



Instituto Superior de Economia e Gestão

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

DESDE 1911

# MESTRADO EM MATEMÁTICA FINANCEIRA

## TRABALHO FINAL DE MESTRADO DISSERTAÇÃO

TEOREMA DO MERGULHO DE TAKENS:  
RECONSTRUÇÃO DO ESPAÇO DE FASES DE UM  
SISTEMA DINÂMICO USANDO SÉRIES TEMPORAIS

SARA BÁRBARA DUTRA LOPES

SETEMBRO - 2013



Instituto Superior de Economia e Gestão

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

DESDE 1911

# MESTRADO EM MATEMÁTICA FINANCEIRA

## TRABALHO FINAL DE MESTRADO DISSERTAÇÃO

TEOREMA DO MERGULHO DE TAKENS:  
RECONSTRUÇÃO DO ESPAÇO DE FASES DE UM  
SISTEMA DINÂMICO USANDO SÉRIES TEMPORAIS

SARA BÁRBARA DUTRA LOPES

ORIENTAÇÃO: JOÃO LOPES DIAS

SETEMBRO - 2013

*Mesmo não tendo todos os dados*

*devemos e podemos tentar reconstruir a verdade.*

## **Agradecimentos**

Ao Professor João Lopes Dias. A sua disponibilidade e ideias durante a preparação deste trabalho foram imprescindíveis.

À minha mãe – fonte contínua de inspiração na face de todas as adversidades – pelo amor, carinho, boa disposição e bons valores.

À minha irmã, cúmplice e amiga.

Ao Luís, que tanto me apoiou durante estes meses de trabalho.

Aos meus Professores de Matemática, que me serviram de inspiração e que tanto me ensinaram desde que entrei no ISEG.

A toda a equipa da Lusitania, pela sua compreensão e flexibilidade.

À Fundação Económicas - Fundação para o Desenvolvimento das Ciências Económicas, Financeiras e Empresariais pelo apoio que me deram no 2º ano de Mestrado e em especial à Ana Rita Santos pela sua compreensão.

A todos muito obrigada,

*Sara Lopes*

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Teorema de Takens</b>	<b>4</b>
2.1	O conjunto das funções de medição é aberto . . . . .	6
2.2	O conjunto das funções de medição é denso . . . . .	9
2.2.1	Mergulho de Pontos Periódicos . . . . .	10
2.2.2	Imersão de $M$ . . . . .	16
2.2.3	Mergulho de Segmentos de Órbita . . . . .	20
2.2.4	Mergulho de $M$ . . . . .	25
2.3	Conclusão da Demonstração do Teorema de Takens . . . . .	29
2.4	Extensão do Teorema de Takens . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Expoentes de Lyapunov</b>	<b>34</b>
<b>4</b>	<b>Implementação</b>	<b>35</b>
4.1	Método dos Falsos Vizinhos . . . . .	36
4.2	Decaimento da Função de Autocorrelação . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>37</b>
<b>6</b>	<b>Anexos</b>	<b>38</b>
6.1	Definições de Topologia Diferencial . . . . .	38
6.2	Sistemas Dinâmicos . . . . .	45
6.3	Resultados Necessários à Demonstração . . . . .	47
6.4	Mudança de Base e Matrizes Semelhantes . . . . .	50
6.5	Determinante da Matriz de Vandermonde . . . . .	51
	<b>Referências</b>	<b>53</b>

## 1 Introdução

Quando se pretende estudar em detalhe o comportamento de um sistema em muitas situações apenas se tem acesso à evolução no tempo de certas medições sobre as variáveis que compõem esse sistema. Se considerarmos que as observações destas medições podem ser representadas por uma série temporal e que esta representa a trajectória de um dado sistema dinâmico, torna-se então importante compreender que propriedades do sistema global conseguimos obter através da análise da série temporal.

Uma das técnicas de análise de séries temporais que tem como objectivo obter informações sobre variáveis não observáveis é a chamada *Reconstrução do Espaço de Fases* que tem por base princípios provados por Takens - *Teorema do Mergulho de Takens*-1981. Este teorema permite reconstruir um espaço de fases  $m$ -dimensional similar ao espaço de fases original a partir de medições de uma única variável e este espaço reconstruído apresenta uma suave variação de coordenadas em relação ao espaço original (preservando os invariantes geométricos do sistema, tais como os expoentes de Lyapunov).

Neste trabalho analisa-se em detalhe a demonstração do Teorema do Mergulho de Takens (*Takens Embedding Theorem*) e para isso é necessário ter presentes algumas definições de topologia diferencial e de sistemas dinâmicos inerentes à compreensão dos métodos utilizados. Essas definições, bem como alguns resultados a que se recorre ao longo da demonstração encontram-se nos Anexos.

Na secção 2 demonstra-se o Teorema do Mergulho de Takens seguindo [2] e estende-se o resultado provado num contexto mais geral. Na secção 3 estuda-se uma implicação do teorema relativamente aos expoentes de Lyapunov do sistema reconstruído através das medições do sistema original. Finalmente, na secção 4, apresentam-se algumas metodologias utilizadas na prática para obter informação útil sobre o sistema original através da reconstrução do espaço de fases.

## 2 Teorema de Takens

Denote-se por  $\text{Diff}^k(M)$  o conjunto dos difeomorfismos em  $M$  que são  $k$  vezes diferenciáveis e por  $C^k(M, \mathbb{R})$  o conjunto das funções  $C^k$  de  $M$  em  $\mathbb{R}$ . As restantes definições utilizadas no enunciado e na demonstração do Teorema de Takens podem ser encontradas nos Anexos.

**Teorema 1.** (*Teorema de Takens*) *Seja  $M$  uma variedade diferencial compacta de dimensão  $m$ . Para um par  $C^1$ -genérico  $(\phi, y)$  tal que  $\phi \in \text{Diff}^1(M)$ ,  $y \in C^1(M, \mathbb{R})$ , a aplicação*

$$\Phi_{(\phi, y)} : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$$

$$\Phi_{(\phi, y)}(x) = (y(x), y(\phi(x)), y(\phi^2(x)), \dots, y(\phi^{2m}(x)))$$

*é um mergulho.*

**Observação:** Uma vez que o conjunto  $\text{Diff}^2(M) \times C^2(M, \mathbb{R})$  é denso em  $\text{Diff}^1(M) \times C^1(M, \mathbb{R})$ , ver [1], na demonstração iremos considerar que o par  $(\phi, y)$  pertence a  $\text{Diff}^2(M) \times C^2(M, \mathbb{R})$  para provar o resultado enunciado no Teorema 1.

De uma forma simplificada o que o Teorema de Takens nos diz é que se tivermos um sistema dinâmico que depende de  $m$  variáveis, e se escolhermos uma função de medição para esse sistema e com essas medições construirmos os vectores:

$$(y(x), y(\phi(x)), y(\phi^2(x)), \dots, y(\phi^{2m}(x)))$$

$$(y(\phi(x)), y(\phi^2(x)), \dots, y(\phi^{2m+1}(x)))$$

⋮

podemos reproduzir a dinâmica do sistema original.

Este resultado é surpreendente uma vez que podemos simplesmente observar ao longo do tempo uma das variáveis do sistema e escolhendo adequadamente a dimensão dos vectores de reconstrução, conseguimos compreender a evolução do sistema de  $m$  variáveis, como ilustra a figura seguinte:

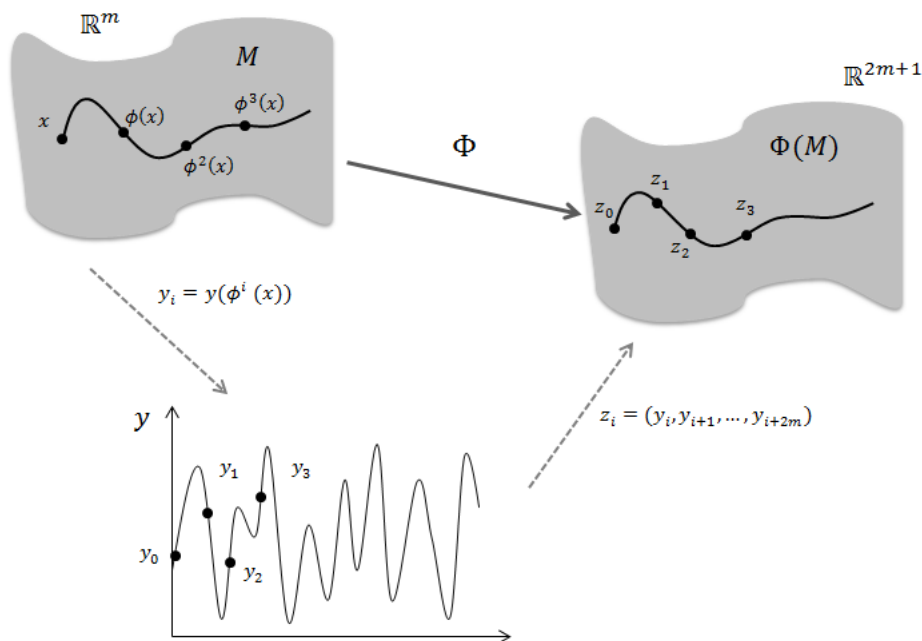


Figura 1: Teorema de Takens

O Teorema afirma ainda que o conjunto dos pares  $(\phi, y)$  que tornam a aplicação de *delay*  $\Phi_{(\phi, y)}$  um mergulho é um subconjunto genérico de  $\text{Diff}^1(M) \times C^1(M, \mathbb{R})$ . Na prática isto significa que, embora  $\Phi_{(\phi, y)}$  não seja um mergulho de  $M$  para todos os pares  $(\phi, y) \in \text{Diff}^1(M) \times C^1(M, \mathbb{R})$ , dado um par  $(\phi, y)$  para o qual a propriedade falhe podemos escolher um par  $(\phi', y')$  arbitrariamente próximo tal que  $\Phi_{(\phi', y')}$  seja um mergulho de  $M$  em  $\mathbb{R}^{2m+1}$ . Isto é, basta uma pequena perturbação ao par inicial para que a propriedade se verifique.

Note-se ainda que o teorema garante que temos um mergulho se a dimensão dos vectores de reconstrução for igual a  $2m + 1$ , mas podemos ter uma boa reprodução do sistema original se essa dimensão for inferior. Por exemplo, no caso do atractor de Lorenz, conseguimos reconstruir a dinâmica originada por 3 variáveis através de vectores de reconstrução de  $\mathbb{R}^3$  com observações de apenas uma das variáveis [9].

As figuras seguintes apresentam uma trajectória do sistema (à esquerda) e a reconstrução da trajectória utilizando apenas as observações da segunda coordenada (à direita).

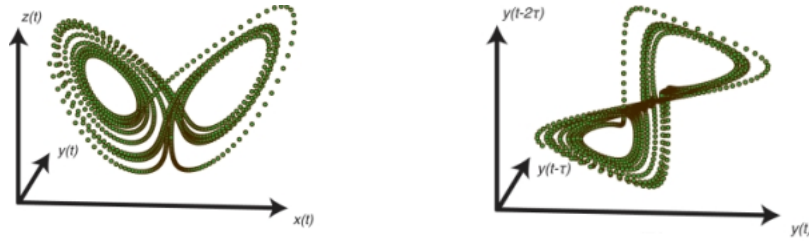


Figura 2: Atrator de Lorenz e Reconstrução (com  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$ ,  $\tau = 8$ ,  $\delta t = 0.01$ )

**Teorema 2.** (Teorema de Takens V2) *Seja  $M$  uma variedade diferencial compacta de dimensão  $m$  e  $\phi : M \rightarrow M$  um difeomorfismo  $C^2$  com as seguintes propriedades:*

1. *Existe um número finito de pontos periódicos de  $\phi$  com período menor ou igual a  $2m$ ,*
2. *Se  $x$  é um ponto periódico com período  $k \leq 2m$  então os valores próprios da derivada de  $\phi^k$  são todos distintos.*

Então para  $y \in C^2(M, \mathbb{R})$  genérico, a aplicação

$$\Phi_{(\phi, y)}(x) = (y(x), y(\phi(x)), y(\phi^2(x)), \dots, y(\phi^{2m}(x)))$$

é um mergulho.

Iremos primeiro demonstrar a versão 2 do teorema e após este estar estabelecido generalizamos os resultados por forma a obter a versão 1.

## 2.1 O conjunto das funções de medição é aberto

Pretendemos mostrar que o conjunto das funções de medição  $y$  que tornam a aplicação  $\Phi_{(\phi, y)}$  um mergulho de  $M$ , é um conjunto aberto.<sup>1</sup> Para isso começamos por demonstrar que a aplicação  $\mathcal{F}$ , definida por:

$$\mathcal{F} : C^2(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^2(M, \mathbb{R}^{2m+1})$$

$$\mathcal{F}(y) = \Phi_{(\phi, y)}(x) = (y(x), y(\phi(x)), y(\phi^2(x)), \dots, y(\phi^{2m}(x)))$$

é contínua.

---

<sup>1</sup>na topologia  $C^1$



**Proposição 3.** *A aplicação  $\mathcal{F}(y) = \Phi_{(\phi,y)} = (y, y \circ \phi, y \circ \phi^2, \dots, y \circ \phi^{2m})$  é contínua.*

*Demonstração.* Dividimos a demonstração em três lemas: primeiro mostramos que a aplicação  $y \mapsto y \circ \phi$  é contínua, de seguida mostra-se por indução que a aplicação  $y \mapsto y \circ \phi^n$  é contínua e finalmente concluímos que  $\mathcal{F}$  é contínua.

**Lema 1:** *A aplicação  $F_1 : C^2(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^2(M, \mathbb{R})$  definida por  $y \mapsto y \circ \phi$  é contínua.*

Seja  $\{(U_i, h_i), i \in \Lambda\}$  um bom atlas finito de  $M$  e seja  $W_i = h_i^{-1}B(1)$ . Pretendemos mostrar que existe uma vizinhança  $\mathcal{N}(\epsilon) = \bigcap_i \mathcal{N}^1(y, (U_i, h_i), (\mathbb{R}, id), \overline{W}_i, \epsilon)$  de  $y$  tal que se  $\hat{y} \in \mathcal{N}(\epsilon)$  então  $F_1(\hat{y}) \in \mathcal{N} = \bigcap_i \mathcal{N}^1(y \circ \phi, (U_i, h_i), (\mathbb{R}, id), \overline{W}_i, \epsilon')$ .

Os conjuntos  $\{W_i, i \in \Lambda\}$  formam uma cobertura de  $M$  e como  $\phi$  é um difeomorfismo, também os conjuntos  $\{\phi^{-1}W_i, i \in \Lambda\}$  e  $\{\phi^{-1}W_i \cap W_j, i, j \in \Lambda\}$  são coberturas de  $M$ .

Como as funções  $Dh_i \phi h_j^{-1} : \phi^{-1}\overline{W}_i \cap \overline{W}_j \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$  são contínuas, têm domínio compacto e são em número finito, existe uma constante  $A$  tal que  $\|Dh_i \phi h_j^{-1}\| < A$  para todo o  $i, j \in \Lambda$

Seja  $x \in \overline{W}_j$ , logo  $x \in \phi^{-1}\overline{W}_i \cap \overline{W}_j$  para algum  $i \in \Lambda$  e seja  $x' = \phi(x) \in \overline{W}_i$ , e escolha-se  $\epsilon < \min\{\epsilon', \frac{\epsilon'}{A}\}$ .

Então:

$$\begin{aligned} |\hat{y} \circ \phi h_j^{-1}(h_j x) - y \circ \phi h_j^{-1}(h_j x)| &= |\hat{y}(x') - y(x')| = \\ &= |\hat{y} \circ \phi h_i^{-1}(h_i x') - y \circ \phi h_i^{-1}(h_i x')| < \epsilon < \epsilon' \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|D\hat{y} \circ \phi h_j^{-1}(h_j x) - Dy \circ \phi h_j^{-1}(h_j x)\| &= \|D\hat{y} h_i^{-1} h_i \phi h_j^{-1}(h_j x) - Dy h_i^{-1} h_i \phi h_j^{-1}(h_j x)\| = \\ &= \|D\hat{y} h_i^{-1}(h_i x') Dh_i \phi h_j^{-1}(h_j x) - Dy h_i^{-1}(h_i x') Dh_i \phi h_j^{-1}(h_j x)\| \\ &< \|D\hat{y} h_i^{-1}(h_i x') - Dy h_i^{-1}(h_i x')\| \|Dh_i \phi h_j^{-1}(h_j x)\| < \epsilon A < \epsilon' \end{aligned}$$

Logo  $\hat{y} \circ \phi(x) \in \mathcal{N}$  e portanto  $F_1$  é contínua.

**Lema 2:** *A aplicação  $F_n : C^2(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^2(M, \mathbb{R})$  definida por  $(y, \phi) \mapsto y \circ \phi^n$  : é contínua.*

Sabemos que é verdade para  $n = 1$  e pretendemos mostrar que se  $y \circ \phi^{n-1}$  é contínua então  $y \circ \phi^n$  é contínua. Temos  $y \circ \phi^n = (y \circ \phi^{n-1}) \circ \phi$  que é, por hipótese,

uma composição de aplicações contínuas e por isso é uma aplicação contínua.

**Lema 3:** A aplicação  $\mathcal{F}(y) = \Phi_{(\phi, y)} = (y, y \circ \phi, y \circ \phi^2, \dots, y \circ \phi^{2m})$  é contínua.

Escrevendo  $\mathcal{F} = T \circ F$  onde  $F = (F_0, F_1, \dots, F_{2m})$  e

$T : [C^2(M, \mathbb{R})]^{2m+1} \rightarrow C^2(M, \mathbb{R}^{2m+1})$  é a aplicação que transforma o conjunto de  $2m+1$  funções reais no vector de dimensão  $2m+1$  cujas componentes são as funções reais.

Pelo lema anterior sabemos que  $F$  é contínua; logo, apenas temos de mostrar que  $T$  é uma aplicação contínua, o que faremos demonstrando que para cada conjunto de funções  $(f_0, f_1, \dots, f_{2m})$  em  $[C^2(M, \mathbb{R})]^{2m+1}$ , para toda a vizinhança  $\mathcal{N}$  de  $T(f_0, f_1, \dots, f_{2m}) = f$  existe uma vizinhança  $\mathcal{N}(\epsilon)$  de  $(f_0, f_1, \dots, f_{2m})$  tal que  $T\mathcal{N}(\epsilon) \subset \mathcal{N}$ .

Seja  $\{(U_i, h_i), i \in \Lambda\}$  um bom atlas finito de  $M$ ,  $W_i = h_i^{-1}B(1)$ . Dada qualquer vizinhança  $\mathcal{N}$  em  $C^2(M, \mathbb{R}^{2m+1})$  de  $f$  existe uma vizinhança da forma

$$\bigcap_i \mathcal{N}^1(f, (U_i, h_i), (\mathbb{R}^{2m+1}, id), \overline{W}_i, \epsilon')$$

Tome-se  $\epsilon < \frac{\epsilon'}{2m+1}$  e defina-se  $\mathcal{N}(\epsilon) = \bigotimes_{j=1}^{2m} \bigcap_i \mathcal{N}^1(f_j, (U_i, h_i), (\mathbb{R}, id), \overline{W}_i, \epsilon)$  e seja  $(\widehat{f}_0, \widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_{2m}) \in \mathcal{N}(\epsilon)$ ,  $\widehat{f} = T(\widehat{f}_0, \widehat{f}_1, \dots, \widehat{f}_{2m})$  e  $x \in \overline{W}_i$ .

Então:

$$|\widehat{f}h_i^{-1}(h_i x) - fh_i^{-1}(h_i x)| \leq \sum_{j=0}^{2m} |\widehat{f}_j h_i^{-1}(h_i(x)) - f_j h_i^{-1}(h_i(x))| < \sum_{j=0}^{2m} \epsilon = (2m+1)\epsilon < \epsilon'$$

e ainda

$$\|D\widehat{f}h_i^{-1}(h_i(x)) - Dfh_i^{-1}(h_i(x))\| \leq \sum_{j=0}^{2m} \|D\widehat{f}_j h_i^{-1}(h_i(x)) - Df_j h_i^{-1}(h_i(x))\| < \sum_{j=0}^{2m} \epsilon < \epsilon'$$

Logo  $\widehat{f} \in \mathcal{N}$  e  $T$  é contínua. □

Considere-se agora o conjunto  $S$  das aplicações  $C^2$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$  que são mergulhos de  $M$ . Este conjunto é aberto em  $C^2(M, \mathbb{R}^{2m+1})$  [3], logo como  $\mathcal{F}$  é contínua obtemos o resultado pretendido:  $\mathcal{F}^{-1}(S) = \{y \in C^2(M, \mathbb{R}) : \mathcal{F}(y) \in S\}$  é um conjunto aberto.

## 2.2 O conjunto das funções de medição é denso

Para mostrar que o conjunto de funções de medição  $y$  que tornam  $\Phi_{(\phi, y)}$  um mergulho é denso temos de mostrar que para cada  $y \in C^2(M, \mathbb{R})$  qualquer vizinhança de  $y$  contém uma função  $y'$  para a qual a aplicação de *delay* é um mergulho. Para isso é suficiente encontrar um bom atlas de  $M$  e mostrar que para qualquer  $\epsilon$  se tem  $y' \in \bigcap_i \mathcal{N}^1(y, (U_i, h_i), (\mathbb{R}, id), \overline{W}_i, \epsilon)$  com  $y' \in C^2(M, \mathbb{R})$  e tal que  $\Phi_{(\phi, y')}$  é um mergulho de  $M$ .

Iremos construir explicitamente um  $y'$  adequado somando funções a  $y$ :

$$y' = y + \sum_{j=1}^N a_j \psi_j \quad (2.1)$$

onde  $N$  é finito,  $a_j \in \mathbb{R}$  e  $\psi_j : M \rightarrow \mathbb{R}$  funções  $C^\infty$ . Ajustaremos  $y'$  várias vezes por forma a dotar, a cada ajustamento,  $y'$  com alguma propriedade desejada. Temos naturalmente de garantir que cada um dos ajustamentos é possível e que à medida que dotamos  $y'$  de novas propriedades conseguimos preservar as propriedades anteriores.

**Lema 4.** *Seja  $y \in C^2(M, \mathbb{R})$  e  $\psi_j : M \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, N$  funções  $C^\infty$ , com  $N$  finito. Seja  $a = (a_1, \dots, a_N)^T \in \mathbb{R}^N$ . Para cada vizinhança  $\mathcal{N}$  de  $y$  existe algum  $\delta > 0$  tal que se  $\|a\| < \delta$  a função definida por*

$$y' = y + \sum_{j=1}^N a_j \psi_j$$

*pertence a  $\mathcal{N}$ .*

*Demonstração.* Seja  $\{(U_i, h_i), i \in \Lambda\}$  um bom atlas finito de  $M$  e seja

$\bigcap_i \mathcal{N}^1(y, (U_i, h_i), (\mathbb{R}, id), \overline{W}_i, \epsilon) \subset \mathcal{N}$ . Para cada  $j, 1 \leq j \leq N$  e  $i \in \Lambda$  a função  $\psi_j : \overline{W}_i \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua com domínio compacto e por isso existe uma constante  $B$  tal que  $|\psi_j| < B$ .

Temos assim :

$$|y' h_i^{-1}(h_i x) - y h_i^{-1}(h_i x)| = \left| \sum_{j=1}^N a_j \psi_j h_i^{-1}(h_i x) \right| \leq \sum_{j=1}^N |a_j| |\psi_j(x)| \leq B \sum_{j=1}^N |a_j|$$

De forma análoga como  $D\psi_j h_i^{-1}$  são funções contínuas podemos utilizar os mes-

mos argumentos e obter:

$$\|Dy'h_i^{-1}(h_i x) - Dyh_i^{-1}(h_i x)\| \leq B' \sum_{j=1}^N |a_j|$$

E assim podemos concluir que se  $\|a\| < \delta$  então  $y' \in \mathcal{N}$ .  $\square$

Pretendemos agora construir funções de medição  $y'$  da forma (2.1) que originam aplicações de *delay* que são mergulhos de  $M$  fazendo sucessivas alterações a  $y'$  que a dotam de propriedades que se verificam em partes de  $M$  sucessivamente maiores.

### 2.2.1 Mergulho de Pontos Periódicos

Seja  $\mathcal{P}_{2m}$  o conjunto dos pontos periódicos de  $\phi$  com período menor ou igual a  $2m$ . Quando tentamos mergulhar  $M$  em  $\mathbb{R}^{2m+1}$  através de uma aplicação de *delay* os pontos periódicos com período menor ou igual a  $2m$  criam problemas pois para estes pontos as coordenadas das suas imagens por  $\Phi_{(\phi,y)}$  serão iguais. Em particular, para pontos fixos de  $\phi$  todas as coordenadas são iguais e portanto  $\Phi$  não será um mergulho. Por exemplo, se  $\phi$  for a identidade, isto é,  $\phi(x) = x$  então  $\Phi_{(\phi,y)}(x) = (y(x), y(x), \dots, y(x))$  e portanto  $\Phi_{(\phi,y)}$  não será um mergulho de  $M$  qualquer que seja a função de medição escolhida.

Impõe-se no Teorema 2 que o número de pontos periódicos de  $\phi$  com período menor ou igual a  $2m$  seja finito, *i.e.*, que  $\mathcal{P}_{2m}$  é um conjunto finito e assim temos que para qualquer ponto  $x_i \in \mathcal{P}_{2m}$  existe uma sua vizinhança que não contém nenhum outro ponto de  $\mathcal{P}_{2m}$ .

Por forma a garantir que nenhum destes pontos periódicos tem a mesma imagem, isto é, que  $\Phi$  seja uma função injectiva em  $\mathcal{P}_{2m}$ , temos de ajustar  $y$  de forma a que tome valores diferentes para diferentes pontos e fazemos esse ajustamento utilizando funções *bump* :

Sejam  $x_1, x_2 \in \mathcal{P}_{2m}$  para os quais  $y$  toma o mesmo valor e sejam  $(U_i, h_i)$  as cartas que contêm  $x_1$  com  $h_1 x_1$  o centro de  $B(3)$  e defina-se a função  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\psi(x) = \begin{cases} \lambda(h_1x) & \text{para } x \in h_1^{-1}B(3) \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

onde  $\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função *bump* com suporte em  $B(3)$  e igual a 1 em  $B(1)$ .

Logo se definirmos  $y' = y + a\psi$  com  $a \in \mathbb{R}$  temos que  $y'(x_1) \neq y'(x_2)$  (diferem por  $a$ ).

Utilizando o mesmo tipo de argumentos podemos tratar o caso em que mais do que dois  $x'_i$ s têm a mesma imagem (nesta situação teríamos de fazer mais do que uma alteração), e desta forma conseguimos encontrar uma função de medição  $y$  injectiva em  $\mathcal{P}_{2m}$  o que implica que para  $y$  genérico,  $\Phi_{(\phi,y)}$  é injectiva quando restringida a  $P_{2m}$ .

Pretendemos agora mostrar que  $\Phi_{(\phi,y)}$  é uma imersão em  $P_{2m}$  e para isso temos de garantir que  $D\Phi_{(\phi,y)}h_i^{-1}(h_ix_i)$  tem *full rank* em todo o  $x_i \in P_{2m}$ .

Considerem-se primeiro os pontos fixos de  $\phi$ :

**Imersão dos Pontos Fixos:** Seja  $x_1$  um ponto fixo de  $\phi$  então a  $k$ -ésima coluna da matriz  $D\Phi_{(\phi,y)}h_1^{-1}(h_1x_1)$  é:

$$Dy\phi^{k-1}h_1^{-1}(h_1x_1) = Dyh_1^{-1}(h_1x)Dh_1\phi^{k-1}h_1^{-1}(h_1x_1)$$

e se escrevermos  $v = Dyh_1^{-1}(h_1x)$  e  $J = Dh_1\phi h_1^{-1}(h_1x_1)$  obtemos:

$$Dy\phi^{k-1}h_1^{-1}(h_1x_1) = vJ^{k-1}$$

Pretendemos então mostrar que o conjunto  $\{v, vJ, vJ^2, \dots, vJ^{2m}\}$  contém  $m$  vectores linearmente independentes e como por hipótese  $J$  tem  $m$  valores próprios distintos  $\lambda_j$  com  $j = 1, \dots, m$  e conseqüentemente  $m$  vectores próprios linearmente independentes  $e_j$  com  $j = 1, \dots, m$ . Expressando o vector  $v$  como uma combinação linear dos vectores próprios de  $J$ , i.e.,  $v = \sum_j \alpha_j e_j$  logo para cada  $j$  temos:  $e_j J = \lambda_j e_j$  logo se  $v = \sum_j \alpha_j e_j$  então :  $vJ = \sum_j \alpha_j e_j J = \sum_j \alpha_j \lambda_j e_j$ .

Na base  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  os vectores  $\{v, vJ, vJ^2, \dots, vJ^{2m}\}$  podem ser representados pela matriz seguinte:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \alpha_1 \lambda_1 & \alpha_2 \lambda_2 & \cdots & \alpha_m \lambda_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 \lambda_1^{2m} & \alpha_2 \lambda_2^{2m} & \cdots & \alpha_m \lambda_m^{2m} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Se considerarmos apenas as primeiras  $m$  linhas da matriz anterior temos que a característica dessa matriz será igual  $m$  se e só se o seu determinante for não nulo. Uma vez que o determinante pode ser visto como uma função polinomial dos coeficientes da matriz em  $\mathbb{R}$  isto é:  $\det : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  então, ou a função é identicamente igual a zero ou os seus zeros formam um conjunto finito.

Por forma a mostrar que o determinante não é identicamente igual a zero podemos escolher  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = (1, 1, \dots, 1)$  e obter assim uma matriz de Vandermonde (que tem *full rank*).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{2m} & \lambda_2^{2m} & \cdots & \lambda_m^{2m} \end{bmatrix}$$

Note-se que a matriz quadrada que se obtêm ao escolher as primeiras  $m$  linhas da matriz (2.2) e a que é obtida escolhendo as  $m$  primeiras linhas de  $D\Phi_{(\phi,y)} h_1^{-1}(h_1 x_1)$  são matrizes semelhantes, o que implica que têm a mesma característica.

Desta forma mostrou-se que o conjunto de vectores  $v$  para os quais a derivada de  $\Phi_{(\phi,y)}$  tem *full rank* é aberto e denso em  $\mathbb{R}^m$  e podemos encontrar  $v'$  tal que a diferença  $a = v' - v$  tem norma arbitrariamente pequena e o conjunto  $\{v', v' J^2, \dots, v' J^{2m}\}$  forma uma base de  $\mathbb{R}^n$ .

Suponha-se agora que  $y$  é uma função de medição para a qual  $\Phi_{(\phi,y)}$  não é imersiva

em  $x_1$ . Se definirmos as funções  $C^\infty$   $\psi_j : M \rightarrow \mathbb{R}$   $1 \leq j \leq m$  como

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \mu_i(x)\lambda(h_1x) & \text{para } x \in h_1^{-1}B_1 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

onde  $\mu_i : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$  é a  $i$ -ésima função coordenada de  $h_1$  e

$$y'(x) = y(x) + \sum_{i=1}^m a_i \psi_i(x)$$

então temos  $Dy'h_1^{-1}(h_1x) = Dyh_1^{-1}(h_1x) + a$  uma vez que  $\frac{\partial \psi_i}{\partial u_k}(u) = \delta_{i,k}$  com  $u = h_1x$  e  $u_k$  é a  $k$ -ésima coordenada de  $u$ .

Escolhendo  $a$  com norma arbitrariamente pequena então conseguimos encontrar  $y'$  numa vizinhança de  $y$  tal que  $\{Dy'h_1^{-1}(h_1x)J^k, k = 1, \dots, 2m\}$  forma uma base de  $\mathbb{R}^n$  e tal que  $\Phi_{(\phi, y')}$  é uma imersão de  $x_1$ . Uma vez que o número de pontos fixos de  $\phi$  é finito, então precisamos apenas de um número finito de ajustamentos a  $y$  por forma a garantir que temos uma imersão de todos os pontos fixos.

**Imersão dos Pontos Periódicos:** Considerem-se agora  $x_1$  e  $x_2$  pontos periódicos tais que  $\phi(x_1) = x_2$  e  $\phi(x_2) = x_1$ . Como  $x_1 \neq x_2$  podemos encontrar conjuntos abertos disjuntos que contêm  $x_1$  e  $x_2$  homeomórficos a bolas abertas  $B_1$  e  $B_2$  centradas em  $h_1(x_1)$  e  $h_2(x_2)$ .

Analise-se a questão de imersividade em  $x_1$ , isto é, o *rank* de  $D\Phi_{(\phi, y)}h_1^{-1}(h_1x_1)$ , cuja  $2i + 1$ -ésima coluna é igual a :

$$Dy\phi^{2i}h_1^{-1}(h_1x_1) = Dyh_1^{-1}h_1\phi^{2i}h_1^{-1}(h_1x_1) = Dyh_1^{-1}(h_1x_1)Dh_1\phi^{2i}h_1^{-1}(h_1x_1) = vJ^i$$

e a  $2i$ -ésima coluna é:

$$Dy\phi^{2i-1}h_1^{-1}(h_1x_1) = Dy\phi^{2i}\phi^{-1}h_1^{-1}(h_1x_1) = Dy\phi^{-1}h_1^{-1}(h_1x_1)Dh_1\phi^{2i}h_1^{-1}(h_1x_1) = wJ^i$$

pois  $x_1 = \phi^{2i}(x_1)$  e onde se define  $J^i = Dh_1\phi^{2i}h_1^{-1}(h_1x_1)$ ,  $v = Dyh_1^{-1}(h_1x_1)$  e  $w = Dy\phi^{-1}h_1^{-1}(h_1x_1)$ .

Queremos agora averiguar se  $\{v, wJ, vJ, wJ^2, \dots, wJ^m, vJ^m\}$  contém  $m$  vectores linearmente independentes e tal como anteriormente se escrevermos  $v$  e  $w$  em termos

dos vectores próprios de  $J$  temos:

$$v = \sum_j \alpha_j e_j \text{ e } w = \sum_j \beta_j e_j \text{ e podemos escrever } vJ^k = \sum_j \alpha_j \lambda_j^{2k} e_j \text{ e } wJ^k = \sum_j \beta_j \lambda_j^{2k} e_j$$

Nesta base  $D\Phi_{(\phi,y)} h_1^{-1}(h_1 x)$  toma a forma:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 \lambda_1 & \beta_2 \lambda_2 & \cdots & \beta_m \lambda_m \\ \alpha_1 \lambda_1 & \alpha_2 \lambda_2 & \cdots & \alpha_m \lambda_m \\ \vdots & & & \vdots \\ \beta_1 \lambda_1 & \beta_2 \lambda_2 & \cdots & \beta_m \lambda_m \\ \alpha_1 \lambda_1^m & \alpha_2 \lambda_2^m & \cdots & \alpha_m \lambda_m^m \end{bmatrix}$$

e se rearranjarmos as colunas podemos ter:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \alpha_1 \lambda_1 & \alpha_2 \lambda_2 & \cdots & \alpha_m \lambda_m \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1 \lambda_1^m & \alpha_2 \lambda_2^m & \cdots & \alpha_m \lambda_m^m \\ \beta_1 \lambda_1 & \beta_2 \lambda_2 & \cdots & \beta_m \lambda_m \\ \vdots & & & \vdots \\ \beta_1 \lambda_1^m & \beta_2 \lambda_2^m & \cdots & \beta_m \lambda_m^m \end{bmatrix}$$

Se agora eliminarmos as últimas linhas obtendo uma matriz quadrada, se as primeiras  $m$  linhas forem linearmente independentes, então o determinante da matriz  $m \times m$  será diferente de 0.

Se escolhermos :  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = (1, 1, \dots, 1, \beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_m^*)$ , com  $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_m^*$  fixos obtemos uma matriz de Vandermonde que já sabemos não ter determinante igual a zero.

Assim o conjunto de pares  $(v, w)$  para os quais a derivada tem *full rank* é aberto e denso em  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  e podemos encontrar  $v'$  e  $w'$  tais que  $\|(v, w) - (v', w')\|$  é



arbitrariamente pequena e que o conjunto  $\{v', w', v'J^2, w'J^2, \dots, v'J^m, w'J^m\}$  forma uma base de  $\mathbb{R}^m$ .

Suponha-se agora que  $y$  é uma função de medição para a qual  $\Phi_{(\phi, y)}$  não é imersiva em  $x_1$ . Podemos definir  $\Psi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\chi_i : M \rightarrow \mathbb{R} \ 1 \leq i \leq m$  como :

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} \mu_{1,i}(x)\lambda(h_1x) & \text{para } x \in h_1^{-1}B_1 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

$$\text{e } \chi_i(x) = \begin{cases} \mu_{2,i}(x)\lambda(h_2x) & \text{para } x \in h_2^{-1}B_2 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

onde  $\mu_{k,i}$  é a  $i$ -ésima função coordenada de  $h_k$ ,  $k = 1, 2$  e

$$y'(x) = y(x) + \sum_{i=1}^m a_i \Psi_i(x) + \sum_{i=1}^m b_i \chi_i(x)$$

Pretendemos agora mostrar que existem vectores  $a$  e  $b$  com norma arbitrariamente pequena tal que  $\Phi_{(\phi, y')}$  é imersiva em  $x_1$ .<sup>2</sup>

Temos  $Dy'h_1^{-1}(h_1x_1) = Dyh_1^{-1}(h_1x_1) + a = v + a$  então escolhemos  $a = v - v'$  e  $Dy'\phi^{-1}h_1^{-1}(h_1x_1) = Dy'h_2^{-1}(h_2x_2)Dh_2\phi^{-1}h_1^{-1}(h_1x_1) = (Dyh_2^{-1}(h_2x_2) + b)A = w + bA$  onde  $A = Dh_2\phi^{-1}h_1^{-1}(h_1x_1)$  é uma matriz invertível (pois  $\phi$  é um difeomorfismo) e podemos escolher:  $b = (w' - w)A^{-1}$ .

Estas escolhas para  $a$  e  $b$  tornam  $\Phi_{(\phi, y')}$  uma imersão em  $x_1$  e uma vez que podemos escolher a norma de  $(v - v', w - w')$  arbitrariamente pequena, também as normas de  $a$  e  $b$  serão arbitrariamente pequenas.

Estes argumentos podem ser estendidos por forma a cobrir todos os pontos periódicos de  $\phi$  com período menor ou igual a  $2m$ , *i.e.*, para ao fazer uma sequência de ajustamentos a  $y$  podemos construir uma função de medição  $y'$  tal que  $\Phi_{(\phi, y')}$  seja uma imersão em todos os pontos em  $P_{2m}$ .

<sup>2</sup>Note-se que como  $B_1$  e  $B_2$  são disjuntos então não existe nenhum ponto  $x$  tal que  $\Psi_i(x)$  e  $\chi_j(x)$  sejam simultaneamente não nulos.

**Imersão numa Vizinhança Compacta de  $\mathcal{P}_{2m}$**  Uma vez que  $\Phi_{(\phi, y')}$  é uma imersão de  $\mathcal{P}_{2m}$  pelo Teorema 22, conseguimos encontrar uma bola de raio  $r_i$  e centro em  $x_i$   $b_i(r_i, x_i)$  de cada ponto  $x \in \mathcal{P}_{2m}$  tal que  $\Phi_{(\phi, y')}$  seja um mergulho dessa vizinhança de  $x_i$ .

$\Phi_{(\phi, y)}$  é uma imersão na união destas bolas e é injectiva em cada  $b_i(r_i, x_i)$  mas podemos ter  $\Phi_{(\phi, y)}(b_i(r_i, x_i)) \cap \Phi_{(\phi, y)}(b_j(r_j, x_j)) \neq \emptyset$  com  $i \neq j$ . No entanto, como  $\Phi_{(\phi, y)}$  é contínua, se tomarmos raios mais pequenos,  $\bar{r}_i$ , podemos encontrar bolas mais pequenas cujas imagens não se intersectem e assim  $\Phi_{(\phi, y)}$  será uma imersão injectiva na união destas bolas mais pequenas.

Considerem-se agora bolas fechadas  $b_i$ , de centro em  $x \in \mathcal{P}_{2m}$  raio  $\frac{\bar{r}_i}{2}$  (tal que  $b_i$  é um subconjunto das bolas abertas mais pequenas referidas no último parágrafo) e seja  $\mathcal{V}_y = \bigcup_i b_i$  que é um conjunto fechado e por isso é uma vizinhança compacta de  $\mathcal{P}_{2m}$  então podemos concluir assim que  $\Phi_{(\phi, y')}$  é uma imersão injectiva deste conjunto compacto.

### 2.2.2 Imersão de $M$

O próximo passo da demonstração consiste em mostrar que em qualquer vizinhança de  $y$ , denote-se por  $\mathcal{U}_y$ , podemos encontrar uma outra função de medição que dá origem a uma imersão de toda a variedade  $M$ .

A estratégia é a seguinte: começamos por cobrir  $M$  com conjuntos compactos e mostrar que fazendo alterações arbitrariamente pequenas na função de medição, podemos produzir um *delay* map que é uma imersão num destes conjuntos. Fazendo um número finito de perturbações conseguimos imergir todos os outros conjuntos compactos (que são em número finito pois  $M$  é compacta).

**Construção de um atlas adequado** Tome-se um atlas arbitrário de  $M$ . Uma vez que todos os pontos em  $\mathcal{P}_{2m}$  se encontram num domínio de uma carta podemos escolher outro domínio  $U'_i$  tal que:  $U'_i = U_i \cap b_i$  e ajustando o sistema de coordenadas (e tomando se necessário um domínio maior) conseguimos encontrar uma carta

$(U_i, h_i)$  com  $U_i \subset b_i$  e  $U_i = h_i^{-1}B(3)$ . Podemos encontrar uma destas para cada  $x_i \in P_{2m}$  e cujos domínios das cartas são disjuntos. Se tomarmos  $W_i = h_i^{-1}B(i)$  então  $\{W_i : x_i \in P_{2m}\}$  é uma cobertura aberta de  $P_{2m}$ .

**Construção da Cobertura Compacta de  $M$**  Considere-se agora o complementar de  $P_{2m}$ ,  $P_{2m}^C$  que é um conjunto aberto. Para cada elemento deste conjunto, os pontos  $\{x, \phi(x), \dots, \phi^{2m}(x)\}$  são todos distintos. Logo podemos encontrar um conjunto aberto  $U_x \subset P_{2m}^C$  que contém  $x$  tal que os conjuntos  $\{U_x, \phi U_x, \dots, \phi^{2m}U_x\}$  são disjuntos. Podemos tomar  $U_x$  como sendo um domínio de uma carta e encontrar um sistema de coordenadas  $(U_x, h_x)$  com  $U_x = h_x^{-1}B(3)$ .

Finalmente temos uma cobertura aberta de  $M$ :  $\{W_x = h_x^{-1}B(1) : x \in P_{2m}^C\} \cup \{W_i : x_i \in P_{2m}\}$  e desta extraímos uma subcobertura finita (que contém todos os conjuntos de  $\{W_i : x_i \in P_{2m}\}$ ).

Sejam  $W_i$ ,  $1 \leq i \leq k$  os conjuntos que contêm os pontos periódicos e  $W_i$ ,  $k < i \leq l$  os conjuntos contidos em  $P_{2m}^C$ . Por construção,  $\Phi_{(\phi, y)}$  é um mergulho do conjunto compacto  $\bigcup_{i=1}^k \overline{W}_i$ . Falta-nos portanto ajustar a função de medição de forma a que seja uma imersão nos restantes  $\overline{W}_i$ 's.

**Imersão dos Conjuntos Compactos** Seja  $i$  o menor índice maior que  $k$  para o qual  $\Phi_{(\phi, y)}$  falha em ser uma imersão de  $W_i$ . Seja  $x$  um elemento de  $U_i$  e sejam  $\mu_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$  as funções coordenadas de  $h_i$ , i.e.,  $h_i x = (\mu_1 x, \dots, \mu_m x)$  e seja  $u = h_1 x$  e  $u_j = \mu_j x$ .

Então a matriz Jacobinana de  $\Phi_{(\phi, y)}$  em  $h_i x$  é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y h_i^{-1}(u)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial y h_i^{-1}(u)}{\partial u_m} \\ \frac{\partial y \phi h_i^{-1}(u)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial y \phi h_i^{-1}(u)}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y \phi^{2m} h_i^{-1}(u)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial y \phi^{2m} h_i^{-1}(u)}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

Para algum  $u \in h_i \overline{W}_i (= B(1))$  esta matriz não tem *full rank*: temos de a tornar *full rank* através de perturbações em  $y$ . Em cada uma das alterações modificamos uma e apenas uma coluna da matriz tornando-a linearmente independente das colunas à sua esquerda. Ao fim de um máximo de  $m$  alterações obtemos uma matriz com *full rank*.

Suponha-se que as primeiras  $s$  colunas de  $D\Phi_{(\phi,y)}$  são linearmente independentes para todo o  $u \in \overline{B}(1)$ . Defina-se como habitualmente  $\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  uma função *bump* igual a 1 em  $\overline{B}(1)$  com suporte em  $B(2)$ . Defina-se também  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\psi(x) = \begin{cases} \mu_{s+1}(x)\lambda(h_i(x)) & \text{se } x \in U_i \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

então  $\psi(x) = \mu_{s+1}(x)$  se  $x \in \overline{W}_i$ ,  $\psi$  tem suporte em  $U_i$  e  $\psi \circ \phi^{-j}$  tem suporte em  $\phi^j U_i$ .

Defina-se agora  $\psi_j : M \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\psi_j = \psi \circ \phi^{-j}$  para  $0 \leq j \leq 2m$ . Os  $\psi_j$ 's têm suportes disjuntos.

Construimos a função de medição  $y' = y + \sum_{j=0}^{2m} a_{j+1} \psi_j$

Desta forma, para  $u \in h_i \overline{W}_i$ ,  $\phi^k h_i^{-1}(u) \in \phi^k U_i$  temos que,

$$\begin{aligned} y' \phi^k h_i^{-1}(u) &= y \phi^k h_i^{-1}(u) + a_{k+1} \psi(\phi^{-k} h_i^{-1}(u)) = y \phi^k h_i^{-1}(u) + a_{k+1} \mu_{s+1}(h_i^{-1}(u)) = \\ &= y \phi^k h_i^{-1}(u) + a_{k+1} u_{s+1} \end{aligned}$$

$$\text{e portanto } \frac{\partial y' \phi^k h_i^{-1}}{\partial u_{s+1}}(u) = \frac{\partial y \phi^k h_i^{-1}}{\partial u_{s+1}}(u) + a_{k+1}.$$

Uma vez que sabemos como ajustar a  $s + 1$ -ésima coluna da matriz Jacobiana pretendemos saber como é que através de uma perturbação arbitrariamente pequena a tornamos linearmente independente das  $s$  colunas à sua esquerda.

**Lema 5.** *Seja  $M_{n \times m}$  o espaço das matrizes com  $n$  linhas e  $m$  colunas. O conjunto das matrizes  $(m \times n)$  com *full rank* é aberto em  $M_{n \times m}$ .*

Seja  $J_s(x)$  a matriz formada pelas primeiras  $s$  colunas de  $D\Phi_{(\phi,y)}$  em  $x \in U_i$ . Então, por hipótese, para  $x \in \overline{W}_i$ ,  $J_s(x)$  tem *full rank*. Note-se que  $J_s$  é uma função

contínua de  $U_i$  para o espaço das matrizes de dimensão  $(2m+1) \times s$  então pelo Lema 5 existe um conjunto aberto  $X \subset U_i$ , com  $W_i \subset X$  tal que para todos os pontos em  $X$  as primeiras  $s$  colunas da matriz  $D\Phi_{(\phi,y)}$  são linearmente independentes.

Denote-se a coluna  $s$  da matriz Jacobiana de  $\Phi_{(\phi,y)}$  por  $[D\Phi_{(\phi,y)}]^s$  e defina-se agora a função  $\mathcal{S} : \mathbb{R}^s \times X \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s, x) \rightarrow \sum_{j=1}^s \lambda_j [D\Phi_{(\phi,y)}]^j - [D\Phi_{(\phi,y)}]^{s+1}$$

com  $s \leq m$  de forma a que  $\mathbb{R}^s \times X$  tenha dimensão inferior a  $\mathbb{R}^{2m+1}$ .

A função  $\mathcal{S}$  é  $C^1$  uma vez que  $y$  e  $\phi$  são  $C^2$  e segue então do Lema 19 que o complementar de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^s \times X)$  é denso em  $\mathbb{R}^{2m+1}$  e podemos então escolher um vector  $a \in \mathbb{R}^{2m+1}$  com norma arbitrariamente pequena tal que  $a \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^s \times X)$ .

Note-se que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^s \times X)$  é o conjunto dos vectores,  $a \in \mathbb{R}^{2m+1}$  que verificam :

$$a = \sum_{j=1}^s \lambda_j [D\Phi_{(\phi,y)}]^j - [D\Phi_{(\phi,y)}]^{s+1} \Leftrightarrow a + [D\Phi_{(\phi,y)}]^{s+1} = \sum_{j=1}^s \lambda_j [D\Phi_{(\phi,y)}]^j$$

logo escolhendo  $a \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^s \times X)$  conseguimos obter uma matriz com característica  $s+1$  e seguindo este esquema as vezes necessárias obtemos uma função de medição  $y'$  que dá origem a um *delay map* que é uma imersão de  $\overline{W}_i$  (e também de  $\bigcup_{j=1}^k \overline{W}_j$ ) e pelo lema 4 podemos encontrar uma função de medição em  $\mathcal{N}$  que é uma imersão de qualquer  $\overline{W}_j$  com  $j < i$ . Repetindo o argumento para  $\overline{W}_{i+1}$ , ao fim de algumas iterações teremos encontrado uma imersão de toda a variedade  $M$ .

Uma vez que  $\Phi_{(\phi,y')}$  é uma imersão de  $M$  então para cada  $x \in M$  existe uma vizinhança de  $x$ ,  $\mathcal{N}_x$ , tal que  $\Phi_{(\phi,y')}$  é um mergulho de  $\mathcal{N}_x$ , pelo teorema 22, e se notarmos que  $M$  é um espaço métrico podemos encontrar uma bola fechada  $\overline{\beta}_x$  centrada em  $x$  tal que  $\overline{\beta}_x \subset \mathcal{N}_x$ . Os interiores destas bolas formam uma cobertura aberta de  $M$  (uma vez que para cada  $x$  há uma bola  $\overline{\beta}_x$  que lhe corresponde) e a partir desta cobertura podemos extrair uma subcobertura finita. A colecção de bolas fechadas correspondentes  $\{\overline{\beta}_i : 1 \leq i \leq n'\}$  forma uma cobertura compacta e cada um dos seus elementos é mergulhado por  $\Phi_{(\phi,y')}$ .

Se seleccionarmos uma destas bolas o conjunto das funções de medição que dão

origem a um mergulho é aberto logo o conjunto de funções de medição que dão origem a mergulhos de todas as bolas, denote-se por  $\mathcal{U}'_y$ , é um aberto uma vez que é a intersecção finita de conjuntos abertos.  $\mathcal{U}'_y$  é uma vizinhança de  $y'$  e como  $y' \in \mathcal{U}_y$  podemos tomar  $\mathcal{U}'_y \subset \mathcal{U}_y$ .

Note-se que as funções em  $\mathcal{U}'_y$  dão origem a mergulhos de cada uma das bolas individualmente e não são necessariamente as funções de medição que dão origem a mergulhos de  $\bigcup_{i=1}^n \bar{\beta}_i$ .

Agora, pelo Lema de Lebesgue sabemos que existe  $\epsilon > 0$  tal que a bola fechada de raio  $\epsilon$  centrada em qualquer ponto de  $M$  está contida no interior de  $\bar{\beta}_i$  para pelo menos um  $i$ . Segue-se que cada  $\epsilon$ -bola é mergulhada por  $\Phi_{(\phi, y')}$  e também por todas as aplicações  $\Phi_{(\phi, \hat{y})}$  com  $\hat{y} \in \mathcal{U}'_y$ .

Se denotarmos a métrica em  $M$  por  $\rho$  podemos resumir estes resultados através do lema seguinte:

**Lema 6.** *Se  $\hat{y} \in \mathcal{U}'_y$  então  $\Phi_{(\phi, \hat{y})}$  é uma imersão de  $M$ , um mergulho de  $\mathcal{V}_y$  e  $\Phi_{(\phi, \hat{y})}(x) \neq \Phi_{(\phi, \hat{y})}(x')$  sempre que  $x \neq x'$  e  $\rho(x, x') < \epsilon$ .*

### 2.2.3 Mergulho de Segmentos de Órbita

Para cada  $x \in M$  seja o conjunto de pontos  $\{x, \phi x, \dots, \phi^{2m}x\}$  é o segmento de órbita de  $x$ . Como vimos anteriormente órbitas periódicas podem criar problemas quando tentamos encontrar um mergulho e por razões semelhantes os pares  $(x, x')$  onde  $x'$  pertence ao segmento de órbita de  $x$  podem ser também problemáticos uma vez que não podemos alterar as coordenadas de  $\Phi_{(\phi, y)}(x)$  sem alterarmos as coordenadas de  $\Phi_{(\phi, y)}(x')$ . São especialmente problemáticos os pontos que pertencem a uma órbita com período menor ou igual a  $4m$  pois podemos ter  $x = \phi^j x'$  para algum  $0 \leq j \leq 2m$  e  $x' = \phi^i x$  para algum  $0 \leq i \leq 2m$ .

Tendo em conta estas observações trataremos nesta secção o caso da injectividade apenas nos segmentos de órbita e na secção seguinte extendemos a injectividade para toda a variedade  $M$ .

**Lema 7.** *Seja  $y'$  tal que  $\Phi_{(\phi, y')}$  é uma imersão injectiva em  $\mathcal{V}_y$ . Em toda a vizinhança de  $y'$  em  $C^2(M, \mathbb{R})$  existe uma função,  $y''$  tal que para todo o  $x \in M$  e  $j$  tal que  $1 \leq j \leq 2m$ ,  $\Phi_{(\phi, y'')}(x) \neq \Phi_{(\phi, y'')}(x)$  a não ser que  $x = \phi^j x$ .*

*Demonstração.* Iremos ajustar a função  $y'$  para cada  $j$  para o qual o lema não se verifique. Tome-se  $j$  nessas condições e defina-se o conjunto  $S = \bigcap_{i=0}^{2m} \phi^{-i} \mathcal{V}_y$ <sup>3</sup>.

Para cada  $x \in S$  e  $0 \leq k \leq 2m$  temos  $\phi^k x \in \mathcal{V}_y$  e como já estabelecemos a injectividade em  $\mathcal{V}_y$  o lema verifica-se em  $S$ .

Seja  $T$  o fecho do complementar de  $S$ , uma vez que  $S$  é uma vizinhança de  $\mathcal{P}_{2m}$  então se  $x \in T$  temos que  $x \notin \mathcal{P}_{2m}$  e  $\{x, \phi x, \dots, \phi^{2m} x\}$  são todos diferentes e podemos por isso encontrar um conjunto aberto,  $U_x$ , tal que  $U_x, \phi U_x, \dots, \phi^{2m} U_x$  são todos conjuntos disjuntos.

Temos agora de considerar dois casos:

**Caso 1** Se  $x$  não é um ponto periódico com período entre  $2m + 1$  e  $4m$  e neste caso podemos encontrar  $U_x$  tal que  $U_x, \phi U_x, \phi^2 U_x, \dots, \phi^{4m} U_x$  são todos disjuntos, e como habitualmente, podemos assumir que  $U_x$  é o domínio de um bom atlas:  $h_x U_x = B(3)$  e  $W_x = h_x^{-1} B(1)$

**Caso 2** Se  $x$  é um ponto periódico com período  $k$ , com  $2m + 1 \leq k \leq 4m$ , neste caso encontramos  $U_x$  tal que  $U_x, \phi U_x, \phi^2 U_x, \dots, \phi^{k-1} U_x$  são todos disjuntos e tomamos  $U_x$  como sendo o domínio de um bom atlas. Definimos também  $X_x = W_x \cap \phi^{-k} W_x$  (este conjunto é aberto e não vazio uma vez que  $x \in W_x$ )

Por forma a simplificar a notação para o Caso 1 escrevemos  $X_x = W_x$ .

Assim temos:

- No Caso 1 e Caso 2 quando  $k > 2m + j$  nenhum dos conjuntos  $\phi^{2m+1} \bar{X}_x, \dots, \phi^{2m+j} \bar{X}_x$  intersecta  $\bigcup_{l=0}^{2m} \phi^l U_x$
- No caso 2 se  $k \leq 2m + j$  nenhum dos conjuntos  $\phi^{2m+1} \bar{X}_x, \dots, \phi^{k-1} \bar{X}_x$  intersecta  $\bigcup_{l=0}^{2m} \phi^l U_x$  e  $\phi^k \bar{X}_x \subset \bar{W}_x, \phi^{k+1} \bar{X}_x \subset \phi \bar{W}_x, \dots, \phi^{2m+j} \bar{X}_x \subset \phi^{2m+j-k} \bar{X}_x$

<sup>3</sup>Intersecção dos pontos  $x \in M$  tais que  $\phi^i x \in \mathcal{V}_y$ , para  $i = 0, \dots, 2m$  que é a vizinhança dos pontos periódicos com período menor ou igual a  $2m$

Da colecção  $\{X_x, x \in T\}$  extraímos uma cobertura finita de  $T$ ,  $\{X_i, i = 1, \dots, N\}$  com  $(U_i, h_i)$  as cartas correspondentes.

O procedimento agora é o seguinte: Faremos ajustamentos a  $y'$  de forma a que a propriedade descrita no lema se verifique em todos os pontos de um dos  $X'_i$ s. A cada novo ajustamento estabelece-se o resultado em mais um destes conjuntos e como esse ajustamento pode ser feito arbitrariamente pequeno conseguimos preservar as propriedades obtidas pelos ajustamentos anteriores. Ao fim de um número finito de ajustamentos, o lema será verdadeiro para todo o  $T$ .

Suponha agora que  $X_i$  é o próximo conjunto para o qual pretendemos que o lema se verifique (para  $1 \leq i' < i$  e todo o  $x \in X_i, \Phi_{(\phi, y')}(x) \neq \Phi_{(\phi, y')}(\phi^j x)$ ). Defina-se

$$\Psi : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ como } \Psi(x) = \begin{cases} \lambda(h_i(x)) & \text{se } x \in U_i \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

e  $\Psi_l : M \rightarrow \mathbb{R} \ l = 0, 1, \dots, 2m$  como  $\Psi_l = \Psi \circ \phi^{-l}$  com suporte em  $\phi^{-l}U_i$ . Finalmente definimos

$$y'' = y' + \sum_{l=0}^{2m} a_l \Psi_l$$

e agora para todo o  $x \in \bar{X}_i$  temos  $x \in \bar{W}_i$  e  $\phi^l x \in \phi^l \bar{W}_i$  para  $l = 0, 1, \dots, 2m$  logo:

$$y''(x) = y'(x) + a_0$$

$$y''(\phi x) = y'(\phi x) + a_1$$

$$y''(\phi^2 x) = y'(\phi^2 x) + a_2$$

$$\vdots$$

$$y''(\phi^{2m} x) = y'(\phi^{2m} x) + a_{2m}$$

Os valores de  $\phi^j x$  dependem se se trata do Caso 1 ou do Caso 2:

Caso 1 ou Caso 2 com  $2m + j < k$  os pontos  $\phi^j x, \phi^{j+1} x, \dots, \phi^{2m} x$  pertencem a  $\phi^j \bar{W}_i, \phi^{j+1} \bar{W}_i, \dots, \phi^{2m} \bar{W}_i$  respectivamente, e os pontos  $\phi^{2m+1} x, \dots, \phi^{2m+j} x$  não pertencem a  $\bigcup_{l=0}^{2m} \phi^l U_x$  logo

$$y''(\phi^j x) = y'(\phi^j x) + a_j$$

$$\vdots$$

$$y''(\phi^{2m} x) = y'(\phi^{2m} x) + a_{2m}$$

$$y''(\phi^{2m+1} x) = y'(\phi^{2m+1} x)$$



$$\vdots$$

$$y''(\phi^{2m+j}x) = y'(\phi^{2m+j}x)$$

Caso 2 com  $2m + j \geq k$  os pontos  $\phi^j x, \phi^{j+1}x, \dots, \phi^{2m}x$  pertencem a

$\phi^j \overline{W}_i, \phi^{j+1} \overline{W}_i, \dots, \phi^{2m} \overline{W}_i$  respectivamente, os pontos  $\phi^{2m+1}x, \dots, \phi^{k-1}x$  não pertencem a  $\bigcup_{l=0}^{2m} \phi^l U_x$  e os pontos  $\phi^k x, \phi^{k+1}x, \dots, \phi^{2m+j}x$  pertencem a  $\overline{W}_i, \phi \overline{W}_i, \dots, \phi^{2m+j-k} \overline{W}_i$ , respectivamente, e assim:

$$y''(\phi^j x) = y'(\phi^j x) + a_j$$

$$\vdots$$

$$y''(\phi^{2m}x) = y'(\phi^{2m}x) + a_{2m}$$

$$y''(\phi^{2m+1}x) = y'(\phi^{2m+1}x)$$

$$\vdots$$

$$y''(\phi^{k-1}x) = y'(\phi^{k-1}x)$$

$$y''(\phi^k x) = y'(\phi^k x) + a_0$$

$$\vdots$$

$$y''(\phi^{2m+j}x) = y'(\phi^{2m+j}x) + a_{j+2m-k}$$

Iremos concentrar-nos no Caso 2 (o Caso 1 é semelhante).

Pretendemos mostrar que existe  $a = (a_0, a_1, \dots, a_{2m})^\top$  com norma arbitrariamente pequena tal que  $\Phi_{(\phi, y'')}(\phi^j x) \neq \Phi_{(\phi, y'')}(\phi^j x)$  para todo o  $x \in \overline{W}_i$ . Note que para qualquer  $x \in \overline{W}_i$  temos:

$$\Phi_{(\phi, y'')}(\phi^j x) - \Phi_{(\phi, y'')}(\phi^j x) = \Phi_{(\phi, y')}(\phi^j x) - \Phi_{(\phi, y')}(\phi^j x) + Aa$$

onde  $Aa = (a_0 - a_j, \dots, a_{2m-j} - a_{2m}, a_{2m-j+1}, \dots, a_{k-1-1}, a_{k-j} - a_0, \dots, a_{2m} - a_{2m+j-k})^\top$ .

Note-se que  $A$  é uma matriz  $(2m+1) \times (2m+1)$  cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1, as suas linhas têm no máximo um elemento não nulo para além do elemento da diagonal e o mesmo é verdade para as suas colunas. Basta portanto escolher as componentes de  $a$  por forma a que  $Aa \neq 0$  e assim  $\Phi_{(\phi, y'')}(\phi^j x) \neq \Phi_{(\phi, y'')}(\phi^j x)$  mesmo que  $\Phi_{(\phi, y')}(\phi^j x) - \Phi_{(\phi, y')}(\phi^j x) = 0$  e podemos escolher  $\|a\|$  suficientemente pequeno e fazer uma série de ajustamentos à função de medição em que cada um dos ajustamentos estabelece a propriedade num dos conjuntos  $\overline{X}_i$ . Apenas precisamos

de um número finito destes ajustamentos para obtermos uma função  $y''$  tal que  $\Phi_{(\phi, y'')}(x) \neq \Phi_{(\phi, y')}(x)$  para todo o  $x \in T$ .

Finalmente, como  $T$  é compacto, podemos fazer novos ajustamentos mantendo as propriedades obtidas até ao momento e em particular podemos ajustar  $y''$  de forma a que para todo o  $x \in T$   $\Phi_{(\phi, y'')}(x) \neq \Phi_{(\phi, y')}(x)$  para todo o  $1 \leq j \leq 2m$  e fazendo ajustamentos suficientemente pequenos conseguimos garantir que  $\Phi_{(\phi, y'')}$  seja ainda uma imersão injectiva de  $\mathcal{V}_y$   $\square$

**Lema 8.** *Seja  $y''$  nas condições do lema 7. Então, existe  $\delta > 0$  tal que se  $x, x' \in M$ ,  $x \neq x'$  e  $\rho(\phi^i x, \phi^j x') < \delta$  para algum par  $0 \leq i, j \leq k$ , então  $\Phi_{(\phi, y'')}(x) \neq \Phi_{(\phi, y'')}(x')$ .*

*Demonstração.* Tome-se  $\delta_n \rightarrow 0$ . Se o Lema não fosse verdadeiro seria possível encontrar, para cada  $n$ , um par de pontos  $x_n$  e  $x'_n$ ,  $x_n \neq x'_n$  e inteiros  $i_n$  e  $j_n$ ,  $0 \leq i_n, j_n, \leq k$ , tais que  $\rho(\phi^{i_n} x_n, \phi^{j_n} x'_n) < \delta_n$  e  $\Phi_{(\phi, y'')}(x_n) = \Phi_{(\phi, y'')}(x'_n)$ .

Uma vez que  $M$  é compacta podemos encontrar subsucessões  $\{x_n\}$  e  $\{x'_n\}$  com limite  $x$  e  $x'$  respetivamente. Podemos ainda escolher uma subsucessão  $\{i_n\}$  cujos termos são todos iguais a  $i$  e uma subsucessão  $\{j_n\}$  cujos termos são todos iguais a  $j$ . Como  $\phi$  é contínua temos  $\phi^{i_n} x_n \rightarrow \phi^i x$  e  $\phi^{j_n} x'_n \rightarrow \phi^j x'$  e como  $\rho(\phi^{i_n} x_n, \phi^{j_n} x'_n) \rightarrow 0$  temos que  $\phi^i x = \phi^j x'$ , o que significa que  $x$  pertence á órbita de  $x'$ . Mas também pela continuidade de  $\Phi_{(\phi, y'')}$  temos que  $\Phi_{(\phi, y'')}(x) = \Phi_{(\phi, y'')}(x')$  logo pelo lema anterior concluimos que  $x = x'$ .

Uma vez que  $x_n$  e  $x'_n$  tendem para o mesmo limite, podemos encontrar  $n$  suficientemente grande tal que  $\rho(x_n, x'_n) < \epsilon$ . Mas assim  $x_n \neq x'_n$ ,  $\rho(x_n, x'_n) < \epsilon$  e  $\Phi_{(\phi, y'')}(x) = \Phi_{(\phi, y'')}(x')$  o que constraiz o lema 6  $\square$

Desta forma temos que a aplicação  $\Phi_{(\phi, y'')}$  não transforma dois pontos distintos, com órbitas suficientemente próximas, na mesma imagem. Na secção seguinte tratamos a questão da injectividade para pares de pontos que estão separados por maiores distâncias.

### 2.2.4 Mergulho de $M$

Considere-se o espaço produto  $M \times M$  e  $\Delta = \{(x, x) : x \in M\}$  e a aplicação

$$(x, x') \mapsto (\Phi_{(\phi, y'')}(x) - \Phi_{(\phi, y'')}(x'))$$

Então  $\Phi_{(\phi, y'')}(x)$  é injectiva se e só se a imagem de  $(M \times M) \setminus \Delta$  não contém  $\mathbf{0}$ . Neste momento encontrámos uma função de medição  $y''$  tal que  $\Phi_{(\phi, y'')}$  é uma imersão injectiva de  $\mathcal{V}_y$  e  $\Phi_{(\phi, y'')}(x) \neq \Phi_{(\phi, y'')}(x')$  se  $x, x' \in M$ ,  $x \neq x'$  e  $\rho(\phi^i x, \phi^j x') < \delta$  para algum  $0 \leq i, j \leq k$ .

O conjunto  $M \setminus \text{int}\mathcal{V}_y$  é compacto, tal como o conjunto  $\mathcal{Z}$  definido por

$$\mathcal{Z} = \cup_{j=0}^{2m} \phi^j(M \setminus \text{int}\mathcal{V}_y). \quad ^4$$

Seja  $\{U_l, l = 1, \dots, N\}$  uma cobertura finita de  $\mathcal{Z}$  com as seguintes propriedades:

1. Para cada  $l = 1, \dots, N$  e  $0 \leq i, j \leq 2m$ ,  $\phi^{-i}U_l \cap \phi^{-j}U_l = \emptyset$  a não ser que  $i = j$
2. Para cada  $l = 1, \dots, N$  o diâmetro de  $U_l$  é menor que  $\delta$

#### Construção da cobertura:

Para todo o  $x \in \mathcal{Z}, x \notin P_{2m}$  logo os pontos  $x, \phi^{-1}x, \dots, \phi^{-2m}x$  são todos distintos e podemos encontrar um conjunto aberto  $U_x$  que contém  $x$  e tal que  $U_x, \phi^{-1}U_x, \dots, \phi^{-2m}U_x$  são todos distintos. Assim a cobertura  $\{U_x : x \in \mathcal{Z}\}$  verifica a propriedade 1 e garantindo que  $U_x \subset b(x, \frac{\delta}{2})$  verifica também a propriedade 2.

A partir de  $\{U_x : x \in \mathcal{Z}\}$  extraímos uma subcobertura finita  $\{U_l : l = 1, \dots, N\}$

Construímos uma partição da unidade em  $\mathcal{Z}$  subordinada a esta cobertura: sejam  $\psi_l : M \rightarrow \mathbb{R}$   $l = 1, \dots, N$  as funções na partição da unidade e definimos

$$y_\epsilon = y'' + \sum_{l=1}^N \epsilon_l \psi_l$$

para  $\epsilon \in \mathbb{R}^N$ .

Iremos tentar ajustar  $y''$  por forma a que a imagem de  $(M \times M) \setminus \Delta$  sob

$$(x, x') \mapsto \Phi_{(\phi, y'')}(x) - \Phi_{(\phi, y'')}(x')$$

seja afastada de  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2m+1}$  caso o contenha.

---

<sup>4</sup> $\phi^i$  é contínua logo transforma conjuntos compactos em conjuntos compactos e a união finita de conjuntos compactos é um conjunto compacto.

Considere-se o conjunto  $W \subset M \times M$  dado por

$$W = \{(x, x') : \rho(\phi^i(x), \phi^j(x')) \geq \delta \text{ e } (x, x') \notin \text{int}\mathcal{V}_y \times \text{int}\mathcal{V}_y\}$$

A ideia é mostrar que escolhendo um  $\epsilon$  apropriado,  $y_\epsilon$  irá dar origem a um *delay map* que leva  $W$  para  $\mathbb{R}^{2m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$  e para isso consideramos a aplicação  $\Psi : M \times M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$  definida por:

$$\Psi(x, x', \epsilon_1, \dots, \epsilon_N) = \Phi_{(\phi, y_\epsilon)}(x) - \Phi_{(\phi, y_\epsilon)}(x')$$

e iremos investigar a imagem inversa de  $\mathbf{0}$  sob  $\Psi$  utilizando o Lema 21 e a submersividade de  $\Psi$  e em seguida argumentar que utilizando  $y_\epsilon$  temos uma aplicação de *delay* injectiva em  $M$ .

**Submersividade de  $\Psi$ :**<sup>5</sup> Queremos mostrar que  $\text{rank}D\Psi = 2m + 1$ .

Temos de estabelecer a submersividade de  $\Psi$  em todos os pontos do conjunto  $W \times \mathbf{0}$  e para especificar a derivada de  $\Psi$  temos de escolher um atlas para  $M \times M \times \mathbb{R}^N$ . Seja  $\{(h_p, V_p) : p \in \Lambda\}$  um atlas de  $M$ , então  $\{(g_{p,q}, V_p \times V_q \times \mathbb{R}^N) : p, q \in \Lambda\}$  com  $g_{p,q}(x, x', \epsilon) = (h_p(x), h_q(x'), \epsilon)$  é um atlas para  $M \times M \times \mathbb{R}^N$ .

Utilizando estas cartas e escrevendo  $h_p(x) = u$  e  $h_q(x') = u'$  podemos decompor a derivada da seguinte forma:

$$D\Psi g_{p,q}^{-1}(u, u', 0) = \left[ D\Phi_{(\phi, y'')} h_p^{-1}(x) \mid -D\Phi_{(\phi, y'')} h_q^{-1}(x') \mid A(x) - A(x') \right]$$

onde  $A(x)$  é uma matriz  $(2m+1) \times N$  com elemento genérico  $A_{i,l}(x) = \frac{\partial y_\epsilon \phi^{i-1} h_p^{-1}}{\partial \epsilon_l}(u) = \psi_l \phi^{i-1} h_p^{-1}(u) = \psi_l \phi^{i-1}(x)$ .

Pretendemos mostrar que se  $(x, x') \in W$  então as colunas de  $D\Psi g_{p,q}^{-1}(u, u', 0)$  formam uma base de  $\mathbb{R}^{2m+1}$ .

Iremos para isso mostrar que  $A(x) - A(x')$ , que são as matrizes que são afectadas pela modificação de  $y''$  para  $y_\epsilon$  tem  $2m + 1$  colunas linearmente independentes.

---

<sup>5</sup>Se  $\Psi$  é submersiva  $\Psi : M \rightarrow N$  então  $\text{rank}D\Psi = \dim N$

**1º Mostrar que cada uma das colunas de  $A(x) - A(x')$  tem no máximo um elemento não nulo**

Se para algum  $l$  existissem diferentes  $i$  e  $j$  tais que  $A_{i,l}(x) - A_{i,l}(x')$  e  $A_{j,l}(x) - A_{j,l}(x')$  fossem ambos não nulos então para isso seria necessário que pelo menos um elemento de  $\{A_{i,l}(x), A_{i,l}(x')\}$  e um de  $\{A_{j,l}(x), A_{j,l}(x')\}$  fosse não nulo. Mas

$A_{i,l}(x), A_{j,l}(x)$  não podem ser ambos não nulos pois se fossem ambos não nulos isso implicaria que  $\psi_l \phi^{i-1}(x) \neq 0$  e  $\psi_l \phi^{j-1}(x) \neq 0$  logo tanto  $\phi^{i-1}(x)$  como  $\phi^{j-1}(x)$  pertenceriam ao suporte de  $\psi_l$  e portanto ao mesmo elemento  $U_l$  da cobertura o que quer dizer que  $\phi^{i-1}U_l$  e  $\phi^{j-1}U_l$  são não disjuntos o que contradiz a propriedade 1.

Também  $A_{i,l}(x), A_{j,l}(x')$  não podem ser ambos não nulos pois se fossem  $\phi^{i-1}(x)$  e  $\phi^{j-1}(x')$  estariam ambos em  $U_l$  o que implicaria que  $\rho(\phi^{i-1}(x)\phi^{j-1}(x')) < \delta$  e portanto  $(x, x') \notin W$ . Utilizando argumentos semelhantes é possível mostrar que

$A_{i,l}(x'), A_{j,l}(x')$  não podem ser ambos não nulos e

$A_{i,l}(x'), A_{j,l}(x)$  não podem ser ambos não nulos

**2º Mostrar que cada linha de  $A(x) - A(x')$  tem pelo menos um elemento não nulo**

Assumindo que  $(x, x') \in W$  então pelo menos um de  $x$  ou  $x'$  pertence a  $M \setminus \text{int}\mathcal{V}_y$ . Sem perda de generalidade tome-se  $x \in M \setminus \text{int}\mathcal{V}_y$  logo  $\phi^{i-1}(x) \in \mathcal{Z}$  para  $1 \leq l \leq 2m+1$  e portanto  $\sum_{l=1}^N \psi_l \phi^{i-1}(x) = 1$  (pois  $\{\psi_l\}$  é uma partição da unidade em  $\mathcal{Z}$ ) e por isso para todo o  $1 \leq i \leq 2m+1$  tem de existir algum  $l$ ,  $1 \leq l \leq N$  para o qual  $\psi_l \phi^{i-1}(x) \neq 0$ , isto é, para todo o  $i$  existe um  $l$  tal que  $A_{i,l}(x) \neq 0$ .

Note-se também que se  $A_{i,l}(x) \neq 0$  então  $A_{i,l}(x') = 0$  pois caso contrário  $\phi^{i-1}(x)$  e  $\phi^{i-1}(x')$  estariam no suporte de  $\psi_l$  o que implicaria que  $(x, x') \notin W$ . Portanto como  $A_{i,l}(x) \neq 0$  temos  $A_{i,l}(x) - A_{i,l}(x') \neq 0$

Como  $A(x) - A(x')$  tem pelo menos um elemento não nulo em cada linha e no máximo um elemento não nulo em cada coluna segue-se que :

- $A(x) - A(x')$  tem de ter pelo menos tantas colunas quanto o número de linhas
- $A(x) - A(x')$  tem de ter *full rank*

e portanto  $\text{rank} D\Psi g_{p,q}^{-1}(u, u, 0) = 2m + 1$  o que significa que  $\Psi$  é submersiva no ponto  $(x, x', 0)$

Como a derivada de  $\Psi$  é *full rank* em  $(x, x', 0)$ , por continuidade existe um subconjunto aberto de  $M \times M \times \mathbb{R}^N$  que contém  $(x, x', 0)$  no qual a derivada é *full rank*, Estes conjuntos abertos (um para cada  $(x, x', 0)$ ) formam um cobertura de  $W \times \{\mathbf{0}\}$  e a sua união é um conjunto aberto  $X$  tal que  $\Psi$  restringida a  $X$  é uma submersão.

Pelo Lema de Lebesgue existe um  $\eta > 0$  tal que toda a bola fechada de raio  $\eta$  ou menor, centrada num ponto de  $W \times \{\mathbf{0}\}$  está contida em  $X$ . Note-se que isto significa que se  $\epsilon \in \mathbb{R}^N$  e  $\|\epsilon\| < \eta$  então  $W \times \{\epsilon\} \subset X$ .

Uma vez que  $\Psi|_X : X \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$  é uma submersão, pelo lema 21, temos que  $\Psi|_X^{-1}(\mathbf{0})$  é uma subvariedade de dimensão  $2m + N - (2m + 1) = N - 1$ .

Se considerarmos a projecção  $\pi : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $(x, x', \epsilon) \rightarrow \epsilon$  e a sua restrição  $\hat{\pi}$ , a  $\Psi|_X^{-1}(\mathbf{0})$  e supondo que existe algum  $\epsilon$  com  $\|\epsilon\| < \eta$ , que não pertence ao contradomínio de  $\hat{\pi}$  então não existe nenhum par  $(x, x') \in W$  tal que  $\Phi_{(\phi, y_\epsilon)}(x) = \Phi_{(\phi, y_\epsilon)}(x')$ .<sup>6</sup>

Mais ainda, como  $\hat{\pi}$  é uma aplicação  $C^1$  de uma variedade de dimensão  $N-1$  para  $\mathbb{R}^N$ , pelo lema 1 temos que o conjunto dos  $\epsilon$ 's que não pertencem ao contradomínio de  $\hat{\pi}$  é denso em  $\mathbb{R}^N$ : em particular podemos escolher  $\epsilon$  com norma arbitrariamente pequena.

Temos portanto que a imagem de  $W \times \{\epsilon\}$  sob  $\Psi$  não contém  $\mathbf{0}$  e que os pares  $(x, x')$  em  $M \times M$  que não pertencem a  $W$  são aqueles para os quais  $\rho(\phi^i(x), \phi^j(x')) > \delta$  para algum  $0 \leq i, j \leq k$  ou  $x$  e  $x'$  pertencem ambos a  $\text{int}\mathcal{V}_y$  mas para estes pontos já sabemos que se  $\epsilon$  for escolhido suficientemente pequeno então  $\Psi_{(x, x', \epsilon)} \neq \mathbf{0}$  a não ser que  $x = x'$  logo  $\Phi_{(\phi, y_\epsilon)}$  é injectiva em  $M$  e como na secção 2.3.2 se mostrou que é uma imersão de  $M$  concluímos que é um mergulho de  $M$ .

---

<sup>6</sup>Pois se houvesse como  $(x, x', \epsilon) \in X$  então  $(x, x', \epsilon) \in \Psi|_X^{-1}(\mathbf{0})$  o que implicaria que  $\epsilon$  pertence ao contradomínio de  $\hat{\pi}$  o que contradiz a hipótese inicialmente colocada.

### 2.3 Conclusão da Demonstração do Teorema de Takens

Até este momento provámos que para o conjunto dos difeomorfismos em  $M$  que têm um número finito de pontos periódicos com período menor ou igual a  $2m$ , que denotaremos por  $X_\phi$ , o conjunto das funções de medição  $\mathcal{Y}$ , que tornam a  $\Phi_{(\phi,y)}$  um mergulho de  $M$  é aberto e denso em  $C^2(M, \mathbb{R})$ . O seguinte resultado diz-nos que  $X_\phi$  é denso (e aberto) em  $\text{Diff}^2(M)$ .

**Teorema 9.** (*Kupka-Smale*) *Seja  $M$  uma variedade compacta e  $n \in \mathbb{N}$ . Para  $\phi \in \text{Diff}^k(M)$  genérico, o número de pontos periódicos com período menor ou igual a  $n$  é finito.*

Uma segunda parte do Teorema de Kupka Smale que não está apresentada no presente texto permite ainda garantir que para  $\phi$  genérico, se  $x$  é um ponto periódico com período  $k \leq 2m$  então os valores próprios de derivada de  $\phi^k$  são todos distintos. Por isso podemos tomar os difeomorfismos em  $X_\phi$  nessas condições

Uma vez que  $X_\phi$  é denso em  $\text{Diff}^2(M)$  e sabendo que para todo o  $\phi \in X_\phi$  existe um subconjunto aberto e denso de  $C^2(M, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{Y}$  cujos elementos (funções de medição  $y$  tornam  $\Phi_{(\phi,y)}$  um mergulho de  $M$  logo podemos escolher  $V \subset \text{Diff}^2(M) \times C^2(M, \mathbb{R})$  tal que  $\{(\phi, y) : y \in \mathcal{Y}\} \subset V$ . Assim  $V$  é denso em  $\text{Diff}^2(M) \times C^2(M, \mathbb{R})$  e podemos concluir que o conjunto dos pares  $(\phi, y)$  que tornam  $\Phi_{(\phi,y)}$  um mergulho de  $M$  é denso em  $\text{Diff}^2(M) \times C^2(M, \mathbb{R})$ .

Para mostrar que o conjunto dos pares  $(\phi, y)$  que tornam a aplicação  $\Phi_{(\phi,y)}$  um mergulho de  $M$  é aberto não podemos usar o argumento anterior pois mesmo sendo o conjunto  $X_\phi$  um aberto isso não garante que  $V$  seja aberto.

Assim definimos a aplicação

$$\mathcal{F} : \text{Diff}^2(M) \times C^2(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^2(M, \mathbb{R}^{2m+1})$$

$$(\phi, y) \rightarrow \Phi_{(\phi,y)}$$

e tal como na secção 2.2 iremos mostrar que esta aplicação é contínua.

**Lema 10.** A aplicação  $F_1 : \text{Diff}^2(M) \times C^2(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^2(M, \mathbb{R})$  definida por  $(\phi, y) \rightarrow y \circ \phi$  é contínua.

*Demonstração.* Seja  $\{(U_i, h_i), i \in \Lambda\}$  um bom atlas finito para  $M$  e seja  $W_i = h_i^{-1}B(1)$ . Então  $\{\phi^{-1}W_i; i \in \Lambda\}$  é uma cobertura de  $M$ . Seja  $\{(V_j, g_j), j \in \Theta\}$  um outro bom atlas finito subordinado à cobertura  $\{\phi^{-1}W_i; i \in \Lambda\}$  com  $X_j = g_j^{-1}B(1)$ . Então para cada  $V_j$  existe algum  $W_i$ , o qual denotaremos por  $W_{i(j)}$  tal que  $\phi V_j \subset W_{i(j)}$

Para qualquer  $(\phi, y)$  note-se que as funções  $yh_i^{-1} : h_i\overline{W}_i \rightarrow \mathbb{R}$  são uniformemente contínuas logo dado  $\epsilon > 0$  existe um  $d_i > 0$  tal que:

$$|yh_i^{-1}(u') - yh_i^{-1}(u)| < \epsilon \text{ se } \|u' - u\| < \delta_i < \delta$$

e como existe um número finito destas funções podemos encontrar  $\delta > 0$  que funciona para todo o  $i \in \Lambda$ .

As derivadas  $Dyh_i^{-1} : h_i\overline{W}_i \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $Dh_i\phi g_j^{-1} : g_j\overline{X}_j \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$  são funções contínuas definidas num domínio compacto logo podemos encontrar constantes  $A$  e  $B$  tais que:

$$\|Dyh_i^{-1}(u)\| < A \text{ para todo o } u \in h_i\overline{W}_i \text{ e } i \in \Lambda$$

$$\|Dh_i\phi g_j^{-1}(u)\| < B \text{ para todo o } u \in g_j\overline{X}_j \text{ e } j \in \Theta$$

Dada qualquer vizinhança em  $C^2(M, \mathbb{R})$  de  $y \circ \phi$  existe uma vizinhança da forma

$$\mathcal{N} = \bigcap_j \mathcal{N}^1(y \circ \phi, (V_j, g_j), (\mathbb{R}, Id), \overline{X}_j, \epsilon')$$

contida nessa. Escolha-se  $\delta$  suficientemente pequeno por forma a que se verifique:

$$|yh_i^{-1}(u') - yh_i^{-1}(u)| < \epsilon'/2 \text{ sempre que } \|u' - u\| < \delta, u, u' \in \overline{W}_i \text{ e } i \in \Lambda$$

$$\|Dyh_i^{-1}(u') - Dyh_i^{-1}(u)\| < \epsilon'/3B \text{ sempre que } \|u' - u\| < \delta, u, u' \in \overline{W}_i \text{ e } i \in \Lambda, \delta < \epsilon'/3B \text{ e } \delta < B$$

Escolhemos também  $\epsilon < \min\{\epsilon'/2, \epsilon'/6B\}$  e considere-se a vizinhança  $\mathcal{N}^1(\delta, \epsilon)$  de  $(\phi, y)$  em  $\text{Diff}^2(M) \times C^2(M, \mathbb{R})$  onde

$$\mathcal{N}^1(\delta, \epsilon) = \bigcap_j \mathcal{N}^1(\phi, (V_j, g_j), (W_{i(j)}, h_{i(j)}), \overline{X}_j, \delta) \times \bigcap_i \mathcal{N}^1(y, (U_i, h_i), (\mathbb{R}, Id), \overline{W}_i, \epsilon)$$

Para mostrar que  $F_1$  é contínua temos de mostrar que se  $(\widehat{\phi}, \widehat{y}) \in \mathcal{N}^1(\delta, \epsilon)$  então  $F_1(\widehat{\phi}, \widehat{y}) \in \mathcal{N}$ . Seja  $(\widehat{\phi}, \widehat{y}) \in \mathcal{N}^1(\delta, \epsilon), j \in \Theta, x \in \overline{X}_j$  e  $u = g_j x$ . Então:



$$|\widehat{y}\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) - y\phi g_j^{-1}(u)| \leq |\widehat{y}\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) - y\widehat{\phi}g_j^{-1}(u)| + |\widehat{y}\phi g_j^{-1}(u) - y\phi g_j^{-1}(u)| \quad (2.3)$$

Se escrevermos  $u' = h_{i,(j)}\widehat{\phi}g_j^{-1}(u)$  temos:

$$|\widehat{y}\phi g_j^{-1}(u) - y\phi g_j^{-1}(u)| = |\widehat{y}h_{i,(j)}^{-1}(u') - yh_{i,(j)}^{-1}(u')| < \epsilon < \epsilon'/2 \quad (2.4)$$

pois  $\widehat{y} \in \mathcal{N}^1(y, (U_i, h_i), (\mathbb{R}, Id), \overline{W}_i, \epsilon)$  e escrevendo  $u'' = h_{i,(j)}\phi g_j^{-1}(u)$  assim

$$|y\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) - y\phi g_j^{-1}(u)| = |yh_{i,(j)}^{-1}(u') - yh_{i,(j)}^{-1}(u'')| < \epsilon'/2 \quad (2.5)$$

Como  $\|u' - u''\| = \|h_{i,(j)}\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) - h_{i,(j)}\phi g_j^{-1}(u)\| < \delta$  combinando as equações anteriores (2.3)-(2.5) obtemos:

$$\begin{aligned} \|D\widehat{y}\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) - Dy\phi g_j^{-1}(u)\| &= \|D\widehat{y}\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) - Dy\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) + Dy\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) - Dy\phi g_j^{-1}(u)\| \\ &\leq \|D\widehat{y}\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) - Dy\widehat{\phi}g_j^{-1}(u)\| + \|Dy\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) - Dy\phi g_j^{-1}(u)\| \end{aligned}$$

utilizando a regra da cadeia temos:

$$\begin{aligned} \|D\widehat{y}\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) - Dy\phi g_j^{-1}(u)\| &\leq \|D\widehat{y}h_i^{-1}(u')Dh_i\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) - Dyh_i^{-1}(u')Dh_i\widehat{\phi}g_j^{-1}(u)\| + \\ &\quad + \|Dyh_i^{-1}(u')Dh_i\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) - Dyh_i^{-1}(u'')Dh_i\phi g_j^{-1}(u)\| \\ &\leq \|D\widehat{y}h_i^{-1}(u')Dh_i\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) - Dyh_i^{-1}(u')Dh_i\widehat{\phi}g_j^{-1}(u)\| + \\ &\quad + \|Dyh_i^{-1}(u')Dh_i\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) - Dyh_i^{-1}(u')Dh_i\phi g_j^{-1}(u)\| + \\ &\quad + \|Dyh_i^{-1}(u')Dh_i\phi g_j^{-1}(u) - Dyh_i^{-1}(u'')Dh_i\phi g_j^{-1}(u)\| \\ &\leq \|Dh_i\widehat{\phi}g_j^{-1}(u)\| \|D\widehat{y}h_i^{-1}(u') - Dyh_i^{-1}(u')\| + \\ &\quad + \|Dyh_i^{-1}(u')\| \|Dh_i\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) - Dh_i\phi g_j^{-1}(u)\| + \\ &\quad + \|Dh_i\phi g_j^{-1}(u)\| \|Dyh_i^{-1}(u') - Dyh_i^{-1}(u'')\| \end{aligned}$$

Tendo em conta que  $\widehat{\phi} \in \bigcap_j \mathcal{N}^1(\phi, (V_j, g_j), (W_{i(j)}, h_{i(j)}), \overline{X}_j, \delta)$  então

$$\|Dh_i\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) - Dh_i\phi g_j^{-1}(u)\| < \delta \text{ e como } \delta < B \text{ isto implica que } \|Dh_i\widehat{\phi}g_j^{-1}(u)\| \leq 2B$$

logo obtemos:

$$\|D\widehat{y}\widehat{\phi}g_j^{-1}(u) - Dy\phi g_j^{-1}(u)\| \leq 2B\epsilon + \delta A + \frac{\epsilon'}{3B}B = 2B\epsilon + \delta A + \epsilon'/3 < \epsilon'$$

Assim, concluímos que  $F\mathcal{N}(\delta, \epsilon) \subset \mathcal{N}$  logo  $F_1$  é uma aplicação contínua.

□

**Lema 11.** *A aplicação  $F_n : \text{Diff}^2(M) \times C^2(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^2(M, \mathbb{R})$  definida por  $(\phi, y) \mapsto y \circ \phi^n$  é contínua.*

*Demonstração.* Pelo Lema 10 sabemos que  $F_1$  é contínua. Assuma-se que  $F_{n-1}$  é contínua e notando que  $F_n = F_{n-1} \circ G$  onde  $G : \text{Diff}^2(M) \times C^2(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^2(M, \mathbb{R})$  é definida como  $G(\phi, y) = (\phi, F_1(\phi, y)) = (\phi, y \circ \phi)$  que é também uma função contínua. Logo  $F_n$  é a composição de funções contínuas e é por isso contínua.  $\square$

**Proposição 12.** *A aplicação  $\mathcal{F}$  é contínua.*

*Demonstração.* Seja  $F_0 : \text{Diff}^2(M) \times C^2(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^2(M, \mathbb{R})$  dada por  $(\phi, y) \rightarrow y$  e seja  $F : \text{Diff}^2(M) \times C^2(M, \mathbb{R}) \rightarrow [C^2(M, \mathbb{R})]^{2m+1}$  especificada por:  $F = (F_0, F_1, \dots, F_n)$ .

Assim  $\mathcal{F} = T \circ F$  onde  $T$  é a aplicação definida na Proposição (3). Pelo Lema anterior sabemos que  $F$  é contínua e como  $T$  é contínua então  $\mathcal{F}$  é a composição de duas funções contínuas.  $\square$

Pela continuidade de  $\mathcal{F}$  temos então:

**Proposição 13.** *Seja  $M$  uma variedade compacta e  $K$  um subconjunto compacto de  $M$ . Então o conjunto dos pares  $(\phi, y)$  que tornam a aplicação  $\Phi_{(\phi, y)} : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$  um mergulho de  $K$  é aberto em  $\text{Diff}^2(M) \times C^2(M, \mathbb{R})$ .*

## 2.4 Extensão do Teorema de Takens

Defina-se a topologia  $C^p$  no espaço das funções  $C^k(M, \mathbb{R})$ ,  $p \leq k$ , funções  $k$ -vezes diferenciáveis de  $M$  em  $\mathbb{R}$  como sendo a topologia gerada pelos conjuntos definidos da seguinte forma:

1. Sejam  $f \in C^k(M, \mathbb{R})$ ,  $(U, h)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  uma carta em  $M$  e  $K \subset U$  um conjunto compacto e  $0 < \epsilon \leq \infty$ .
2. O conjunto  $\mathcal{N}^p(f; (U, h), (\mathbb{R}, Id), K, \epsilon)$  consiste nas funções  $\hat{f} \in C^k(M, \mathbb{R})$  para as quais

$$|\hat{f}h^{-1}(x) - fh^{-1}(x)| < \epsilon \text{ e } \|D^i \hat{f}h^{-1}(x) - D^i fh^{-1}(x)\| < \epsilon$$

para todo o  $x \in h(K)$  e  $i = 1, 2, \dots, p$ .

**Teorema 14.** *Seja  $M$  uma variedade diferencial compacta de dimensão  $m$ . Para um par  $C^p$ -genérico  $(\phi, y)$  tal que  $\phi \in \text{Diff}^k(M)$ ,  $y \in C^k(M, \mathbb{R})$ , para  $p \leq k < \infty$  a aplicação*

$$\Phi_{(\phi, y)} : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$$

$$\Phi_{(\phi, y)}(x) = (y(x), y(\phi(x)), y(\phi^2(x)), \dots, y(\phi^{2m}(x)))$$

é um mergulho.

Este resultado é demonstrado utilizando os mesmos argumentos usados para a demonstração do teorema 1, onde em vez de recorrermos ao Lema 4 usamos uma sua generalização:

**Lema 15.** *Seja  $y : M \rightarrow \mathbb{R} \in C^k(M, \mathbb{R})$ ,  $k \in \mathbb{N}$  e  $\psi_j : M \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, N$  funções  $C^\infty$ , com  $N$  finito. Seja  $a = (a_1, \dots, a_N)^T \in \mathbb{R}^N$ . Para cada vizinhança  $\mathcal{N}$  de  $y$  existe algum  $\delta > 0$  tal que se  $\|a\| < \delta$  a função definida por*

$$y' = y + \sum_{j=1}^N a_j \psi_j$$

pertence a  $\mathcal{N}$ .

*Demonstração.* Seja  $\{(U_i, h_i), i \in \Lambda\}$  um bom atlas finito de  $M$  e seja  $\bigcap_i \mathcal{N}^p(y, (U_i, h_i), (\mathbb{R}, id), \overline{W}_i, \epsilon) \subset \mathcal{N}$ . Para cada  $j, 1 \leq j \leq N$  e  $i \in \Lambda$  a função  $\psi_j : \overline{W}_i \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua com domínio compacto e por isso existe uma constante  $B$  tal que  $|\psi_j| < B$ .

Temos assim :

$$|y' h_i^{-1}(h_i x) - y h_i^{-1}(h_i x)| = \left| \sum_{j=1}^N a_j \psi_j h_i^{-1}(h_i x) \right| \leq \sum_{j=1}^N |a_j| |\psi_j(x)| \leq B \sum_{j=1}^N |a_j|$$

De forma análoga como  $D^i \psi_j h_i^{-1}, i = 1, 2, \dots, p$  são funções contínuas podemos utilizar os mesmos argumentos e obter:

$$\|D^i y' h_i^{-1}(h_i x) - D^i y h_i^{-1}(h_i x)\| \leq B_i \sum_{j=1}^N |a_j|$$

E assim podemos concluir que se  $\|a\| < \delta$  então  $y' \in \mathcal{N}$ . □

### 3 Expoentes de Lyapunov

Denotando por  $f : M \rightarrow M$  um sistema dinâmico definido numa variedade<sup>7</sup> compacta de dimensão  $m$ ,  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$  o mergulho definido no Teorema de Takens e  $g = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}^{2m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$  o sistema dinâmico reconstruído. Interessa agora compreender como se relacionam o expoente máximo de Lyapunov (EML) do sistema reconstruído com o EML do sistema original.

**Proposição 16.**  $\lambda_f(x) \leq \lambda_g(\Phi(x))$

*Demonstração.* Uma vez que  $f(x) = \Phi^{-1} \circ g \circ \Phi(x)$  então  $f^n(x) = \Phi^{-1} \circ g^n \circ \Phi(x)$  e  $Df^n(x) = D\Phi^{-1}(g^n(\Phi(x))) Dg^n(\Phi(x)) D\Phi(x)$ .

Assim  $\|Df^n(x)\| = \|D\Phi^{-1}(g^n(\Phi(x))) Dg^n(\Phi(x)) D\Phi(x)\|$  e uma vez que  $D\Phi u \neq \mathbf{0}$  a não ser que  $u = \mathbf{0}$  uma vez que  $\Phi$  é um mergulho e  $Dg^n u \neq \mathbf{0}$  a não ser que  $u = \mathbf{0}$  pois  $g$  é um difeomorfismo obtemos pela Proposição 24

$$\|Df^n(x)\| \leq \|D\Phi^{-1}(g^n(\Phi(x)))\| \cdot \|Dg^n(\Phi(x))\| \cdot \|D\Phi(x)\|$$

e assim o EML para uma órbita de  $f$  pode ser majorado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\|Df^n(x)\|) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\|D\Phi^{-1}(g^n(\Phi(x)))\| \cdot \|Dg^n(\Phi(x))\| \cdot \|D\Phi(x)\|) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\ln(\|D\Phi^{-1}(g^n(\Phi(x)))\|) + \ln(\|Dg^n(\Phi(x))\|) + \ln(\|D\Phi(x)\|)] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\|Dg^n(\Phi(x))\|) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\ln(\|D\Phi^{-1}(g^n(\Phi(x)))\|) + \ln(\|D\Phi(x)\|)] \end{aligned}$$

Note-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\|Dg^n(\Phi(x))\|)$  é o EML do sistema reconstruído e como  $D\Phi$  e  $D\Phi^{-1}$  são funções contínuas definidas num domínio compacto então existem constantes  $A, B \in \mathbb{R}$  tais que

$$\|D\Phi(z)\| < A \text{ e } \|D\Phi^{-1}(g^n(\Phi(z)))\| < B$$

e assim obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\|Df^n(x)\|) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\|Dg^n(\Phi(x))\|) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{n} (\ln(A) + \ln(B)) \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\|Dg^n(\Phi(x))\|) \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Por simplicidade de notação assumiremos a partir daqui que  $M \subset \mathbb{R}^m$

□

Isto permite-nos concluir que através do estudo dos Expoentes de Lyapunov do sistema reconstruído conseguimos obter informação sobre os Expoentes de Lyapunov do sistema original e que a órbitas caóticas no sistema original correspondem órbitas caóticas no sistema reconstruído.

## 4 Implementação

Quando procuramos ajustar dados de uma série temporal a um modelo linear existem certos procedimentos *standard* que podemos seguir e o comportamento da série pode ser descrito através de um número relativamente reduzido de parâmetros. No caso de modelos não lineares isto não se verifica.

Seguindo a formulação das secções anteriores iremos considerar um sistema dinâmico determinístico onde  $x_n$  representa o estado do sistema no instante  $n$ ,  $x_n \in M$  onde  $M \subset \mathbb{R}^k$  é o atractor sobre o qual a dinâmica evolui e  $\phi : M \rightarrow M$  é o operador de transição entre estados. Supomos que conseguimos, através da função de medição  $y : M \rightarrow \mathbb{R}$ , fazer uma medição do estado do sistema em qualquer momento  $z_n = y(x_n)$ .

Uma vez que  $y$  nos devolve apenas um valor não conseguimos através de  $y(x_n)$  uma descrição completa sobre o sistema. Porém, se observarmos  $z_n$  em vários momentos no tempo conseguimos obter informação que nos permite descrever o sistema original. De acordo com o Teorema de Takens, se  $d_\epsilon \in \mathbb{N}$  for suficientemente grande, a evolução dos vectores de reconstrução,  $(z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+d_\epsilon})$ , será a mesma de  $x_n$ .

O Teorema de Takens diz-nos que se estivermos interessados em compreender como evolui o mercado accionista em Portugal podemos tirar algumas conclusões relativamente a invariantes topológicos do mercado estudando por exemplo a série temporal das rendibilidades do PSI20<sup>8</sup>. Porém, na prática, não sabemos qual o número de variáveis que influenciam o mercado accionista português e somos confronta-

---

<sup>8</sup>Supondo que as condições do teorema são verificadas, *i.e* a função de medição tem de ser duas vezes diferenciável e a função de transição  $\phi$  tem de ser um difeomorfismo  $C^2$

dos com a dificuldade de escolher um  $d_\epsilon$  apropriado para os vectores de reconstrução.

Embora não possamos esperar uma perfeita correspondência entre o sistema original e o sistema reconstruído podemos escolher  $d_\epsilon$  por forma a compreender melhor a dinâmica original, tentando minimizar o erro cometido. Podemos fazer essa escolha utilizando o método dos falsos vizinhos.

#### 4.1 Método dos Falsos Vizinhos

Uma das metodologias utilizadas para estimar a dimensão do mergulho,  $d_\epsilon$ , é o chamado método dos *falsos vizinhos*, que consiste no seguinte:

Construímos através da série das observações pares de vectores,  $v_t$  e  $v_t^{NN}$  (vizinho mais próximo de  $v_t$ ) com dimensões cada vez maiores comparando a cada passo o número de vectores que estão próximos em  $\mathbb{R}^n$  mas distantes em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Cada ponto

$$v_t = (z_{t+\tau}, z_{t+2\tau}, \dots, z_{t+n\tau})$$

tem um vizinho mais próximo

$$v_t^{NN} = (z_{t'+\tau}, z_{t'+2\tau}, \dots, z_{t'+n\tau})$$

Se estes pontos forem realmente vizinhos então tornam-se próximos pela dinâmica do sistema e devem afastar-se de forma relativamente lenta. Porém estes pontos podem estar próximos porque o mergulho em  $\mathbb{R}^m$  produziu trajectórias que se cruzam (o que pode indicar-nos que a dimensão dos vectores não é a correcta). Assim, para cada par de vizinhos  $v_t$  e  $v_t^{NN}$  podemos aumentar a dimensão obtendo: assim

$$\widehat{v}_t = (z_{t+\tau}, z_{t+2\tau}, \dots, z_{t+n\tau}, z_{t+(n+1)\tau})$$

e

$$\widehat{v}_t^{NN} = (z_{t'+\tau}, z_{t'+2\tau}, \dots, z_{t'+n\tau}, z_{t'+(n+1)\tau})$$

e como  $\|\widehat{v}_t - \widehat{v}_t^{NN}\|^2 - \|v_t - v_t^{NN}\|^2 = (z_{t+(n+1)\tau} - z_{t'+(n+1)\tau})^2$ . Calcula-se então o aumento normalizado da distância entre estes dois pontos e conclui-se que dois pontos são falsos vizinhos se:

$$\frac{|z_{t+(n+1)\tau} - z_{t'+(n+1)\tau}|}{\|v_t - v_t^{NN}\|} \geq R_T \quad (4.1)$$

onde  $R_T$  irá depender da distribuição espacial das observações de  $v_t$ .

Se  $R_T$  for muito pequeno verdadeiros vizinhos serão tomados como falsos vizinhos e se  $R_T$  for muito alto, falsos vizinhos serão tomados como verdadeiros.<sup>9</sup>

Finalmente podemos calcular a proporção de falsos vizinhos para cada  $n$  e escolhemos  $d_\epsilon$  como sendo o menor valor para  $n$  para qual essa proporção se encontra abaixo de um certo limite. É de esperar que o número de pontos que satisfazem a condição (4.1) diminua à medida que se aumenta a dimensão dos vectores de reconstrução.

## 4.2 Decaimento da Função de Autocorrelação

Um outro problema está na escolha da divisão temporal na qual se faz a recolha dos dados,  $\tau$ . Em teoria, qualquer valor para  $\tau$  é aceitável, mas a reconstrução depende dessa escolha e devemos tomar  $\tau$  por forma a conseguir maximizar a separação espacial entre as observações. Um dos vários critérios para escolher  $\tau$  baseia-se em encontrar o *primeiro zero da função de autocorrelação*. Defina-se a função de autocorrelação amostral de  $N$  observações da série temporal  $z_t$  como sendo:

$$\rho(T) = \frac{\sum_{n=1}^N (z_{n+T} - \bar{z})(z_n - \bar{z})}{\sum_{n=1}^N (z_n - \bar{z})^2}$$

onde  $\bar{z}$  é a média amostral. O menor valor positivo de  $T$  para o qual  $\rho(T) \leq 0$  é habitualmente utilizado como intervalo de recolha de observações.

Desta forma,  $\tau$  é escolhido por forma a que as observações/coordenadas dos vectores de reconstrução sejam pouco correlacionadas embora estejam temporalmente próximas e nos dêem o máximo de informação sobre o sistema.

## 5 Conclusão

O *Teorema do Mergulho de Takens - 1981* garante que, se certas condições estiverem reunidas, podemos conhecer melhor algumas dinâmicas que interessam a muitos investigadores e por isso os resultados provados são utilizados em diversas áreas, como medicina [10] e finanças [11].

---

<sup>9</sup>habitualmente escolhe-se  $10 \leq R_T \leq 30$ .

Neste trabalho apresenta-se a demonstração do Teorema de Takens bem como a de alguns dos resultados utilizados. As proposições apresentadas sem demonstração encontram-se provadas em grande parte da literatura de topologia diferencial e sistemas dinâmicos como [3] e [6]. Mostra-se que conhecendo o expoente máximo de Lyapunov (EML) do sistema reconstruído podemos tirar conclusões sobre o EML do sistema original e que a órbitas caóticas no sistema original correspondem órbitas caóticas no sistema reconstruído.

Para trabalho futuro seria interessante estudar a relação entre órbitas periódicas no sistema original e no sistema reconstruído, generalizar os resultados através da relaxação das condições de diferenciabilidade na função de medição e da regra de transição do sistema original, e ainda analisar o caso em que existe distorção nas medições que são feitas ao sistema original seguindo o trabalho de M. Casdagli et al.(1991) [12]

## 6 Anexos

### 6.1 Definições de Topologia Diferencial

**Definição 1.** Um *homeomorfismo* é uma aplicação contínua, invertível e cuja inversa é também contínua.

**Definição 2.** Uma *variedade topológica* de dimensão  $d$ ,  $M$ , é um espaço localmente euclidiano de dimensão  $d$ , isto é, cada ponto  $p \in M$  possui uma vizinhança  $U \subset M$  homeomorfa a um aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

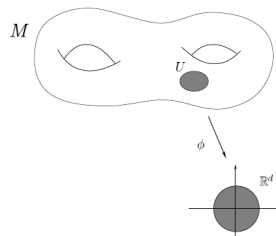


Figura 3: Variedade Topológica



**Definição 3.** Se  $M$  é uma variedade topológica e  $\phi : U \rightarrow V$  é um homeomorfismo de um subconjunto aberto  $U \subset M$  num subconjunto  $V \subset \mathbb{R}^d$  então  $\phi$  é uma *carta* (ou *carta local*) de  $M$  e  $U$  é o domínio da carta.

**Definição 4.** Uma família de cartas  $\{h_\alpha : \alpha \in A\}$  com domínios  $U_\alpha$  diz-se um *atlas* de  $M$  se  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ .

**Definição 5.** Uma *estrutura diferenciável* de classe  $C^k$  ( $1 \leq k \leq \infty$ ) de uma variedade topológica  $M$  de dimensão  $d$ , é uma colecção de sistemas de coordenadas  $\mathcal{C} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$  é uma cobertura aberta de  $M$
- As funções de transição  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$  são de classe  $C^k$  para quaisquer  $\alpha, \beta \in A$
- A colecção  $\mathcal{C}$  é maximal: se  $(U, \phi)$  é um sistema de coordenadas com a propriedade de que  $\phi \circ \phi_\alpha^{-1}$  e  $\phi_\alpha \circ \phi^{-1}$  são de classe  $C^k$  para todo o  $\alpha \in A$  então  $(U, \phi) \in \mathcal{C}$

A um par  $(M, \mathcal{C})$  chamamos *variedade diferenciável* de dimensão  $d$ .

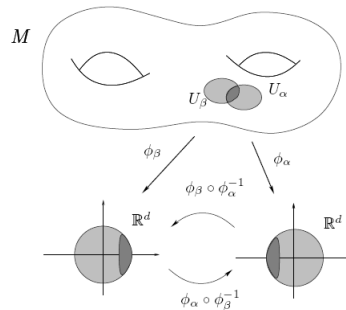


Figura 4: Variedade Diferenciável

**Definição 6.** Um *difeomorfismo* é uma aplicação invertível, diferenciável com inversa diferenciável.

Dois variedades diferenciáveis que são difeomórfas podem ser consideradas a mesma à custa de uma mudança de coordenadas suave e invertível.

**Definição 7.** Uma função contínua  $f : M \rightarrow N$  entre variedades diferenciáveis diz-se diferenciável no ponto  $p \in M$  se existem cartas  $h : U \rightarrow U'$  e  $k : V \rightarrow V'$  com  $p \in U$  e  $f(p) \in V$  ( $V \subset N$  e  $U \subset M$ ) tais que a composição  $k \circ f \circ h^{-1}$  é diferenciável no ponto  $h(p) \in U'$ .

A função  $f$  diz-se diferenciável se é diferenciável em todos os pontos  $p \in M$ .

**Definição 8.** Seja  $f$  uma função diferenciável no ponto  $p$ . Chama-se matriz Jacobiana de  $f$  em  $p$  relativamente a  $h$  e  $k$  à matriz das derivadas parciais  $Dk \circ f \circ h^{-1}(h(p))$ .

**Definição 9.** Dada uma função  $f : M \rightarrow N$  e um ponto  $p \in M$ , define-se o *rank* de  $f$  em  $p$  como sendo a característica da matriz Jacobiana de  $f$  em  $p$  relativamente a quaisquer sistemas de coordenadas  $h$  e  $k$ , e denotamos por  $\text{rank}Df(p)$ .

Se  $\text{rank}Df_p$  for o mesmo para qualquer ponto  $p \in M$  então dizemos que  $f$  tem característica constante.

Note-se que  $\text{rank}Df_p \leq \min\{\dim M, \dim N\}$  e dizemos que  $f$  tem *full rank* se  $\text{rank}Df_p$  for igual ao seu limite superior.

**Definição 10.** Se a derivada em  $h(p)$  é injectiva então diz-se que  $f$  é imersiva em  $p$ . Uma função que é imersiva em todos os pontos de  $M$  uma *imersão* e neste caso  $\text{rank}Df = \dim M$ .

Se a derivada em  $h(p)$  é sobrejectiva então diz-se que  $f$  é submersiva em  $p$ . Uma função que é submersiva em todos os pontos é uma *submersão* e tem-se  $\text{rank}Df = \dim N$ .

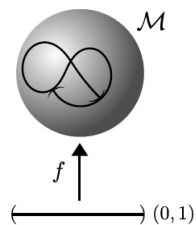


Figura 5: Imersão

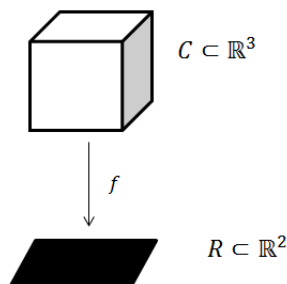


Figura 6: Submersão

**Definição 11.** Se  $N$  é uma variedade  $n$ -dimensional e  $M \subset N$  é uma variedade de dimensão  $m$  então  $M$  é uma subvariedade de  $N$  se em qualquer ponto de  $M$  existe uma carta que pode ser obtido de uma carta  $(V, g)$  de  $N$  restringindo  $g$  a  $V \cap M$  e perdendo as últimas  $n - m$  coordenadas. Isto é:  $M \cap V = g^{-1}(x_{m+1} = \dots = x_n = 0)$ . O número  $k = \dim N - \dim M$  chama-se codimensão da subvariedade.

Exemplo:

Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis de dimensões  $m$  e  $n$  respectivamente e seja  $f : U \subset M \rightarrow N$  uma função diferenciável. Então  $\Gamma(f) = \{(x, y) \in U \times N : x \in U, y = f(x)\}$  é uma subvariedade de dimensão  $m$  de  $M \times N$

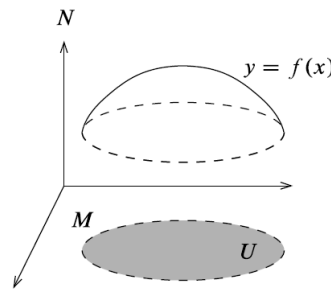


Figura 7: Subvariedade

**Definição 12.** Uma função diferenciável  $f : M \rightarrow N$  diz-se um *mergulho* se  $f(M) \subset N$  é uma subvariedade diferenciável e  $f : M \rightarrow f(M)$  é um difeomorfismo.

**Definição 13.** Seja  $M$  uma variedade compacta. Uma função diferenciável  $f : M \rightarrow N$  diz-se um *mergulho* se é uma imersão e for injectiva.

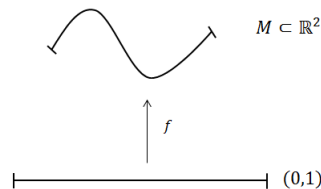


Figura 8: Mergulho

Seja  $B(a) \subset \mathbb{R}^m = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| < a\}$  a bola aberta de raio  $a$  e centro na origem

**Definição 14.** Se  $M$  é uma variedade diferenciável e  $\{U_i, i \in \Lambda\}$  uma cobertura aberta, então existe um atlas  $\{(V_j, g_j) : j \in \mathbb{N}, g_j : V_j \rightarrow V'_j\}$  com as seguintes propriedades:

- Para cada  $j \in \mathbb{N}$  existe um  $i \in \Lambda$  tal que  $V_j \subset U_i$  e qualquer ponto em  $M$  tem uma vizinhança que intersecciona apenas um conjunto finito de elementos  $V_j$ ;
- $V'_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 3\} = B(3)$ ;
- Os conjuntos  $W_j = g_j^{-1}(\{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| < 1\}) = g_j^{-1}B(1)$  ainda cobrem  $M$ ;

Um atlas como este diz-se um *bom atlas* subordinado a  $\{U_i, i \in \Lambda\}$ .

**Definição 15.** (Função *Bump*) Para qualquer raio positivo  $r$  e  $\epsilon > 0$  considere-se a função  $\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  com as seguintes propriedades:

- $0 \leq \lambda(x) \leq 1$  para todo o  $x \in \mathbb{R}^m$ ;
- $\lambda(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \overline{B}(r)$
- $\lambda(x) = 0 \Leftrightarrow \|x\| \geq r + \epsilon$

e  $\lambda$  é infinitamente diferenciável.

**Exemplo:**

Considere-se a função  $f(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{if } t > 0 \\ 0 & \text{if } t \leq 0 \end{cases}$$

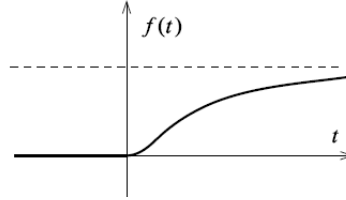


Figura 9:  $f(t)$

Seja  $r_1 < r_2$  e defina-se agora uma função infinitamente diferenciável  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$h(t) = \frac{f(r_2 - t)}{f(r_2 - t) + f(t - r_1)}$$

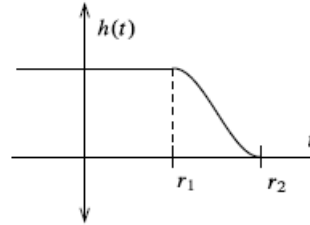


Figura 10:  $h(t)$

Assim  $h(t)$  tem as seguintes propriedades:

- $h(t) = 1$  se  $t \leq r_1$
- $h(t) = 0$  se  $t \geq r_2$
- $0 \leq h(t) \leq 1$  para  $r_1 \leq t \leq r_2$

e tomando agora  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como sendo a função definida por:  $H(x) = h(\|x\|)$  então  $H$  é uma função *bump* tal que:

- $H(x) = 1$  se  $x \in \overline{B}_{r_1}(0)$
- $H(x) = 0$  se  $x \notin B_{r_2}(0)$
- $0 \leq H(x) \leq 1$  se  $x \in B_{r_2}(0) \setminus \overline{B}_{r_1}(0)$

A função  $H$  é uma função *bump*: é uma função infinitamente diferenciável que assume o valor 1 num certo conjunto e 0 fora duma vizinhança específica desse conjunto.

**Proposição 17.** *Se  $A$  é um subconjunto fechado de  $M$  e  $\{U_i, i \in \Lambda\}$  é uma cobertura aberta de  $A$ , então existe um conjunto de funções  $\lambda_i : M \rightarrow [0, 1], i \in \Lambda$  com as seguintes propriedades:*

- $\lambda_i \in C^\infty$  ;
- O suporte de  $\lambda_i$  está contido em  $U_i, i \in \Lambda$ ;
- A família de conjuntos  $\{\text{suporte}\lambda_i\}_{i \in \Lambda}$  é localmente finita;<sup>10</sup>
- $\sum_{i \in \Lambda} \lambda_i(x) = 1$  para todo o  $x \in A$ ;

*Este conjunto de funções é a partição da unidade  $C^\infty$  subordinado a  $\{U_i, i \in \Lambda\}$*

As partições da unidade são utilizadas para "colar" as propriedades locais (*i.e* que se verificam em domínios de cartas) daí resultando propriedades globais.

### Topologias em $C^2(M, \mathbb{R})$

Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $C^2(M, \mathbb{R})$  o conjunto de funções  $C^2$  de  $M$  para  $\mathbb{R}$ . A topologia  $C^1$  em  $C^2(M, \mathbb{R})$  é a topologia gerada pelos conjuntos abertos definidos da seguinte forma:

1. Sejam  $f \in C^2(M, \mathbb{R})$ ,  $(U, h)$  uma carta em  $M$  e  $K \subset U$  um conjunto compacto e  $0 < \epsilon \leq \infty$ .
2. O conjunto  $\mathcal{N}^1(f; (U, h), (\mathbb{R}, Id), K, \epsilon)$  consiste nas funções  $\hat{f} \in C^2(M, \mathbb{R})$  para as quais

$$|\hat{f}h^{-1}(x) - fh^{-1}(x)| < \epsilon \text{ e } \|D\hat{f}h^{-1}(x) - Dfh^{-1}(x)\| < \epsilon$$

para todo o  $x \in h(K)$ .

---

<sup>10</sup>o que significa que para cada ponto existe uma vizinhança que intersecciona apenas um número finito de  $\text{suporte}\lambda_i$ 's

Isto significa que as representações locais de  $\widehat{f}$  e  $f$  e das suas derivadas estão  $\epsilon$ -próximos em todos os pontos de  $K$ .

**Definição 16.** Uma *propriedade genérica* é uma propriedade que se verifica num conjunto residual - numa intersecção numerável de conjuntos abertos e densos.

Em particular se uma propriedade se verifica num conjunto aberto e denso então é genérica.

## 6.2 Sistemas Dinâmicos

A análise e previsão de séries temporais financeiras é um campo de estudo que interessa a muitos investigadores e empresários dada a sua importância para os ajustamentos macro-económicos e decisões de gestão.

As séries financeiras revelam um comportamento de difícil previsão e por isso muitas vezes modelam-se retornos e preços de activos utilizando processos estocásticos como o movimento browniano e processos de Lévy. Porém, existem modelos determinísticos não lineares que permitem modelizar séries temporais com simultaneamente movimentos não periódicos, ciclos e alterações de estrutura que exibem comportamento errático, de difícil previsão e cujas órbitas se assemelham a trajetórias de processos estocásticos.

**Definição 17.** Um *sistema dinâmico* (diferenciável e invertível) é um trio  $(M, \mathcal{T}, \phi)$  onde  $M$  é uma variedade diferenciável,  $\mathcal{T}$  é o domínio temporal e  $\phi$  uma regra de transição tal que para cada  $t \in \mathcal{T}$   $\phi^t : M \rightarrow M$  um difeomorfismo.

Habitualmente temos  $\mathcal{T} = \mathbb{N}$  no caso de sistemas dinâmicos discretos ou,  $\mathcal{T} = \mathbb{R}^+$  para sistemas dinâmicos a tempo contínuo. Assumimos  $\mathcal{T} = \mathbb{N}$  no que se segue.

**Definição 18.** Sejam  $\phi : M \rightarrow M$  e  $x \in M$ . A órbita de  $x$  sob  $\phi$  é o conjunto dos pontos  $\{x, \phi(x), \phi^2(x), \dots\}$ . Diz-se que  $x$  é *ponto periódico* de  $\phi$  com período  $k$  se  $\phi^k(x) = x$  e se  $k$  for o menor inteiro positivo para a qual a condição se verifica. Em particular, se  $k = 1$ ,  $x$  diz-se um *ponto fixo* de  $\phi$ .

**Definição 19.** Seja  $\phi : M \rightarrow M$  um difeomorfismo numa variedade de dimensão  $m$ . Então  $\lambda_\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(\|D\phi^n(x)\|)$  é o Expoente Máximo de Lyapunov (EML) para a órbita de  $\phi$  com estado inicial  $x$ .

Os expoentes de Lyapunov dão-nos uma indicação sobre a que taxa é que as órbitas de um sistema dinâmico com condições iniciais próximas se afastam à medida que o sistema evolui no tempo. Isto é, a sensibilidade do sistema às condições iniciais.

Através do conhecimento do EML de um sistema conseguimos concluir sobre o grau de previsibilidade desse sistema. Se o EML de um sistema dinâmico numa certa órbita é positivo normalmente podemos concluir que a órbita é caótica.

O mapa logístico é um exemplo de um sistema dinâmico a tempo discreto definido através da equação de transição:  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ . É um sistema não linear com variável espacial denotada por  $x_n$  e com parâmetro  $r$ . Para valores de  $r$  superiores a 3.57 o sistema tem comportamento caótico.

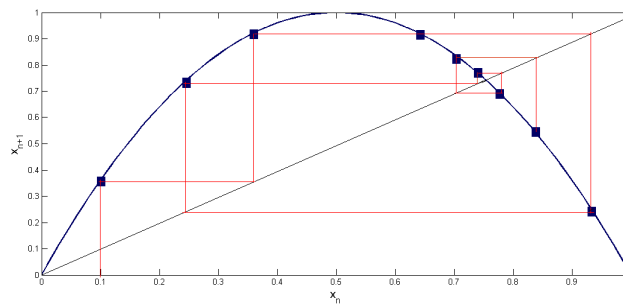


Figura 11: Mapa Logístico com  $r = 4$

O atrator de Lorenz é um exemplo de um sistema dinâmico a tempo contínuo e é originado através do sistema de equações diferenciais seguinte:



$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{array} \right.$$

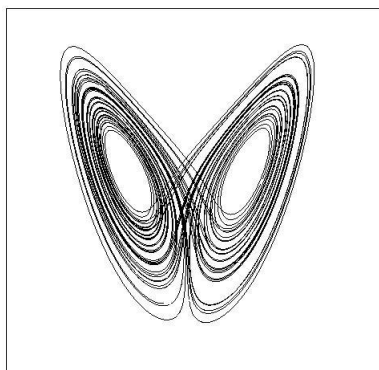


Figura 12: Atrator de Lorenz (com  $\sigma = 10$ ,  
 $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$ )

Trata-se de um sistema não linear e determinístico onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as variáveis que representam o espaço e  $\sigma$ ,  $\rho$  e  $\beta$  são parâmetros do modelo. Se  $\rho = 28$  o sistema exibe comportamento caótico.

### 6.3 Resultados Necessários à Demonstração

Um  $n$ -cubo  $C \subset \mathbb{R}^n$  de aresta  $\lambda$  é o produto  $C = I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$  de intervalos fechados de comprimento  $\lambda$ . A  $n$ -medida de  $C$  é  $\mu(C) = \lambda^n$ .

Um subconjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  tem medida nula se para todo o  $\epsilon > 0$  existe uma cobertura de  $n$ -cubos, cuja soma das medidas é menor que  $\epsilon$ .

**Lema 18.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação  $C^1$ . Se  $X \subset U$  tem medida nula então  $f(X)$  tem medida nula.*

*Demonstração.* Uma vez que  $f$  é diferenciável no conjunto aberto  $U$  temos que para qualquer ponto de  $X \subset U$ ,  $\|Df(x)\|$  é limitada por uma constante  $k > 0$ .

Assim  $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$  para todo o  $x, y \in X$ .

Segue-se que se  $X$  tem medida nula, existe uma cobertura de  $X$  formada  $n$ -cubos, cuja soma das medidas é menor que  $\epsilon$ , então existe uma cobertura de  $f(X)$  formada  $n$ -cubos, cuja soma das medidas é menor que  $(k\sqrt{n})^n \epsilon$ , logo  $f(X)$  tem medida nula.

□

**Lema 19.** *Se  $M$  e  $N$  são variedades com dimensões  $m$  e  $n$  respectivamente,  $m < n$  e  $f : M \rightarrow N$  é uma função  $C^1$  então  $N \setminus f(M)$  é denso em  $N$ .*

*Demonstração.* Basta-nos mostrar que  $f(M)$  tem  $n$ -medida nula. Para isso aplicamos o Lema 18 com  $X = \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$  e considerando os sistemas de coordenadas  $(U, h)$  e  $(V, g)$  para  $M$  e  $N$ , respectivamente, em que a função  $g \circ f \circ h^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função  $C^1$ , uma vez que  $f$  é  $C^1$ , e notando que  $\mathbb{R}^m$  tem  $n$ -medida nula temos que  $f(M)$  tem  $n$ -medida nula.  $\square$

**Teorema 20.** (*Teorema do Rank*) *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis de dimensões  $m$  e  $n$ , respectivamente, e seja  $F : M \rightarrow N$  uma função  $C^1$  com rank constante  $r$ . Para cada  $p \in M$  existem cartas  $(\phi, U)$  de  $M$ , centrado em  $p$ , e  $(\psi, V)$  de  $N$ , centrado em  $F(p)$ , tais que  $F(U) \subset V$  e  $F$  tem uma representação da forma:*

$$\widehat{F}(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

*Em particular, se  $F$  é uma submersão tem-se:*

$$\widehat{F}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$$

*e no caso em que  $F$  é uma imersão:*

$$\widehat{F}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

**Lema 21.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades com dimensões  $m$  e  $n$  respectivamente,  $m > n$  e  $f : M \rightarrow N$  é uma função  $C^1$ . Seja  $q \in N$ . Se  $f$  é submersiva em todos os pontos  $p$  tais que  $f(p) = q$  então o conjunto  $f^{-1}(q)$  é uma subvariedade de  $M$  com dimensão  $m - n$ .*

*Demonstração.* Se  $f \in C^1$  é submersiva nos pontos  $p$  tais que  $f(p) = q$  então tem característica localmente constante igual à dimensão do contradomínio. Tome-se  $x \in f^{-1}(q)$  então pelo Teorema do Rank Constante existem cartas  $\phi$  e  $\psi$  tais que

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : (x_1, x_2, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$$

e  $f^{-1}(q) \cap U = \{x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}$  logo  $f^{-1}(q)$  é uma subvariedade de  $M$  com dimensão  $m - n$ .  $\square$

**Teorema 22.** (*Teorema do Mergulho Local*) *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis e  $F : M \rightarrow N$  uma função  $C^1$ . Se  $F$  é uma imersão num ponto  $p \in M$  então existe*

uma vizinhança de  $p$ ,  $U \subset M$ , tal que  $F|_U : U \rightarrow N$  é um mergulho.

*Demonstração.* É uma consequência imediata do Teorema 20 □

**Lema 23.** (*Lema de Lebesgue*) Seja  $X$  um espaço métrico compacto e seja  $\mathcal{U}$  uma cobertura aberta de  $X$ . Então existe  $r > 0$  tal que para cada  $x \in X$ , existe um conjunto  $U \in \mathcal{U}$  tal que a bola aberta de raio  $r$  e centro em  $x$ ,  $B(x, r)$ , está contida em  $U$ .

*Demonstração.* Uma vez que  $X$  é compacto então existe uma subcobertura finita  $\{U_i : i = 1, \dots, n\}$  que ainda cobre  $X$ . Se  $U_i = X$  para algum  $i$  então é sempre verdade que existe  $r > 0 : B(x, r) \subset U_i = X$ .

No caso em que  $U_i \neq X$  para todo o  $i$  defina-se  $A_i = X \setminus U_i$ . Para todo o  $i$ ,  $A_i$  é um conjunto fechado, não vazio e limitado.

Definam-se também as funções  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  como  $f_i(x) = \inf\{d(x, y), y \in A_i\}$ . Para cada  $i$ ,  $f_i$  é uma função contínua.

Uma vez que  $U_i$  é um conjunto aberto, dado  $x \in U_i$  então existe  $\delta > 0$  tal que  $B(x, \delta) \subset U_i$ . Segue-se que para qualquer  $y \in A_i$   $d(x, y) > \delta$  logo se restringirmos  $f_i$  a  $U_i$  então  $f_i|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

Tome-se agora  $f(x) = \max\{f_i(x) : 1 \leq i \leq n\}$  (função contínua pois o máximo de funções contínuas é ainda uma função contínua). Para qualquer  $x \in X$  existe um  $i$  para o qual  $x \in U_i$  e por isso  $f_i(x) > 0$  logo  $f(x) > 0$  para qualquer ponto de  $X$ .

Uma vez que  $X$  é compacto e qualquer função contínua tem um máximo e um mínimo em  $X$  existe  $r > 0$  tal que  $r = \min(f)$ .

Seja  $x \in X$ . Então para algum  $i$  temos  $f_i(x) = f(x)$ . Suponha-se agora que  $y \in B(x, r)$ , logo  $d(x, y) < r$ , mas que  $y \notin U_i$  ( e portanto  $y \in A_i$ ) Temos assim  $r > d(x, y) \leq f_i(x) = f(x)$  o que contradiz o facto de termos assumido que  $r$  é o valor mínimo de  $f$ . Logo temos de ter  $y \in U_i$  se  $y \in B(x, r)$  □

**Definição 20.** Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$ . Definimos a norma  $\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

**Proposição 24.** *Sejam  $A$  uma matriz  $m \times n$  e  $B$  uma matriz  $n \times p$ . Então*

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

sempre que  $Bx \neq \mathbf{0}$  se  $x \neq \mathbf{0}$ .

$$\begin{aligned} \text{Demonstração. } \|AB\| &= \max_{x \neq \mathbf{0}} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \max_{x \neq \mathbf{0}} \frac{\|ABx\|\|Bx\|}{\|x\|\|Bx\|} = \max_{x \neq \mathbf{0}} \frac{\|Ax'\|\|Bx\|}{\|x\|\|x'\|} = \\ & \|B\| \max_{x \neq \mathbf{0}} \frac{\|Ax'\|}{\|x'\|} \leq \|B\| \max_{x' \neq \mathbf{0}} \frac{\|Ax'\|}{\|x'\|} = \|A\|\|B\| \quad \square \end{aligned}$$

#### 6.4 Mudança de Base e Matrizes Semelhantes

Seja  $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$  uma base ordenada para um espaço vectorial  $V$ . Se  $\mathbf{v}$  é um vector em  $V$  então  $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n$  e assim as coordenadas de  $\mathbf{v}$  relativas a  $B$  são  $v_B = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ .

Seja  $M_B$  a matriz que contém em coluna os vectores da base ordenada  $B$

$$M_B = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Assim temos:  $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n \Leftrightarrow M_B \mathbf{v}_B = v$  e se  $B'$  for uma outra base ordenada podemos de forma semelhante obter  $M_{B'} \mathbf{v}_{B'} = v$  e desta forma obtemos:  $M_{B'} \mathbf{v}_{B'} = M_B \mathbf{v}_B = v \Leftrightarrow \mathbf{v}_{B'} = M_{B'}^{-1} M_B \mathbf{v}_B$  e a matriz  $C_{B,B'} = M_{B'}^{-1} M_B$  chama-se **matriz de mudança de coordenadas**. Esta matriz é única e invertível.

Diz-se que duas matrizes quadradas de ordem  $n$ ,  $A$  e  $B$ , são **matrizes semelhantes** se  $B = P^{-1}AP$  onde  $P$  é uma matriz invertível  $n \times n$ .

Se  $A$  e  $B$  são semelhantes então  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ .

**Teorema 25.** *Seja  $T$  uma transformação linear de um espaço vectorial  $V$  nele mesmo e sejam  $B$  e  $B'$  bases ordenadas de  $V$ . Sejam  $R_B$  e  $R_{B'}$  as representações matriciais de  $T$  relativamente a  $B$  e  $B'$  respectivamente. Então  $R_{B'} = C^{-1}R_B C$  onde  $C_{B,B'}$  é a matriz de mudança de coordenadas de  $B'$  para  $B$ . Consequentemente,  $R_B$  e  $R_{B'}$  são matrizes semelhantes.*

## 6.5 Determinante da Matriz de Vandermonde

Matriz de Vandermonde  $m \times m$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{bmatrix}$$

**Proposição 26.** *O determinantes de uma matriz de Vandermonde ( $m \times m$ ) pode*

*ser calculado utilizando a seguinte fórmula:  $|V| = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_j - \lambda_i)$*

*Demonstração.* Por indução:

$$n = 2 \quad |V_2| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1$$

Supomos que para o caso da matriz  $(m - 1) \times (m - 1)$  a fórmula para o cálculo do determinante é válida.

e temos então para o caso  $m \times m$ :

$$\begin{aligned}
|V_m| &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_1 & \cdots & \lambda_2^{m-1} - \lambda_1\lambda_2^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_m - \lambda_1 & \lambda_m^2 - \lambda_1\lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} - \lambda_1\lambda_m^{m-2} \end{vmatrix} \\
&\quad c_{i+1} \rightarrow c_{i+1} - \lambda_1 c_i \\
&= \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \cdots & \lambda_2^{m-2}(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m - \lambda_1 & \lambda_m(\lambda_m - \lambda_1) & \cdots & \lambda_m^{m-2}(\lambda_m - \lambda_1) \end{vmatrix} = \\
&\quad = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdots (\lambda_m - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-2} \end{vmatrix} = \\
&\quad = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdots (\lambda_m - \lambda_1) \prod_{1 \leq i < j < m-1} (\lambda_j - \lambda_i) = \prod_{1 \leq i < j < m} (\lambda_j - \lambda_i)
\end{aligned}$$

A cada coluna da matriz somamos a coluna anterior multiplicada por  $\lambda_1$ , obtendo assim determinante de uma matriz de Vandermonde  $(m-1) \times (m-1)$  e por hipótese de indução obtemos o resultado pretendido.

□

## Referências

- [1] F. Takens, *Detecting strange attractors in turbulence*, Springer-Verlang 1981.
- [2] J. P. Huke , *Embedding Nonlinear Dynamical Systems: A Guide to Takens' Theorem*, <http://eprints.ma.man.ac.uk/175/>, 2006.
- [3] M.W.Hirsh, *Differential Topology*, Springer-Verlang, 1997, 7-40.
- [4] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2ª Edição, Springer-Verlang, 2003.
- [5] D. G. de Figueiredo, *Introduction to Differential Topology*, Cambridge University Press, 1982.
- [6] C. Robinson, *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*, CRC Press, 1995, 333-362.
- [7] J.B. Fraleigh and R. A. Beuregard, *Linear Algebra*, Addison- Wesley Publishing Company, 1995, 388-407.
- [8] M. Small, *Applied Nonlinear Time Series Analysis: Applications in Physics, Physiology and Finance*, World Scientific, 2005, 1-45.
- [9] E. R. Deyle and G. Sugihara, *Generalized Theorems for Nonlinear State Space Reconstruction*, PLoS ONE Academic Journal, 2011.
- [10] Ferreira et al, *Caracterização do Comportamento Caótico da Variabilidade da Frequência Cardíaca em Jovens Saudáveis*, Sociedade Brasileira da Matemática Aplicada e Computacional, 2010.
- [11] F. Strozzi, J.-M.Z. Comenges, *Towards a Non-Linear Trading Strategy for Financial Time Series*, Chaos, Solitons and Fractals 28 601–615 , 2006.

- [12] M. Casdagli et al., *State Space Reconstruction in the Presence of Noise*, Physica D 51 52-98, 1991.

### Lista de Figuras:

- Figura 2: retirada de [9];
- Figura 3 e Figura 4 retiradas da sebenta "Lições de Geometria Diferencial", Rui Loja Fernandes
- Figura 5 retirada de <http://math.uchicago.edu/~wilsonj/WOMPtalk-Manifolds.pdf>
- Figura 7 retirada de [4]
- Figura 12 retirada do Google Images
- Restantes figuras feitas em Matlab, Word e Paint