo da economia fictícia que serve de base a este trabalho foi desenvolvido pela Closer<sup>1</sup> em conjunto com o Centro de Física Teórica e Computacional da Universidade de Lisboa [12]. O processo de determinação e medidas dos *clusters* foi desenvolvido pelo ETH de Zurique.

Neste modelo temos  $N$  agentes que são atraídos a formar ligações económicas entre si e, em cada instante, uma nova ligação é formada. Cada ligação representa uma troca de trabalho pelo que, ao agente  $i$  é contabilizada uma ligação de saída ( $o$ ) e ao agente  $j$  uma ligação de entrada ( $i$ ).

Cada agente vai contabilizar  $x_i$  ligações de entrada e  $x_o$  ligações de saída. É assumido que não é possível que em cada agente a diferença entre  $x_o-x_i$  possa divergir. As diferenciações entre as ligações  $x_i$  e  $x_o$  são feitas pelo sistema da mesma forma que o que acontece na economia real, os agentes económicos no seu dia a dia, separam as ligações de consumo das ligações de produção, embora em ambas as ligações se façam trocas. Desta forma,

$$w_{th} = \frac{x_o - x_i}{x_i}, \quad (3.1)$$

representa o limite de alavangagem abaixo do qual o sistema quebra as ligações  $x_i$  com o agente (pode-se fazer analogia a um *default* de um agente económico). Neste caso, como os  $x_i$  de um agente são os  $x_o$  de outros agentes, uma nova contabilização é feita nos primeiros vizinhos que, eventualmente, podem ficar abaixo de  $w_{th}$  e assim

---

<sup>1</sup>A Closer é uma empresa líder na investigação de medidas de risco e de processos de suporte à decisão.

sucessivamente até ao fim da reacção em cadeia. O limite  $w_{th}$  é um pressuposto semelhante ao limite que Merton usa nos seus modelos de risco, Merton (1974) [18].

As ligações entre os agentes não são feitas aleatoriamente mas seguem o modelo de Barabási-Albert anteriormente explicado. Assim, passado um período de formação da rede económica, forma-se uma rede em que cada ligação entre os nós tem um peso diferente (entre dois nós podem existir mais que uma ligação) e tomando um peso mínimo como limite para se considerar que existe uma ligação, o sistema que se está a formar é um sistema crítico auto-organizado com formação de clusters diferentes no fim de cada reacção em cadeia.

A razão pela qual se chama ao modelo uma economia simulada é porque o modelo segue apenas os primeiros princípios da economia, a escassez com tendência contínua para formar ligações, custo de oportunidade na existência do limite de alavancagem e escolha do algoritmo de Barabási-Albert. Note-se que este algoritmo usa apenas um histograma de frequências relativas como aproximação à probabilidade de ligação, o que se pode considerar matematicamente trivial. Por representarem as medidas clássicas de caracterização, as medidas analisadas foram: a) "o maior agregado" representando o tamanho do maior agregado que se observa em cada instante em que uma nova ligação é formada, b) "a susceptibilidade do agregado" dada pelo tamanho médio do *cluster*; c) "o número de ligação dentro do nó" sendo o número médio de ligações que os nós atraem em cada instante; d) "o número de ligações fora do nó" dado pelo número médio de ligações que os nós disponibilizam. Para cada uma destas medidas tem-se uma série com 1.000.000 de observações em que cada instante corresponde ao momento em que é feita uma troca.

## 3.2 Métodos de Análise

O grande objectivo deste trabalho é verificar, para uma economia hipotética, se as medidas dos *clusters* que representam a economia seguem um movimento Browniano. Esta verificação passa pela análise destas medidas através de vários testes cujos procedimentos e resultados serão apresentados nas secções seguintes depois de uma breve descrição do que é um movimento Browniano e das suas propriedades.

### 3.2.1 Movimento Browniano

Para descrever matematicamente o movimento Browniano, é usado o conceito de processo estocástico  $B_t(w)$  (ver a definição rigorosa de processo estocástico em Øksendal (2008) [20]). O processo  $B_t(w)$  é também conhecido como processo de Wiener, um processo estocástico de tempo contínuo, e é por isso que muitas vezes o movimento

Browniano é chamado também de processo de Wiener.

O movimento Browniano ou processo de Wiener é caracterizado por três factos:

- $B_0=0$ ;
- $B_t$  tem trajectórias contínuas quase certamente;
- $B_t$  tem incrementos independentes e estacionários e o incremento  $B_t - B_s$  tem distribuição  $N(0;t-s)$

O **teorema do limite central funcional**<sup>2</sup> (FCLT, *functional central limit theorem*), ou o princípio da invariância ou o teorema de Donsker, estabelece que um processo de Wiener *standard* é o análogo em tempo contínuo de um passeio aleatório sem deriva, tal como se refere em Lopes (2011) [22]. Para uma partícula numa posição fixa e conhecida em  $t=0$ , o teorema diz-nos que depois de um grande número de passos independentes no passeio aleatório, o passeio apresenta uma distribuição de acordo com a distribuição normal com a variância  $\sigma^2 = \frac{t}{\delta t} \epsilon^2$ , onde  $t$  é o tempo decorrido desde o início do passeio aleatório,  $\epsilon$  é o tamanho do passo e  $\delta t$  é o tempo decorrido entre dois passos sucessivos.

Como tal, este trabalho foca-se na verificação, para os dados fictícios que servem de base para este estudo, se as medidas dos *clusters* anteriormente apresentadas são passeios aleatórios que, por sua vez, convergem para movimentos Brownianos.

### 3.2.2 Testes realizados

Uma forma prática de verificar se uma série é um passeio aleatório é através dos testes de Raízes Unitárias (RU). Existem vários testes deste tipo mas nesta secção será dado particular interesse aos mais populares, o teste Aumentado de Dickey e Fuller (ADF) e o teste Philips Perron (PP). Estes dois testes estudam a existência de raízes unitárias, ou seja, a não estacionariedade do processo sendo esta uma propriedade de um passeio aleatório.

Para que um processo estocástico  $\{y_t\}$  seja estacionário devem ser satisfeitas as seguintes condições, Lopes (2011) [22]:

1.  $E(y_t) = \mu < \infty, \forall t$ ,
2.  $Var(y_t) = \sigma_y^2 < \infty, \forall t$ ,
3.  $Cov(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k, \forall t, k$ .

---

<sup>2</sup>A versão mais simples do teorema do limite central: se  $\epsilon_t \text{ iid}(0, \sigma^2) \Rightarrow \frac{\sum \epsilon_t}{\sqrt{T}} \rightarrow^d N(0, \sigma^2)$ .

Ou seja, um processo é estacionário quando tem a média e a variância finitas e constantes ao longo do tempo e a co-variância entre dois elementos desfasados do processo só depende da distância no tempo a que se encontram um do outro.

Para ilustrar as características estatísticas associadas aos testes de raízes unitárias, considere-se um modelo AR(1)<sup>3</sup> do tipo:

$$y_t = \rho y_{t-1} + \epsilon_t, \quad (3.2)$$

onde  $\rho$  é um parâmetro a ser estimado e  $\epsilon_t$  é assumido como ruído branco.

Se  $|\rho| \geq 1$ ,  $y_t$  é uma série não estacionária e a variância de  $y_t$  cresce com o tempo e aproxima-se do infinito. Se  $|\rho| < 1$ ,  $y_t$  é uma série estacionária. Assim sendo, as hipóteses de estacionariedade podem ser avaliadas testando os casos em que o valor absoluto de  $\rho$  é estritamente maior que um.

O teste de RU disponibilizado no Eviews, geralmente testa a hipótese nula  $H_0: \rho = 1$  contra a hipótese  $H_1: \rho < 1$ .

### Teste Aumentado de Dickey-Fuller (ADF)

O teste ADF serve para testar a presença de raízes unitárias nas variáveis em estudo, Wooldridge (2005) [24].

Este teste apresenta como hipóteses:

- $H_0 : \phi = 0$  (presença de raiz unitária);
- $H_0 : \phi < 0$

e a respectiva equação de teste é dada por:

$$\Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \phi y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \gamma_i \Delta y_{t-i} + \epsilon_t, \quad (3.3)$$

(assumindo a existência de *drift* e tendência nos casos em que a variável não apresenta tendência  $\alpha_1 \simeq 0$ ).

A respectiva estatística de teste é dada por:

$$t_{\phi=1} = \frac{\hat{\phi} - 1}{SE(\hat{\phi})}, \quad (3.4)$$

---

<sup>3</sup>Auto-Regressivo de ordem um.

onde  $\hat{\phi}$  é o estimador dos mínimos quadrados, e  $SE(\hat{\phi})$  é o estimador *standard error*. Quando o teste ADF não rejeita a hipótese nula  $H_0 : \phi = 0$ , significa que existe evidência estatística de presença de raízes unitárias na série testada e, sendo assim, a série é não estacionária.

### Teste Phillips-Perron (PP)

O teste PP consiste num método alternativo (não paramétrico) para o controlo da autocorrelação quando se testa as raízes unitárias. Este teste baseia-se na estatística:

$$\tilde{t}_\phi = t_\phi \left( \frac{\gamma_0}{f_0} \right)^{1/2} - \frac{T(f_0 - \gamma_0)(se(\hat{\phi}))}{2f_0^{1/2}s}, \quad (3.5)$$

onde  $\hat{\phi}$  é o estimador,  $t_\phi$  é o rácio  $t$ ,  $se(\hat{\phi})$  é o coeficiente *standard error* e  $s$  é o *standard error* da regressão. O parâmetro  $\gamma_0$  é o estimador consistente do erro da variância na equação de Dickey-Fuller não aumentada que é da forma  $\Delta y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t$  (calculado como  $(T - k)s^2/T$ , onde  $k$  é o número de regressores). Por fim, o termo  $f_0$  é um estimador do spectrum residual a frequência zero.

## 3.3 Resultados

Tal como foi referido, temos quatro variáveis em estudo sendo elas o maior agregado, a susceptibilidade do agregado, o número de ligação dentro do nó e o número de ligações fora do nó a quais serão aplicados vários testes de modo a verificar se estas variáveis seguem um movimento Browniano.

Começa-se a análise com os **testes de raiz unitária ADF e PP**, realizados no *software* Eviews, que servem para verificar se uma série tem raízes unitárias, ou seja, se é passeio aleatório.

Através da análise dos gráficos de cada série (A.2 e A.3), constatou-se que os mesmos não evidenciam presença de tendência, pelo que, os testes ADF e PP serão realizados tendo em conta este facto.

Após a realização dos teste e análise dos *outputs* dos mesmos ao nível de cada variável em estudo, os resultados obtidos foram concentrados na tabela 3.1.

No caso destes testes, as regras de decisão passam pela análise do *p-value* do teste, em que não se rejeita a hipótese nula para  $p > 0,05$  e, contrariamente, rejeita-se a hipótese nula para  $p < 0,05$ .

Variáveis	p-value ADF	t <sup>ADF</sup>	t <sup>*</sup>	p-value PP	t <sup>PP</sup>	t <sup>*</sup>
Maior Agregado	0,000	-13,46466	1% -3,958042	0,000	-13,24847	1% -3,958042
			5% -3,409806			5% -3,409806
			10% -3,126605			10% -3,126605
Susceptibilidade dos Agregados	0,000	-18,26281	1% -3,958042	0,000	-17,51609	1% -3,958042
			5% -3,409806			5% -3,409806
			10% -3,126605			10% -3,126605
Número de ligações dentro do nó	0,000	-6,008441	1% -3,958042	0,000	-6,13597	1% -3,958042
			5% -3,409806			5% -3,409806
			10% -3,126605			10% -3,126605
Número de ligações fora do nó	0,000	-6,009462	1% -3,958042	0,000	-6,138599	1% -3,958042
			5% -3,409806			5% -3,409806
			10% -3,126605			10% -3,126605

a)

Variáveis	p-value ADF	t <sup>ADF</sup>	t <sup>*</sup>	p-value PP	t <sup>PP</sup>	t <sup>*</sup>
ln(Maior Agregado)	0,000	-13,48487	1% -3,958042	0,000	-13,26675	1% -3,958042
			5% -3,409806			5% -3,409806
			10% -3,126605			10% -3,126605
ln(Susceptibilidade e dos Agregados)	0,000	-17,33059	1% -3,958042	0,000	-16,62135	1% -3,958042
			5% -3,409806			5% -3,409806
			10% -3,126605			10% -3,126605
ln(Número de ligações dentro do nó)	0,000	-6,186144	1% -3,958042	0,000	-6,29346	1% -3,958042
			5% -3,409806			5% -3,409806
			10% -3,126605			10% -3,126605
ln(Número de ligações fora do nó)	0,000	-6,186536	1% -3,958042	0,000	-6,293844	1% -3,958042
			5% -3,409806			5% -3,409806
			10% -3,126605			10% -3,126605

b)

Tabela 3.1: Resultados dos testes ADF e PP: a) para as séries observadas; b) para o logaritmo das séries.

Alternativamente à análise do *p-value*, é através da interpretação das estatísticas de teste que também é possível tirar conclusões quanto à rejeição ou não da hipótese nula. Se a estatística de teste para os níveis de significância de 1%, 5% e 10%,  $t^*$ , é menor que o valor crítico  $t^{ADF}$ , não se rejeita a hipótese nula, isto é, existe evidência estatística de presença de raízes unitárias. No caso contrário, em que a estatística de teste para os níveis de significância de 1%, 5% e 10%,  $t^*$  é maior que o valor crítico  $t^{ADF}$ , rejeita-se a hipótese nula, isto é, existe evidência estatística de não presença de raiz unitária nas séries testadas. As mesmas condições e interpretações se aplicam ao teste PP.

No caso em estudo, para todas as variáveis, tanto o teste ADF como o teste PP apresentam um *p-value* = 0,000 que é superior a 5% pelo que, ambos os testes rejeitam a hipótese nula da presença de raízes unitárias em todas as variáveis.

Quanto à interpretação das estatísticas de teste, verifica-se que, para todas as variáveis e em ambos os testes, o  $t^*$  para cada nível de significância (1%, 5% e 10%) é sempre inferior tanto ao  $t^{ADF}$  como ao  $t^{PP}$ , pelo que é reforçada a decisão de rejeitar a hipótese nula de as séries serem passeios aleatórios e, sendo assim, não podemos tirar nenhuma conclusão acerca da presença de movimento Browniano.

Para reforçar esta ideia, aplicaram-se estes testes ao logaritmo das variáveis em estudo para verificar se as variáveis seguem um movimento Browniano Geométrico e se a conclusão se mantém. Os resultados obtidos são os que constam na tabela 3.1 (b) e pela análise dos mesmos tiram-se as mesmas conclusões.

Pelo que, através da análise destes dois testes, a conclusão que se tira é que as quatro variáveis em estudo não são passeios aleatórios.

De forma complementar, estimou-se ainda uma equação auto-regressiva do tipo  $Y_t = c + \theta * ar(1)$  onde  $Y_t$  diz respeito a cada uma das quatro variáveis. Esta estimação é feita através do Método dos Mínimos Quadrados, com o objectivo de verificar se o coeficiente  $\theta$  é igual à unidade, novamente com recurso ao *software* Eviews.

Os resultados obtidos, tabela 3.2 a) e b), apontam para coeficientes muito próximos de um e as raízes dos quatro modelos auto-regressivos estimados assumem um valor unitário pelo que, conclui-se que estas quatro variáveis apresentam uma estrutura muito próxima de a de um passeio aleatório. Contudo, os teste ADF e PP realizados não corroboram esta conclusão.

Analisando agora as variáveis num outro prisma, com enfoque no estudo de uma propriedade essencial do Movimento Browniano que é a sua distribuição.

Como o movimento Browniano tem uma distribuição Normal, as séries em estudo deverão ter uma distribuição Normal para seguir este tipo de movimento. Do mesmo modo, como o movimento Browniano Geométrico tem uma distribuição logNormal, para uma série seguir este movimento, o seu logaritmo deverá ter uma distribuição

	<b>Coefficiente do ar(1)</b>	<b>Inverted AR Roots</b>
<b>Maior Agregado</b>	0,999624	1,00
<b>Susceptibilidade dos agregados</b>	0,999305	1,00
<b>Número de ligações dentro do nó</b>	0,999946	1,00
<b>Número de ligações fora do nó</b>	0,999946	1,00

a)

	<b>Coefficiente do ar(1)</b>	<b>Inverted AR Roots</b>
<b>ln(Maior Agregado)</b>	0,999623	1,00
<b>ln(Susceptibilidade dos agregados)</b>	0,999373	1,00
<b>ln(Núm. de ligações dentro do nó)</b>	0,999944	1,00
<b>ln(Núm. de ligações fora do nó)</b>	0,999944	1,00

b)

Tabela 3.2: Coeficiente da Componente Autoregressiva: a) para as séries observadas; b) para o logaritmo das séries.

normal.

Ao analisar os histogramas das séries dos logaritmos das variáveis em estudo (figura A.4 a) e b)), observa-se que, embora as distribuições estejam muito próximas de uma distribuição normal apresentando uma *skewness* e *kurtosis* muito próximos de zero e três respectivamente, em todos os casos o teste da normalidade de Jarque-Bera é rejeitado com um  $p\text{-values}=0,00$ .

Após todas estas análises aqui apresentadas, a conclusão que se tira é unânime: não existe evidência estatística de que as séries sejam passeios aleatórios, pelo que, com base neste testes, exclui-se a possibilidade de as séries em estudo serem movimentos Brownianos.

# Capítulo 4

## Conclusões e Perspectivas

Sendo o principal objectivo deste trabalho verificar se as medidas dos *clusters* de uma economia fictícia seguem um movimento Browniano, para ser possível assim aplicar os modelos financeiros a estas medidas, aplicado o estudo a esta economia fictícia, a conclusão a tirar é que as medidas dos clusters, por não seguirem um movimento Browniano, não trazem uma previsibilidade acrescida.

Ao serem realizados vários testes para verificar se as medidas em estudo têm as mesmas propriedades que um movimento Browniano, demonstrou-se que todos os testes devolvem uma resposta negativa e que estas medidas não seguem um movimento Browniano.

Apesar de os resultados serem negativos, este estudo tem uma grande importância para Closer proporcionando a possibilidade de estudar caminhos alternativos.

Para além das quatro medidas estudadas, existem outras medidas que não foram estudadas no âmbito deste trabalho mas que têm bastante interesse. Será o caso do expoente da rede  $\gamma$  da expressão  $P(k) \propto k^{-\gamma}$  que poderá ficar como investigação futura.

Uma grande limitação deste estudo são os dados que estão na base do mesmo. Por serem dados de uma economia fictícia, dados estes que foram desenvolvidos com base nas teorias apresentadas, podem ter características substancialmente diferentes dos dados económicos reais. Sendo dados fictícios, qualquer que fosse o resultado, este estudo deveria posteriormente ser aplicado a dados reais para ser possível tirar conclusões mais fiáveis. Como investigação futura propõe-se precisamente a aplicação deste estudo a dados reais para se verificar se os mesmos resultados são obtidos ou se é possível analisar as medidas dos clusters em vez de analisar as séries financeiras, não sendo previsível que dados reais passíveis de análise neste âmbito possam vir a ser recolhidos a curto prazo.

# Bibliografia

- [1] R. Albert and A. L. Barabási. *Emergence of Scaling in Random Networks*. Science, 286, pág. 50-512, (1999).
- [2] R. Albert and A. L. Barabási. *Statistical mechanics of complex networks*. Reviews of modern Physics, 74, (2002).
- [3] L. Bachelier. *Théorie de la spéculation*. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3, pág. 21-86, (1900).
- [4] P. Bak and M. Paczuski. *Complexity, contingency, and criticality*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, 92, pág. 6689-6696, (1995).
- [5] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld. *Self-Organized Criticality: An Explanation of 1/f Noise*. Physical Review Letters, 59 (4), pág. 381-384, (1987).
- [6] A. L. Barabási, A. Réka, and H. Jeong. *Mean-field theory for scale-free random networks*. Physica A, 272, pág. 178-180, (1999).
- [7] F. Black and M. Scholes. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. J. of Polit. Econ., 81, pág. 637, (1973).
- [8] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. *Percolation processes. I. Crystals and Mazes*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 53 (3), pág. 629-641, (1957).
- [9] CFTC. *À Luz da Física*. Disponível em: <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo5/modulo5/topico1.php>. Maio, 2012.
- [10] K. Christensen and N. R. Moloney. *Complexity and Criticality*. Imperial College Press, 1ª ed., pág. 3-10, (2005).
- [11] P. Crotti. *Une introduction à la théorie de la percolation*. Séminaire Printemps, Université de Fribourg Suisse, pág. 9, (2009).

- [12] J. P. Cruz and P. G. Lind. *Self-organized criticality in a network of economic agents with finite consumption*. Physica A, 391 (4), pág. 1445-1452, (2012).
- [13] A. Einstein. *über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen*. Annalen der Physik, 17, pág. 549-560, (1905).
- [14] P. Erdős and A. Rényi. *On random graphs*. Publ. Math. December, 6, pág. 290-297, (1959).
- [15] P. Erdős and A. Rényi. *On the evolution of random graphs*. Magyar Tud. Akad., 5, pág. 17-61, (1960).
- [16] P. Erdős and A. Rényi. *On the evolution of random graphs*. Magyar Tud. Akad., 38 (4), pág. 343-347, (1961).
- [17] H. J. Holtrup. *Stock Markets as Evolving Complex Systems: Simulations and Statistical Inferences*. pág. 32, (2006).
- [18] R. C. Merton. *On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates*. The Journal of Finance, 29 (2), pág. 449-470, (1974).
- [19] R. C. Merton. *Theory of rational option pricing*. The Bell Journal of Economics and Management Science, 4, (1973).
- [20] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equation*. Springer, 6<sup>a</sup> ed., pág. 12-15, (2010).
- [21] P. A. Samuelson. *Rational theory of warrant pricing*. Industrial Management Review, 6, pág. 13-31, (1965).
- [22] A. Silva Lopes. *Raízes Unitárias - Uma Introdução*. Material Didático, (2011).
- [23] D. Stauffer and A. Aharony. *Introduction to Percolation Theory*. Taylor & Francis Inc., 2<sup>a</sup> ed., pág. 5-8, (1994).
- [24] J. M. Wooldridge. *Introductory Econometrics - A Modern Approach*. Thomson South Western, 3<sup>a</sup> ed., pág. 630-639, (2005).

Apêndice A

Anexos

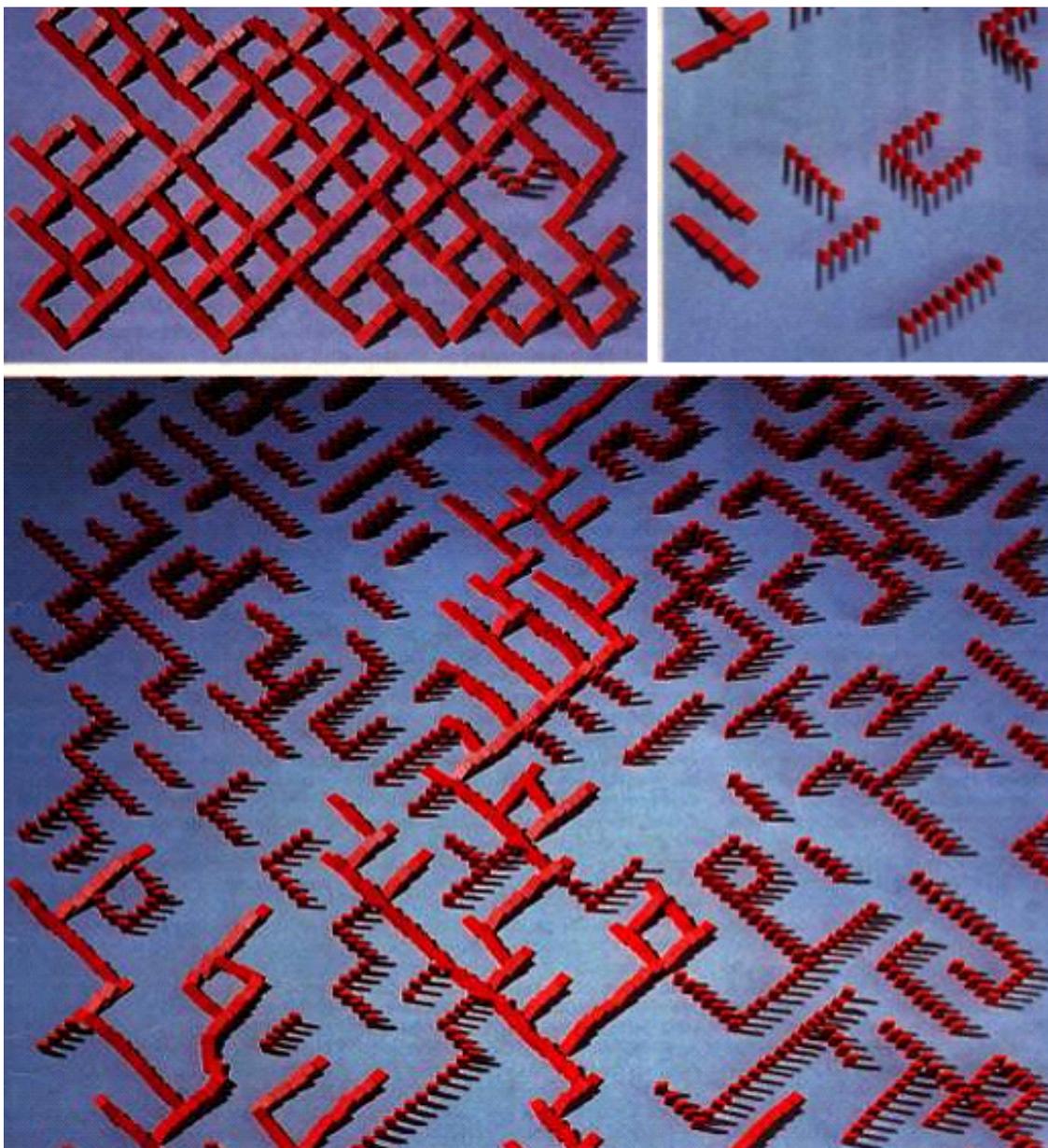


Figura A.1: As filas de dominós: Exemplo da criticalidade, [9].

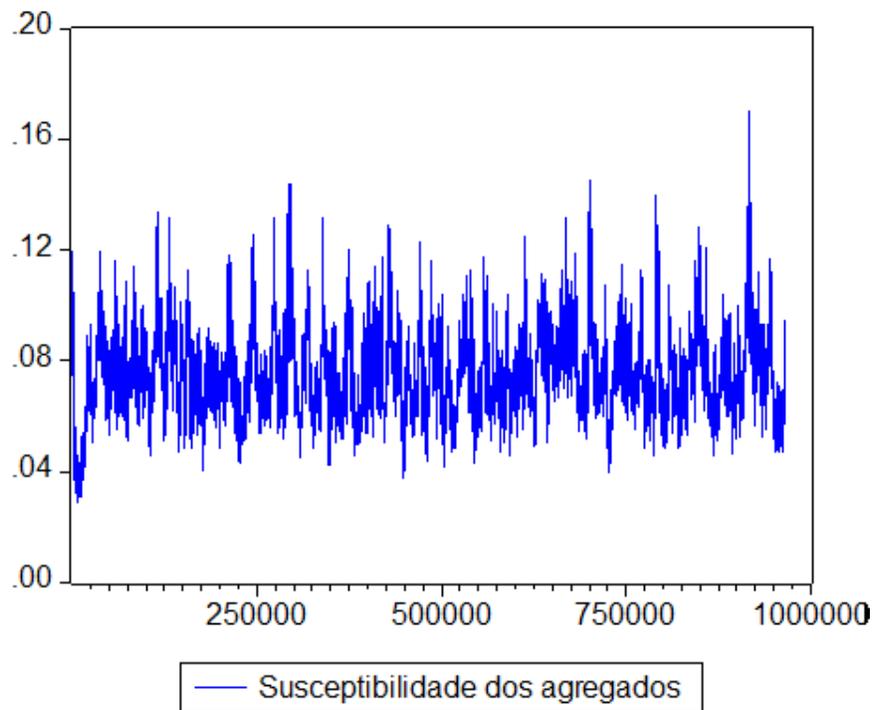
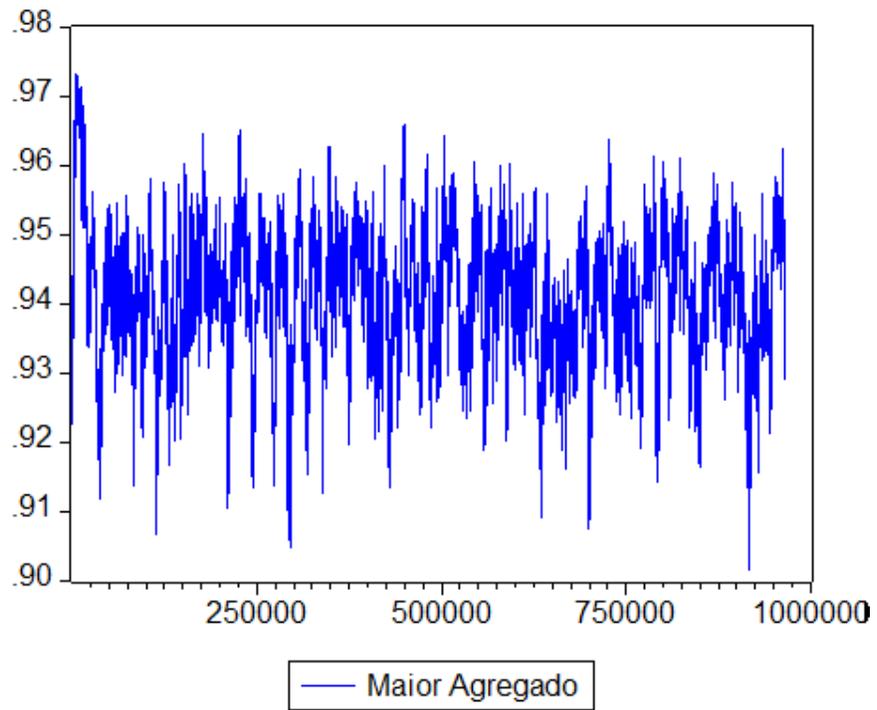


Figura A.2: Gráfico das séries Susceptibilidade dos Agregados e Maior Agregado.

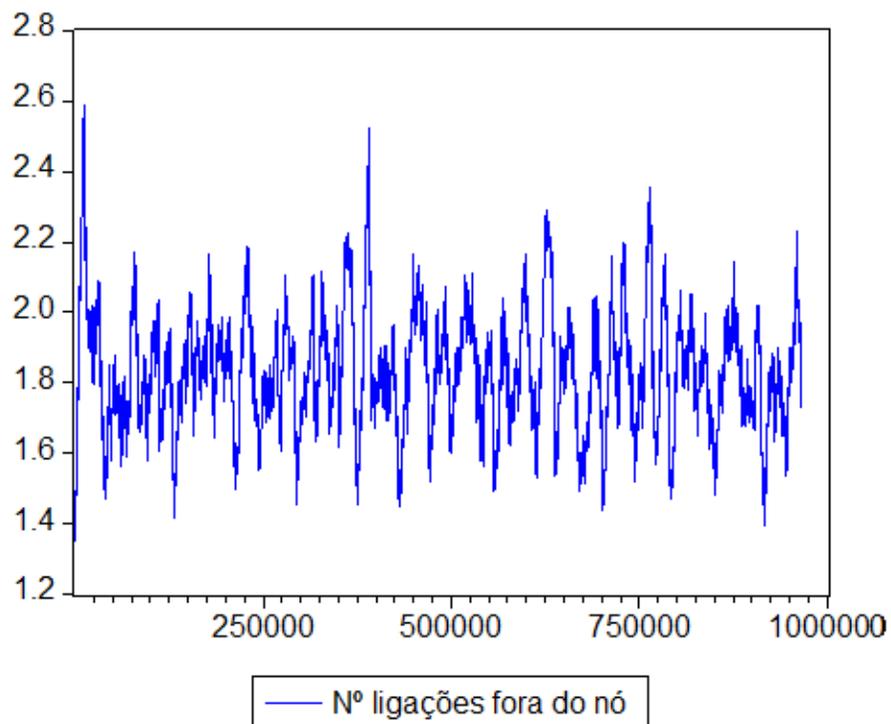
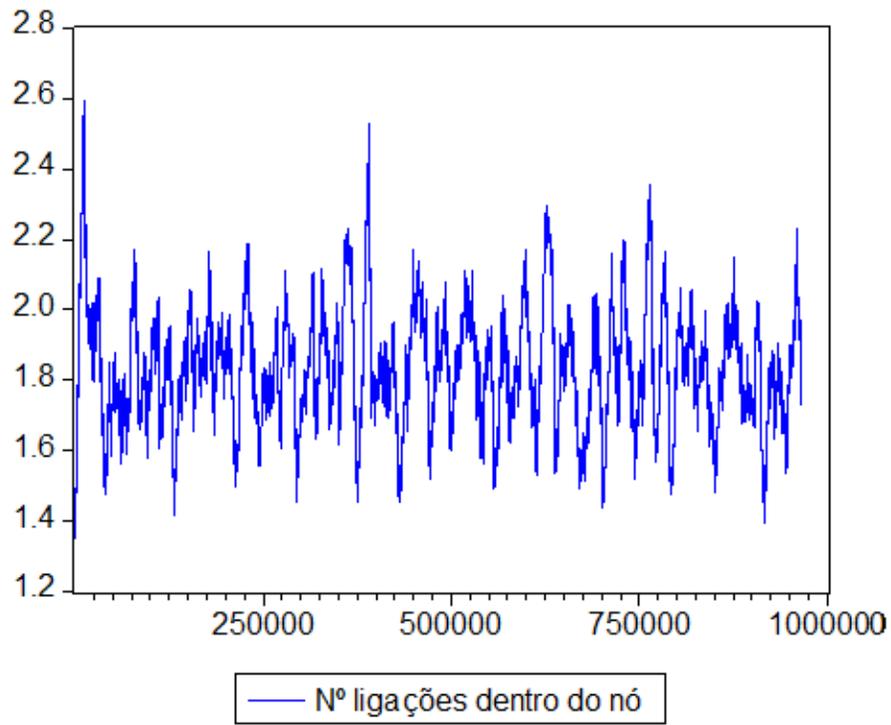
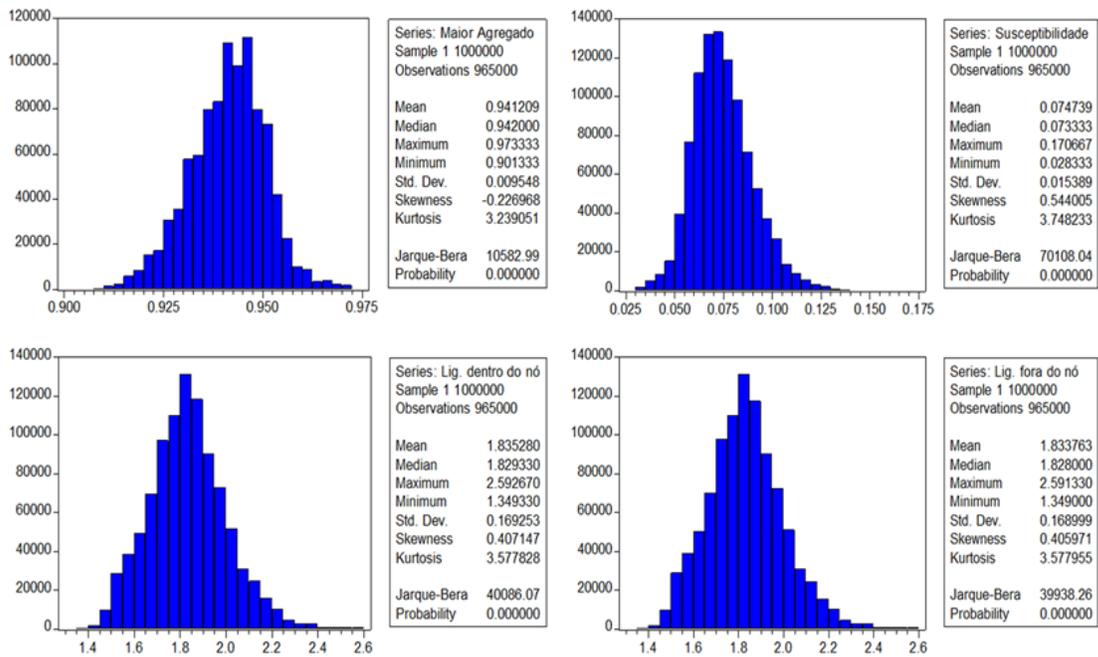
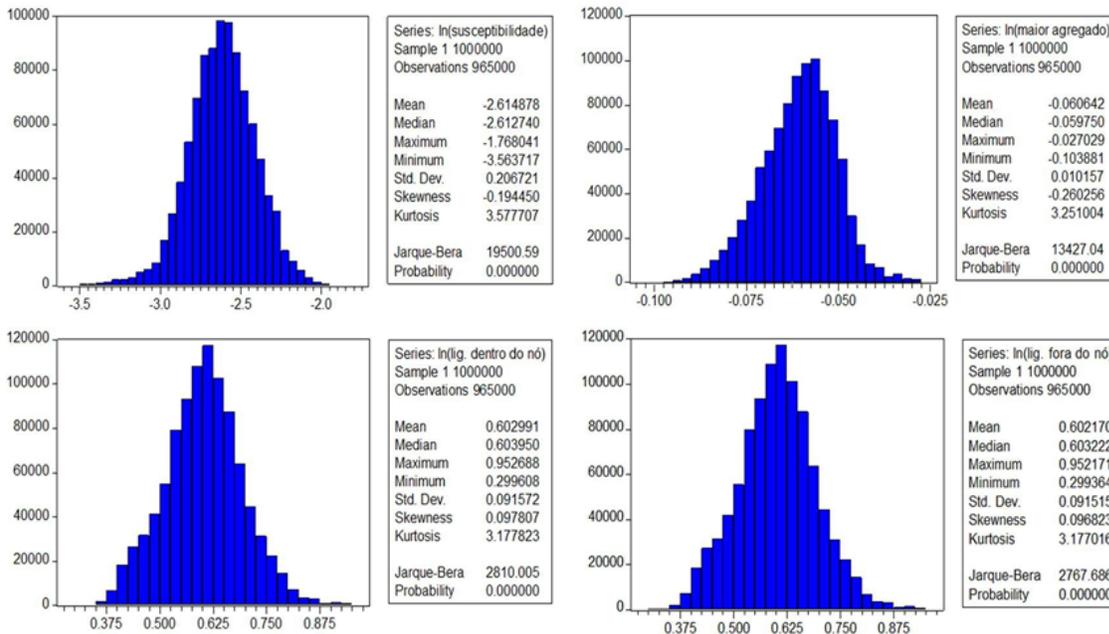


Figura A.3: Gráfico das séries: Nº ligações dentro e fora do nó.



a)



b)

Figura A.4: Distribuição: a) das séries observadas; b) do logaritmo das séries.