

MESTRADO

MÉTODOS QUANTITATIVOS PARA A DECISÃO ECONÓMICA E EMPRESARIAL

TRABALHO FINAL DE MESTRADO

DISSERTAÇÃO

**BALANCEAMENTO AUTOMÁTICO DE LINHAS DE PRODUÇÃO:
BUCKET BRIGADE**

ADRIANA MARIA SOARES MATEUS

NOVEMBRO - 2020

MESTRADO EM
MÉTODOS QUANTITATIVOS PARA A DECISÃO ECONÓMICA
E EMPRESARIAL

TRABALHO FINAL DE MESTRADO
DISSERTAÇÃO

BALANCEAMENTO AUTOMÁTICO DE LINHAS DE PRODUÇÃO:
BUCKET BRIGADE

ADRIANA MARIA SOARES MATEUS

ORIENTAÇÃO:

PROF. DR. JOSÉ PEDRO GAIVÃO

NOVEMBRO - 2020

Agradecimentos

A realização deste trabalho não seria possível sem o contributo de algumas pessoas às quais quero deixar um agradecimento.

Em primeiro lugar quero agradecer ao Prof. Doutor José Pedro Gaivão pela excelente orientação, pelos conselhos, pela disponibilidade e pela ajuda em todo o desenvolvimento do Trabalho Final de Mestrado.

Aos meus colegas e amigos do Mestrado, Beatriz, Inês e João por toda ajuda durante o curso e não só.

Às minhas grandes amigas Abissa, Ana, Laura, Mafalda e Raquel por todo o apoio e por estarem sempre disponíveis para os meus desabafos.

Ao meu melhor amigo Diogo por, desde sempre, ter tanta paciência para me aturar nos bons e, principalmente, nos maus momentos.

Por fim, quero agradecer ao meu irmão por me fazer rir desde que nasci, aos meus avós por todo o carinho que me dão e aos meus pais por me ensinarem a lutar e nunca desistir dos meus objetivos.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo introduzir no modelo simples das *bucket brigades* alguns fatores humanos para verificar que continua válida a propriedade de auto-balanceamento nas linhas de produção onde este modelo é aplicado. Adicionalmente, pretende-se demonstrar e reforçar que é um bom modelo a ser implementado nas linhas de produção e nos organizadores de pedidos, pois não exige uma gestão exaustiva das linhas.

Neste trabalho, foram analisados essencialmente dois novos modelos de *bucket brigades* usando a teoria dos sistemas dinâmicos.

No primeiro, assume-se que as velocidades dos trabalhadores são dependentes das posições de todos os trabalhadores da linha, pois considera-se que numa linha os trabalhadores estão atentos às posições dos seus colegas e podem variar a sua velocidade dependendo se o seu sucessor ou antecessor estiver mais perto ou mais longe. Neste caso, foi feita uma abordagem mais teórica e foram demonstrados alguns resultados importantes como a existência de um ponto fixo e a ausência de bloqueios na linha.

No segundo, considerou-se o modelo de *bucket brigades* com dois trabalhadores numa linha de produção e observa-se que, se a troca de tarefas entre os trabalhadores é feita à direita de um certo ponto, estes vão ter uma velocidade maior do que se for feita à esquerda desse mesmo ponto. Este fenómeno poderá acontecer porque o segundo trabalhador poderá ter desaprendido as tarefas anteriores a esse ponto ou poderá estar cansado. Neste modelo foram feitas várias simulações para se perceber se a linha continua a ser auto-balanceada. Concluiu-se que continuam a existir diversos cenários em que a órbita irá convergir para um ponto fixo, mas existindo também casos em que a órbita poderá ser periódica de período dois ou então ser um atrator caótico.

Palavras-Chave: *Bucket Brigades*, Sistemas Dinâmicos, Linhas de Produção, Auto-balanceamento

Abstract

The present work introduces in the simple model of bucket brigades some human factors to verify that the property of self-balancing still exists in the production lines where this model is applied. Additionally, it is intended to demonstrate and reinforce that it is a good model to be implemented in the production lines and the order-picking, as it does not require an exhaustive management of the lines.

In this work, two new models of bucket brigades were analysed using the theory of dynamical systems.

In the first, the velocity of the workers is dependent of the positions of all workers on the line. In this case, because it is considered that the workers are seeing the positions of their colleagues and may vary their speed depending on whether their successor or predecessor is closer or further away. In this case, a more theoretical approach was made and some important results were proven, such as the existence of a fixed point and the absence of blocks on the line.

In the second, is considered the bucket brigades model with two workers on a production line where if the exchange of tasks between the workers is done on the right of a certain point, they will have a greater speed than if it is done on the left of that same point. This phenomenon may happen because the second worker may have unlearned the tasks before that point or may be tired. Several simulations are made to realize if the line is still self-balanced. It was concluded that there are still several scenarios in which the orbit will converge to a fixed point, but there are also cases in which the orbit can be periodic of period 2 or be a chaotic attractor.

Keywords: Bucket Brigades, Dynamical Systems, Production Lines, Self-balancing

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Revisão da Literatura	3
2.1	Origem das <i>Bucket Brigades</i>	3
2.2	<i>Bucket Brigades</i>	4
2.3	Auto-Balanceamento	6
2.4	<i>Bucket Brigades</i> com Comportamento Caótico	8
2.5	Variantes do Modelo <i>Bucket Brigades</i>	9
2.5.1	<i>Bucket Brigades</i> com Aprendizagem	9
2.5.2	<i>Bucket Brigades</i> com Fadiga	11
2.5.3	<i>Cellular Bucket Brigades</i>	11
2.5.4	<i>Bucket Brigades</i> com Aleatoriedade	12
2.6	Aplicações e Casos Reais	12
3	Conceitos Básicos da Teoria de Sistemas Dinâmicos	14
3.1	Sistemas Dinâmicos Discretos	14
3.1.1	Diagrama <i>Cobweb</i>	17
3.2	Sistemas Dinâmicos Contínuos	19
3.2.1	Fluxos de Equações Diferenciais	19
4	<i>Bucket Brigades</i> com Velocidades Dependentes	22
4.1	Espaço de Configurações	23
4.2	Campo Vetorial F e o Fluxo das <i>Bucket Brigades</i>	25
4.3	Transformação no Momento de <i>Reset</i>	25
4.4	Ausência de Bloqueios numa Configuração em Equilíbrio	27
5	Modelo BB com Dois Trabalhadores e um Ponto Crítico	29
5.1	Explicação e Motivação do Modelo	29
5.2	Variante do Modelo Simples com Dois Trabalhadores	31
5.3	Diferentes Cenários do Modelo	32
5.3.1	Cenário: $\mu^- > \mu^+$	33
5.3.2	Cenário: $\mu^- < \mu^+$	35
5.3.3	Cenário: $\mu^- = \mu^+$	36
6	Conclusão	37

Índice de Figuras

2.1	Linha de produção onde se embalam telemóveis. Fonte: Bartholdi III and Eisenstein, 2006a.	3
2.2	Seleção de encomendas. Fonte: Bartholdi III and Hackman, 2018.	4
2.3	Funcionamento de uma linha <i>Bucket Brigade</i>	5
2.4	Ilustração do funcionamento das <i>Cellular Bucket Brigades</i>	12
2.5	Linha de montagem no restaurante <i>Subway</i> . Fonte: Bartholdi III and Eisenstein, 2006d.	13
2.6	Selecionadores de pedidos na <i>Reader's Digest</i> . Fonte: Bartholdi III and Eisenstein, 2006b.	13
3.1	Ilustração no caso uni-dimensional do teorema de Brouwer.	17
3.2	Função logística com diferentes taxas de crescimento e respetivos diagramas <i>cobweb</i> . Fonte: Boeing, 2016.	18
4.1	Evolução de $x_1(t)$ (linha azul) e $x_2(t)$ (linha vermelha) ao longo do tempo.	24
4.2	Notação de distâncias.	24
4.3	Exemplo de espaço de configurações M com novas coordenadas e com 2 trabalhadores.	25
4.4	Espaço de configurações M com diferentes fluxos associados a diferentes condições iniciais X_i , numa linha com 2 trabalhadores	26
4.5	Linha com 2 trabalhadores com um ponto fixo $X^* = (0, h)$	27
5.1	Linha com dois trabalhadores e uma órbita convergente.	30
5.2	Função f com $\mu^- > \mu^+$	32
5.3	Função f com $\mu^- < \mu^+$	32
5.4	Caso em que $\mu^- > \mu^+$, $c = 0.5$ e $x_0 = 0.1$	33
5.5	Caso anterior mas com um valor de $c = 0.3$ e $x_0 = 0.1$ sem ponto de convergência.	33
5.6	Caso anterior mas com um valor de $c = 0.21$ e $x_0 = 0.35$ com ponto de convergência.	33
5.7	Caso em que $\mu^+ < 1$, $c = 0.5$ e $x_0 = 0.8$ com órbita convergente.	35
5.8	Caso em que $\mu^+ < 1$, $c = 0.3$ e $x_0 = 0.3$	35
5.9	Caso em que $\mu^+ > 1$ e $c = 0.4$	36
5.10	Caso em que $\mu^+ > 1$, $c = 0.35$ e $x_0 = 0.3$	36
5.11	Caso em que $\mu^+ > 1$ e $c = 0.2$ e $x_0 = 0.5$	36
5.12	Caso em que $\mu^- = \mu^+$, $c = 0.2$ e $x_0 = 0.5$	36

Glossário

BB - Bucket Brigades

KPI - Key Performance Indicators

TFM - Trabalho Final de Mestrado

TSS - Toyota Sewn Products Management System

Capítulo 1

Introdução

O mundo nunca teve tantas pessoas. Os clientes exigem cada vez mais em menos tempo, e as empresas esforçam-se por conseguir satisfazer as suas necessidades. Desta forma, as fábricas têm de ter a capacidade de produzir mais em menos tempo nas suas linhas de montagem. Antigamente, os armazéns tinham o único propósito de armazenar os vários produtos. Com o desenvolvimento tecnológico e o aumento do comércio *online*, os armazéns deixaram de ter só a função de armazenagem para servirem também de centros de distribuição. Atualmente, têm de ser capazes de entregar inúmeras encomendas no prazo de dias (Bartholdi III and Hackman, 2018).

Desta necessidade, surgiu o modelo das *bucket brigades* (BB) em 1989 (Bartholdi III and Eisenstein, 1996) que veio facilitar a gestão das linhas, pois é um modelo auto-balanceado e, por isso, não precisa de uma gestão permanente. Na literatura, as BB têm sido estudadas usando a teoria dos sistemas dinâmicos (Bunimovich, 2001), uma área da matemática que estuda o comportamento de sistemas que evoluem ao longo do tempo.

Uma versão simplificada do modelo BB é designada por modelo simples. Apesar do modelo simples das BB apresentar diferentes resultados positivos do ponto de vista teórico, não considera alguns fatores humanos, como a fadiga ou a aprendizagem dos trabalhadores. Ainda existe escassez de trabalhos que considerem estes fatores e, por isso, ainda não se sabe bem se na prática este modelo realmente terá sempre resultados positivos sendo um sistema dinâmico com uma órbita convergente ou se, porventura, poderá em muitos casos ter uma órbita caótica. No entanto, já existem casos práticos onde a aplicação teve sucesso.

O objetivo deste Trabalho Final de Mestrado (TFM) foi tentar incluir alguns fatores humanos no modelo, variando as velocidades dos trabalhadores e verificando se a propriedade de auto-balanceamento se mantém válida. No modelo simples as velocidades dos trabalhadores dependem apenas do próprio trabalhador e são definidas como constantes. No mundo real isto é difícil de acontecer, visto que quando se trabalha em equipa o normal é que as pessoas tenham atenção às tarefas que os seus colegas estão a realizar para saberem se

podem abrandar o seu ritmo ou acelerar. Para além disso, como nas BB, os trabalhadores não têm um certo número de tarefas associadas, a qualquer momento pode acontecer terem de voltar a fazer uma tarefa mais ao início ou mais à frente do que o habitual. O que poderá levar a uma mudança na velocidade de trabalho em certas partes da linha em consequência do esquecimento da tarefa ou da fadiga por ter de realizar mais tarefas.

Desta forma, este TFM tem como propósito comprovar que alguns teoremas que se verificam para o modelo simples continuam a ser verdadeiros mesmo que as velocidades dos trabalhadores dependam de todos os restantes trabalhadores da linha. Adicionalmente, também se pretende ver do ponto de vista mais prático, que numa linha com dois trabalhadores, a existência de um ponto crítico na linha que define uma alteração da velocidade dos trabalhadores, pode alterar o auto-balanceamento.

O TFM tem a seguinte estrutura: no capítulo 2 encontra-se a revisão de literatura, onde é apresentada a origem das BB, o respetivo modelo e algumas variantes. No capítulo 3 é feita uma pequena introdução à teoria dos sistemas dinâmicos e são introduzidos conceitos e teoremas relevantes que serão utilizados nos capítulos posteriores. No capítulo 4 é introduzido um novo modelo de BB, onde as velocidades são dependentes das posições de todos os trabalhadores e são apresentados resultados do modelo simples e as respetivas demonstrações com este novo modelo. No capítulo 5 encontra-se uma simulação de um modelo das BB com dois trabalhadores e um ponto crítico, usando o *software Mathematica* e são apresentados os resultados obtidos. Finalmente, no capítulo 6, apresentam-se as conclusões do trabalho realizado e propostas para trabalhos futuros

Capítulo 2

Revisão da Literatura

2.1 Origem das *Buckect Brigades*

Atualmente, existe uma procura cada vez maior por parte dos clientes, o que exige que os centros de produção e de distribuição encontrem formas de agilizar as suas linhas de produção e as seleções de encomendas. Assim, tem-se vindo a apostar no estudo de novos modelos que otimizem a produtividade das linhas.

Em Boysen et al., 2007 os autores descrevem as linhas de montagem ou de produção (Figura 2.1) como um sistema de produção orientado para o fluxo, onde as unidades produtivas que executam as operações, denominadas estações, são alinhadas em série. As peças visitam as estações sucessivamente à medida que se deslocam ao longo da linha, normalmente por algum tipo de sistema de transporte.



Figura 2.1: Linha de produção onde se embalam telemóveis. Fonte: Bartholdi III and Eisenstein, 2006a.

Segundo Bartholdi III and Hackman, 2018, a organização de pedidos, designada em inglês por *order-picking*, representa tipicamente cerca de 55% dos custos de funcionamento do armazém. Das sub-tarefas que caracterizam a separação de encomendas, a que consome mais tempo é a deslocação dos trabalhadores e, por isso, é a despesa mais cara no funcionamento do armazém. Assim, existe a necessidade de reduzir este tempo improdutivo. Quando existe

um grande volume de seleção de encomendas, o maior desafio é colocar os trabalhadores onde são precisos, mantendo-os todos sempre ocupados (Figura 2.2).

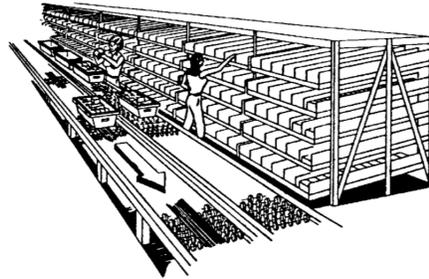


Figura 2.2: Seleção de encomendas. Fonte: Bartholdi III and Hackman, 2018.

Desta forma, as empresas querem encontrar uma solução para o problema de visitar um certo número de locais num armazém minimizando a distância percorrida, ou seja, uma variante do "Problema do Caixeiro Viajante". Usando métodos heurísticos é possível obter, com relativa facilidade, diversas soluções aproximadas de uma solução ótima. Porém, para ser possível o computador resolver este problema, necessita de muita informação sobre o armazém, como a disposição dos corredores, as distâncias entre os locais, etc, e a maioria dos armazéns não recolhe essa informação. Para além de que o resultado que iria dar aos trabalhadores seria a sequência de localizações a percorrer e nunca o caminho exato.

As empresas precisam de conseguir medir o seu desempenho, para poderem avaliar se estão a conseguir alcançar os seus objetivos. Não podem só medir o que sai da fábrica ou do centro distribuição, porque poderá não refletir a realidade. Assim, foram criados indicadores de desempenho chave, designados em inglês por *key performance indicators* (KPI). Os KPI são caracterizados pelo rácio entre as unidades de saída alcançadas e as unidades de entrada necessárias. Muitas vezes também é utilizada a taxa de produção como um indicador, sendo caracterizada pelo número médio de unidades recolhidas por pessoa/hora.

O conceito de *bucket brigade* foi estabelecido por Bartholdi III and Eisenstein, 1996 num modelo que veio facilitar a gestão das linhas de produção e da seleção de pedidos que, por ser auto-balanceado, não precisa de uma gestão permanente.

2.2 *Bucket Brigades*

A primeira vez que o modelo das *Bucket Brigades* (BB) foi implementado foi na indústria têxtil em 1989. Nessa altura foi designado por "*Toyota Sewn Products Management System*" (TSS) (Bartholdi III and Eisenstein, 1996). A única diferença entre as linhas TSS e as BB é que as primeiras não são necessariamente auto-balanceadas (Bratcu and Dolgui, 2005).

De seguida, faz-se uma descrição do modelo simples BB segundo Bartholdi III and Eisenstein, 1996. Considere-se uma linha com n trabalhadores e m estações, onde $n < m$. Em cada estação só poderá ser processado um produto/encomenda (o qual designaremos por item) de cada vez, e apenas poderá estar um trabalhador em cada estação. O funcionamento da linha é simples (Figura 2.3), sendo constituído por duas partes principais:

- **Forward part:** Cada trabalhador terá um item que irá transportar de estação para estação, sendo que em cada estação o trabalhador com maior índice terá prioridade. Quando o item lhe é retirado pelo seu sucessor ou se for o último trabalhador da linha e terminou de processar o item, então abandona o item e segue para a *backward part*.
- **Backward part:** O trabalhador irá andar para trás e vai continuar o trabalho do seu predecessor ou, no caso de ser o primeiro trabalhador da linha irá iniciar um novo item e voltar à *forward part*.

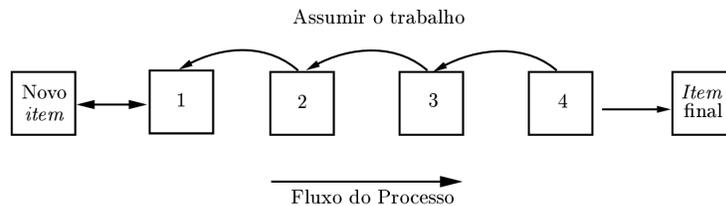


Figura 2.3: Funcionamento de uma linha *Bucket Brigade*.

O conteúdo de trabalho necessário para produzir um item é representado como um segmento de reta normalizado com comprimento unitário, que está segmentado em intervalos que correspondem às estações. Adicionalmente também se tem de garantir a suavidade e previsibilidade do trabalho, ou seja, as tarefas terão de ser constantes e o conteúdo do trabalho é estendido contínua e uniformemente ao longo da linha de produção. Isto significa que o conteúdo do trabalho é o mesmo ao longo do tempo. Para visualizar o funcionamento da linha representam-se as posições do trabalhador i como uma fração do trabalho completo no item em determinado instante de tempo t e representa-se por $x_i(t)$. No modelo das BB não são permitidas ultrapassagens:

$$0 \leq x_1(t) \leq \dots \leq x_n(t) \leq 1.$$

Supondo que não há sobreposição de trabalhadores num intervalo $[a, b]$, então respeita-se a seguinte condição,

$$x_i(t) < x_{i+1}(t), t \in [a, b]. \quad (2.1)$$

Assume-se que cada trabalhador tem uma velocidade v_i que depende apenas da sua posição na linha. Assim,

$$x_i'(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} = v_i(x_i(t)), \quad (2.2)$$

quando o trabalhador i não é bloqueado.

Se houver sobreposição dos trabalhadores i e $i + 1$, então o i -ésimo trabalhador assume a velocidade do seu sucessor. Assume-se que a função $v_i(x)$ é contínua em quase toda a parte em $[0, 1]$ e que existem números reais positivos k e K tal que, para cada trabalhador i ,

$$0 < k < v_i(x) < K < \infty, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Relativamente à *backward part*, tem-se como hipótese que o tempo em que os trabalhadores têm que andar para trás é irrelevante, visto que o tempo total para montar um produto é significativamente maior que o tempo de percorrer a distância da linha de montagem.

Designa-se por instante de *reset*, t_r , o momento em que o último trabalhador chega ao final da linha, ou seja, quando $x_n(t_r) = 1$. Desta forma, o primeiro tabalhador volta ao início da linha para iniciar um item,

$$\lim_{t \rightarrow t_r^+} x_1(t) = 0,$$

e os restantes deslocam-se para a posição do seu predecessor,

$$\lim_{t \rightarrow t_r^+} x_i(t) = x_{i-1}(t_r), \quad i = 2, \dots, n.$$

2.3 Auto-Balanceamento

Uma linha de produção é balanceada se cada trabalhador repete as mesmas tarefas em produtos sucessivos (Bartholdi III and Eisenstein, 1996). Em Bartholdi III and Hackman, 2018 define-se um sistema auto-balanceado como "aquele em que a organização global evolui espontaneamente a partir de uma miríade de interações locais das peças. Os sistemas de auto-balanceamento não requerem uma autoridade centralizada para a sua gestão. Em vez disso, conseguem uma coordenação global espontânea através da interação de muitas componentes simples."

Para este fenómeno acontecer nas BB é necessário que os trabalhadores estejam bem organizados. Desta forma, Bartholdi III and Eisenstein, 1996 definiram a hipótese da ordenação dos trabalhadores por velocidades como essencial para o bom funcionamento do modelo. Significa que a distribuição de tarefas pelos trabalhadores não é feita da maneira tradicional. Ordena-se a linha do trabalhador mais lento para o mais rápido, porque assim se evitam bloqueios na linha de montagem e as tarefas são distribuídas de forma automática.

Para se conseguir avaliar qual o trabalhador mais rápido estabelece-se uma relação de ordem entre as velocidades. Assim, diz-se que o trabalhador j é mais

rápido que o trabalhador i , e escreve-se $v_i \prec v_j$, se este for visivelmente mais rápido em todas as porções de conteúdo de trabalho:

$$\sup_{x \in [0,1]} \left(\frac{v_i(x)}{v_j(x)} \right) < 1.$$

Logo, quando se diz que os trabalhadores estão ordenados do mais lento para o mais rápido significa que $v_1 \prec \dots \prec v_n$.

Em Bartholdi III and Eisenstein, 1996 estabeleceram-se alguns resultados que comprovaram a existência de auto-balanceamento nestas linhas.

Teorema 1. *(existência de uma configuração em equilíbrio): Para qualquer linha das bucket brigade existe uma configuração em equilíbrio, i.e., existe $\underline{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ tal que se os trabalhadores começarem nas posições \underline{x}^* , então estes irão voltar às mesmas posições \underline{x}^* periodicamente no tempo.*

O seguinte lema, também definido nesse artigo, expressa uma condição suficiente para a existência e unicidade da configuração em equilíbrio.

Lema 1. *Se os trabalhadores estiverem ordenados tal que $v_1 \prec \dots \prec v_n$, então a configuração em equilíbrio é única.*

Se esta condição não for respeitada então poderão existir múltiplas configurações. Assim, com esta condição chega-se também a outro resultado importante.

Teorema 2. *(convergência para uma configuração em equilíbrio): Para qualquer linha das bucket brigades, se os trabalhadores estão ordenados tal que $v_1 \prec \dots \prec v_n$, então independentemente da posição inicial, as posições dos trabalhadores convergem para a configuração em equilíbrio.*

No caso das velocidades serem constantes, chega-se ao seguinte resultado que demonstra que o auto-balanceamento maximiza a produção.

Teorema 3. *Se as velocidades dos trabalhadores forem constantes, e se os trabalhadores estiverem ordenados do mais lento para o mais rápido e se, para além disso, os trabalhadores nunca são bloqueados, então a linha converge exponencialmente para uma configuração em equilíbrio para a qual:*

- o trabalhador i executa repetidamente uma fração de trabalho no intervalo da linha entre $\frac{v_1 + \dots + v_{i-1}}{v_1 + \dots + v_n}$ e $\frac{v_1 + \dots + v_i}{v_1 + \dots + v_n}$;
- a taxa de produção é $\sum_{j=1}^n v_j$.

A dedução da fórmula da taxa de produção é simples. A taxa de produção de uma linha é o inverso do tempo de um ciclo. Um ciclo é o tempo que os trabalhadores demoram a completar um item.

$$\text{taxa de produção} = \frac{1}{\text{tempo ciclo}}.$$

O tempo de um ciclo é calculado pelo tempo que o último trabalhador da linha demora a percorrer o intervalo

$$\left[\frac{v_1 + \dots + v_{n-1}}{v_1 + \dots + v_n}, 1 \right].$$

Logo o tempo de ciclo será o seguinte

$$\begin{aligned} \text{tempo ciclo} &= \frac{1 - \frac{v_1 + \dots + v_{n-1}}{v_1 + \dots + v_n}}{\frac{v_n}{v_1 + \dots + v_n}} \\ &= \frac{v_n}{v_1 + \dots + v_n} \\ &= \frac{1}{v_1 + \dots + v_n}. \end{aligned}$$

O que significa que

$$\text{taxa de produção} = v_1 + \dots + v_n.$$

Para demonstrar os Teoremas 2 e 3 Bartholdi III and Eisenstein, 1996 introduzem a definição de alocação. Uma alocação $a_i^{(t)}$ é o tempo necessário para o trabalhador i finalizar a sua parte do trabalho atribuída durante o instante de tempo t , incluindo tanto o tempo de trabalho como eventuais atrasos derivados de bloqueios. Existem assim dois tipos de alocação: as alocações simples que são caracterizadas apenas pelo tempo efetivo de trabalho e as alocações com atrasos, onde também se inclui o tempo de bloqueio. Se a linha for desprovida de bloqueios então as alocações e a sua evolução é determinada pela equação:

$$\underline{a}^{(t+1)} = T \cdot \underline{a}^{(t)}, \quad (2.3)$$

onde T é uma matriz de transição de uma cadeia de Markov finita, irredutível e aperiódica e $\underline{a}^{(t)}$ é o vetor de alocações t (Resnick, 1992). Como se sabe, $\underline{a}^{(t)}$ converge para a única distribuição estacionária da cadeia de Markov. Dado que as alocações convergem, é possível demonstrar a convergência das posições dos trabalhadores.

Vários autores têm escrito sobre este tema, tentando implementar melhorias ao modelo BB e estudar outras componentes que no modelo mais simples não são contempladas. Algumas dessas componentes são, por exemplo, fatores humanos, sendo importante verificar como afetam a velocidade, a previsibilidade do trabalho e a taxa de produção da linha.

2.4 *Bucket Brigades* com Comportamento Caótico

Sistemas determinísticos simples podem gerar comportamentos caóticos ou erráticos. Estes comportamentos caracterizam-se por serem difíceis de descrever, prever e simular, características que se costumam observar num modelo aleatório. Em Bartholdi III et al., 2009 aborda-se esta variabilidade nos modelos. Consideram-se algumas condições diferentes do modelo geral propostas no artigo anterior:

- cada trabalhador i tem duas velocidades constantes distintas, v_i (velocidade em deslocamento para a frente) e w_i (velocidade em deslocamento para trás);
- todos os trabalhadores poderão começar ou acabar um produto e um trabalhador i poderá dar o seu produto a qualquer seu sucessor $j > i$;
- são permitidas ultrapassagens em ambas direções, quer os trabalhadores estejam a trabalhar na mesma direção ou não.

Um modelo que inicialmente era caracterizado por padrões simples, nestas condições, torna-se muito complexo. Assim, este sistema irá convergir para um ponto de equilíbrio se a seguinte condição de convergência for respeitada:

$$\frac{1}{v_1} - \frac{1}{w_1} > \frac{1}{v_2} - \frac{1}{w_2} > \dots > \frac{1}{v_n} - \frac{1}{w_n},$$

onde o termo $\frac{1}{v_i} - \frac{1}{w_i}$ representa a diferença entre os tempos de deslocação na *forward part* e na *backward part* do trabalhador i e por isso mede o quanto a sua velocidade é reduzida pelas tarefas que este realiza. Esta condição, garante que os trabalhadores são ordenados do mais lento para o mais rápido. O que resulta num sistema auto-balanceado. No entanto, se esta condição for violada então o modelo BB poderá ter um comportamento caótico e, conseqüentemente, impossível de prever o futuro.

2.5 Variantes do Modelo *Bucket Brigades*

Quando se fala de velocidades, supõem-se que estas são constantes ao longo do tempo, como já foi mencionado anteriormente. Porém, no caso real, muitas vezes isso não acontece devido a fatores humanos.

2.5.1 *Bucket Brigades* com Aprendizagem

Um desses casos é abordado em Armbruster et al., 2007. É importante considerar que, quando os trabalhadores repetem inúmeras vezes as mesmas tarefas, poderá existir um processo de aprendizagem e, por isso, a velocidade de trabalho tenderá a aumentar.

Para testar os casos em que o processo de aprendizagem dos trabalhadores resulta num aumento da velocidade, são mantidas as principais hipóteses do modelo original BB. A este modelo, que terá os trabalhadores ordenados do mais lento para o mais rápido, adiciona-se um trabalhador sem experiência que, por não ter qualquer treino, irá ser colocado no início da linha, pois será o trabalhador com a menor velocidade. Contudo, supõe-se que, ao longo do tempo, o trabalhador irá aprender e logo irá aumentar a sua velocidade de trabalho nas tarefas que realiza. É necessário salientar que se tem como hipótese que todas as tarefas são suficientemente diferentes ao longo da linha, de tal forma que o trabalhador apenas aprende as tarefas que realmente realiza.

Numa linha tradicional de BB um trabalhadores é bloqueados sempre que algum alcança o seu sucessor. Neste caso, terá de se retirar esta regra de bloqueio para que a linha de produção se equilibre por si só, pois aqui, como a velocidade do novo trabalhador pode aumentar, significa que a sua velocidade poderá atingir ou ultrapassar a velocidade do seu sucessor, sendo bloqueado inúmeras vezes. Assim, para evitar que isto aconteça, os trabalhadores poderão ultrapassar os seus sucessores e, desta maneira, a linha irá auto-balancear-se. Armbruster et al., 2007 implementa dois modelos de aprendizagem. O modelo exponencial, que caracteriza a velocidade do trabalhador no instante t pela seguinte expressão:

$$v(t) = v_l + (v_h - v_l)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad (2.4)$$

onde $v_l > 0$ é a velocidade inicial do novo trabalhador, $v_h \geq v_l$ representa a velocidade máxima que o trabalhador consegue atingir e τ caracteriza a dificuldade de aprendizagem de uma dada tarefa, com $\tau > 0$ (quanto menor o valor de τ mais fácil será realizar a tarefa).

O modelo log-linear, caracteriza a velocidade do trabalhador em função do número de vezes, k , que este repetiu uma determinada tarefa, pela seguinte expressão:

$$v(t) = v_l k^q, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (2.5)$$

onde t_k é a sequência de tempos entre tarefas e q o índice de aprendizagem ($0 < q < 1$). Ao contrário do outro modelo de aprendizagem, este não limita a velocidade do trabalhador ao longo do tempo.

Apesar de serem modelos diferentes, os resultados são muito idênticos. Depois de várias simulações realizadas, os autores do estudo concluíram que o princípio de equilíbrio das BB é muito robusto, pois chega-se sempre a um resultado ótimo se se implementar a regra de ultrapassagem dos trabalhadores, sendo que a posição inicial do novo trabalhador na linha é irrelevante. Também concluíram que, se todos os trabalhadores que estiverem na linha de montagem forem novos e ainda estiverem a aprender, o princípio do equilíbrio verifica-se. Significa que poderá ser um bom modelo para aplicar nos casos de uma nova linha de produção.

No entanto, também é importante salientar as consequências que um sistema caótico poderá ter na aprendizagem dos trabalhadores (Bartholdi III et al., 2009). Como os trabalhadores podem trocar de produtos em qualquer parte da linha de produção, não tendo uma atribuição de tarefas fixas, o primeiro trabalhador poderá ser interrompido no meio de alguma tarefa, levando a uma diminuição da velocidade de aprendizagem.

Os autores sugerem que no futuro se estudem as consequências do esquecimento. Esta componente, estudada sozinha no modelo terá uma dinâmica idêntica à da aprendizagem, mas se se combinarem estas duas abordagens poderá surgir um sistema dinâmico complexo.

2.5.2 *Bucket Brigades* com Fadiga

Outro fator que não se tem em consideração quando se aplica o modelo simples das BB é o cansaço acumulado pelos trabalhadores ao longo do tempo. Em Granotto et al., 2019 os autores estudam os efeitos que este fator tem na linha de produção.

O cansaço físico é muito comum nas linhas de montagem. Um pouco à semelhança do estudo do fator de aprendizagem, aqui também foi aplicada uma função para descrever a fadiga nos trabalhadores: a função exponencial de fadiga:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (2.6)$$

onde $F(t) \in [0, 1]$ é o nível de cansaço no instante t e $\lambda > 0$ representa o quão rápido um trabalhador fica cansado.

Conclui-se que o cansaço causa uma diminuição na taxa de produção das BB, devido à diminuição da velocidade de trabalho e causa também uma mudança no ponto de equilíbrio (local onde os trabalhadores trocam os produtos entre si) em consequência da alteração do rácio das velocidades.

Poderá considerar-se, no futuro, o estudo deste fator com outro modelo que caracterize a fadiga, ou considerar BB com muitos trabalhadores (este artigo só estuda o caso com dois trabalhadores) ou vários corredores, ou casos em que os trabalhadores fazem pausas nos seus turnos de trabalho.

2.5.3 *Cellular Bucket Brigades*

No modelo mais simples das BB a velocidade dos trabalhadores durante a *backward part* é infinitamente grande de tal forma que os trabalhadores percorrem distâncias quase instantaneamente. Quando a linha de produção é pequena, o tempo de duração da *backward part* é insignificante. No entanto, quando a linha de produção é maior, nem sempre é possível negligenciar esse tempo. Assim, foi proposto em Lim, 2011 um novo *design* das BB, conhecido por *cellular bucket brigades* para reduzir esse tempo de viagem.

Neste modelo a linha de produção é dividida ao meio, de maneira a que estas duas metades formem um corredor com largura a , como se pode observar na Figura 2.4. A produção é iniciada na primeira metade da linha (*forward line*) e quando o produto chega ao final desta metade passa para a outra metade (*backward line*). Nas *cellular bucket brigades* os trabalhadores realizam as tarefas em ambas direções, ao contrário do modelo clássico. Quando estão a trabalhar na *forward line* trabalham numa direção e quando mudam para a outra linha trabalham na direção oposta.

O funcionamento é idêntico ao modelo simples. O primeiro trabalhador inicia o processo de produção na *forward line* e quando alcança o seu sucessor, que está na *backward line*, troca de posição com este continuando o trabalho do outro. Ao contrário das *bucket brigades* aqui os trabalhadores não trocam os produtos mas sim as tarefas. Esta troca de tarefas dá-se até que o último trabalhador da linha chegue ao final da *forward line*. Atravessará o corredor para

transportar o produto para a *backward line* até encontrar o seu predecessor na linha, trocando com este novamente até que o primeiro trabalhador da linha inicie um novo produto. Neste modelo os trabalhadores não têm apenas uma velocidade, mas sim duas: uma velocidade na *backward line* e outra na *forward line*. Não deixa de haver tempo improdutivo, sendo que agora esse tempo vai existir quando os trabalhadores estiverem a trocar de linha. Porém, este vai ser menor do que o tempo que se iria gastar na linha de produção anterior.

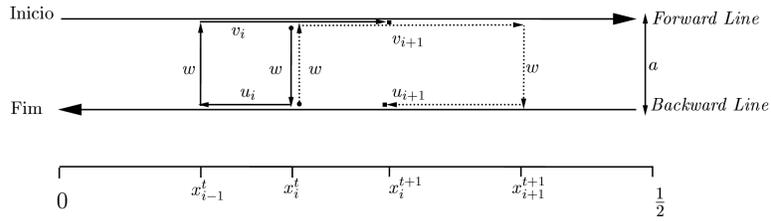


Figura 2.4: Ilustração do funcionamento das *Cellular Bucket Brigades*.

2.5.4 *Bucket Brigades* com Aleatoriedade

Anteriormente, descreveu-se as BB e respetivas variantes usando modelos determinísticos. Partindo de um conjunto de regras simples, é possível descrever, sob certas condições, o comportamento de uma linha de produção. Contudo, numa linha de produção com trabalhadores, ações humanas poderão causar incerteza no modelo. Desta forma, poder-se-á recorrer a modelos estocásticos de maneira a incorporar o fator humano.

Em Bartholdi III et al., 2001 demonstra-se que as BB também podem ser eficientes mesmo existindo variabilidade no trabalho. Suponha-se que das três hipóteses já enunciada na secção 2.4, a que define a suavidade e previsibilidade do trabalho é substituída por um modelo estocástico. Sabe-se à partida que a produção de um *item* consiste em m tarefas discretas em m estações sucessivas. O conteúdo de trabalho nominal em cada estação é independente e identicamente distribuído, seguindo uma distribuição exponencial com média normalizada 1. Isto significa que o tempo que um dado trabalhador i necessita para completar uma tarefa segue uma distribuição exponencial com média $1/v_i$. É demonstrado que à medida que o número de estações aumenta, ou que as tarefas são divididas em subtarefas, o comportamento da linha estocástica aproxima-se do modelo simples.

2.6 Aplicações e Casos Reais

Como se pode ver, já foram realizados diversos estudos sobre o modelo BB chegando-se sempre a conclusões positivas do ponto de vista teórico. De facto, é

um modelo de fácil implementação que oferece bons resultados: redução de custos, diminuição do tempo necessário para gerir as linhas de produção e aumento da taxa de produção, chegando a alcançar a taxa de produção ótima.



Figura 2.5: Linha de montagem no restaurante *Subway*. Fonte: Bartholdi III and Eisenstein, 2006*d*.



Figura 2.6: Seleccionadores de pedidos na *Reader's Digest*. Fonte: Bartholdi III and Eisenstein, 2006*b*.

Na Figura 2.1 pode-se ver um caso particular de aplicação das BB na *Mitsubishi Consumer Electronics America* (Bartholdi III and Eisenstein, 2006*a*). Inicialmente, as linhas estavam constantemente desequilibradas e quando se implementou este modelo rapidamente se obtiveram resultados positivos, tornando as linhas mais fluídas.

No conhecido restaurante de sanduíches *Subway* (Bartholdi III and Eisenstein, 2006*d*) também foi implementado este modelo na linha de "montagem" das sandes. (Figura 2.5).

As BB são usadas principalmente em processos de montagem simples, especialmente em armazéns de distribuição com o objetivo de organizar os organizadores de pedidos. Uma dessas empresas foi, por exemplo, a *Reader's Digest* que conseguiu ter um aumento de 8% na produtividade e diminuiu em 35% os erros na recolha dos pedidos (Bartholdi III and Eisenstein, 2006*b*). Na Figura 2.6 pode se ver uma as BB a serem implementadas na empresa.

Em Bartholdi III and Eisenstein, 2006*c* podem ser consultados outros exemplos de aplicações e casos reais.

Capítulo 3

Conceitos Básicos da Teoria de Sistemas Dinâmicos

A teoria dos sistemas dinâmicos é uma área da matemática que estuda o comportamento de sistemas que evoluem ao longo do tempo.

Interpretando as BB como um sistema, definido por regras simples, que evolui ao longo do tempo, Bunimovich, 2001 iniciou o estudo sistemático das BB usando a teoria dos sistemas dinâmicos. No próximo capítulo, será demonstrado que este ponto de vista é bastante frutífero quando se pretende estudar o comportamento assintótico das BB. No entanto, torna-se imprescindível introduzir alguns conceitos importantes desta teoria (Hirsch et al., 2012).

3.1 Sistemas Dinâmicos Discretos

Definição 3.1.1 (Sistemas Dinâmicos). *Um sistema dinâmico discreto é um par (S, f) onde S é um conjunto e f é uma função com domínio e contradomínio S , ou seja, $f: S \rightarrow S$. Diz-se que S é o conjunto dos estados do sistema e que f é a lei do sistema.*

Pode-se assumir, de uma maneira geral, que o conjunto S é um espaço métrico e f é uma aplicação contínua ou seccionalmente contínua. Recorde-se que S é um espaço métrico se for dotado de uma distância.

Definição 3.1.2 (Distância). *Uma distância é uma função que, para cada par, de pontos x e y em S associa um número real não negativo $d(x, y)$, que é conhecido como distância de x a y , ($d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$), tal que para todo $x, y, z \in S$:*

1. $d(x, y) = d(y, x)$,
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Por exemplo, $S = \mathbb{R}^n$ com a distância Euclidiana e $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Os sistemas dinâmicos discretos têm estados com valores que evoluem ao longo do tempo, onde os instantes de tempo são números inteiros. Essa passagem de tempo corresponde às iterações da função f .

Para descrever a evolução temporal de um estado introduza-se a seguinte notação: comece-se no instante inicial (instante zero), com um ponto $x_0 \in S$, o instante seguinte será $f(x_0)$ e depois $f(f(x_0))$. Para evitar representações extensas, convencionou-se que:

$$f^0(x_0) := x_0 \quad f^1(x_0) := f(x_0) \quad f^n(x_0) := f(f^{n-1}(x_0)) \quad \text{para } n \geq 1.$$

O estado x_0 designa-se por condição inicial ou semente da órbita.

Definição 3.1.3 (Órbita de um estado). *Seja $x \in S$. O conjunto que representa a evolução no tempo do estado x , ou seja, $\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \dots\}$, designa-se por órbita do estado x e representa-se por $O(x)$.*

Um dos objetivos da teoria é saber se as órbitas têm algum limite ou, não tendo, se é possível descrever os seus pontos de acumulação.

Há certos estados em que é fácil descrever os pontos de acumulação das suas órbitas.

Definição 3.1.4 (Pontos Periódicos). *Diz-se que um estado x é um ponto periódico de período p se p é o menor inteiro positivo tal que $f^p(x) = x$.*

Quando x é um ponto periódico, a sua órbita é um conjunto finito. Portanto, os pontos de acumulação de $O(x)$ são o próprio $O(x)$

Definição 3.1.5 (Ponto fixo). *Se x é um ponto periódico com período 1, ou seja, $f(x) = x$, então diz-se que x é um ponto fixo.*

Como foi dito anteriormente, o objetivo geral da teoria dos sistemas dinâmicos é descrever os pontos de acumulação das órbitas $O(x)$ para x arbitrário, ou seja, os pontos em torno dos quais a órbita de x se irá aproximar uma infinidade de vezes. Este conjunto designa-se por ω – limite de x e escreve-se $\omega(x)$.

Definição 3.1.6 (ω – limite). *Diz-se que $z \in \omega(x)$ se existe uma sequência infinita e crescente de inteiros positivos n_1, n_2, \dots tal que*

$$d(f^{n_j}(x), z) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

É fácil ver que $\omega(x)$ é um conjunto fechado. De facto,

$$\omega(x) = \bigcap_{n \geq 1} \overline{\bigcup_{k \geq n} \{f^k(x)\}},$$

ou seja, $\omega(x)$ é uma interseção de conjuntos fechados, logo é um conjunto fechado. Se S é compacto, então $\omega(x)$ é também compacto e não-vazio. Além disso, quando x é um ponto periódico, tem-se $\omega(x) = O(x)$.

Definição 3.1.7 (Atrator). Um conjunto $A \subset S$ é um atrator para um ponto x se $f(A) = A$, i.e., é um conjunto invariante para f , e a órbita de x se aproxima de A , i.e., $\omega(x) \subset A$. Diz-se que A é um atrator para f se A é um atrator para todo $x \in S$.

De seguida, ilustram-se os conceitos introduzidos através de dois exemplos.

Exemplo 3.1.1 (Sistema dinâmico com um ponto fixo atrator). Seja $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x, y, z \geq 0\}$ o 2-simplex, i.e., um triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Com a distância Euclidiana, o 2-simplex é um espaço métrico. Define-se a função linear $f: \Delta \rightarrow \Delta$,

$$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y, \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{2}{3}z, \frac{1}{4}y + \frac{1}{3}z \right).$$

O par (Δ, f) é um sistema dinâmico discreto. Resolvendo o seguinte sistema de equações é fácil ver que f tem um único ponto fixo $p^* = (\frac{6}{17}, \frac{8}{17}, \frac{3}{17})$,

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = x \\ \frac{1}{4}y + \frac{1}{3}z = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{6}{17} \\ y = \frac{8}{17} \\ z = \frac{3}{17} \end{cases}.$$

Usando a teoria das cadeias de Markov, é possível mostrar que p^* é um atrator de f , uma vez que p^* corresponde à única distribuição estacionária da cadeia.

Nem todos os sistemas dinâmicos admitem pontos fixos como é demonstrado no exemplo que se segue.

Exemplo 3.1.2 (Sistema dinâmico sem pontos fixos). Seja $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ a circunferência de raio 1. Define-se distância em S como o comprimento do menor arco de circunferência que une os dois pontos em S . Com esta distância, S é um espaço métrico. Dado $\theta \in [0, 2\pi[$, a função $f: S \rightarrow S$

$$f(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

define um sistema dinâmico (S, f) . Geometricamente, a função f roda no sentido anti-horário um ponto $(x, y) \in S$ pelo ângulo θ . É fácil mostrar que se $\theta = \frac{p}{q}\pi$ onde p, q são inteiros positivos, então qualquer (x, y) em S é um ponto periódico de f . Caso contrário, f não tem pontos periódicos, a órbita de qualquer ponto (x, y) é densa em S e $\omega(x, y) = S$.

Como se viu no exemplo anterior, nem todos os sistemas dinâmicos têm pontos fixos. Um resultado central que garante a existência de pontos fixos é o teorema de Brouwer (Kellogg et al., 1976).

Teorema 4. Seja S um conjunto compacto e convexo de \mathbb{R}^n e $f: S \rightarrow S$ uma aplicação contínua. Então f tem um ponto fixo.

O teorema de Brouwer generaliza o bem conhecido teorema do valor intermédio: se $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ com $a < b$ e $f(a) \leq f(b)$, então para todo $y \in [f(a), f(b)]$ existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = y$. Usando o teorema do valor intermédio é fácil ver que qualquer função contínua $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ tem um ponto fixo. De facto, na Figura 3.1 verifica-se que independentemente da forma da curva que descreve o gráfico da função f , esta vai ter de intersectar a diagonal $y = x$ visto que é uma função contínua.

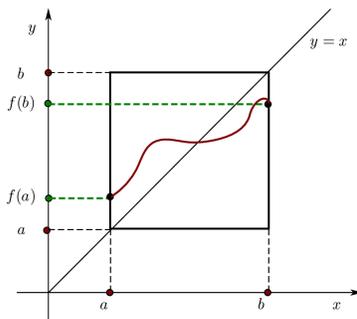


Figura 3.1: Ilustração no caso uni-dimensional do teorema de Brouwer.

Quando f é uma função real de variável real, diz-se que o sistema dinâmico correspondente é uni-dimensional. Um dos sistemas dinâmicos uni-dimensionais mais estudados é o sistema dinâmico gerado pela função logística.

Exemplo 3.1.3. *Seja $S = [0, 1]$ com a distância Euclidiana e $f: S \rightarrow S$ a função $f(x) = rx(1 - x)$ onde x representa o rácio entre a população existente e a população máxima possível e $r \in [0, 4]$ a taxa de crescimento. Pode-se estudar o crescimento da população através do mapa logístico, $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ ou $x_{n+1} = f(x_n)$. Sabe-se que se r for demasiado pequeno a população tem tendência a diminuir ou mesmo a desaparecer e se, pelo contrário, for demasiado grande, o crescimento da população poderá ter um comportamento caótico (Figura 3.2).*

3.1.1 Diagrama Cobweb

O diagrama de *cobweb* é uma ferramenta visual utilizada em sistemas dinâmicos para avaliar o comportamento das funções iterativas de uni-dimensionais, como a função logística. Com este diagrama, dada uma condição inicial, é possível prever a longo prazo qual será o seu estado final (Gleick, 2011).

Dada uma função iterativa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o diagrama consiste na diagonal $x = y$, a curva da função f e ainda outra linha que representa as iterações da *cobweb*. O método usado para caracterizar o comportamento, dada uma condição inicial x_0 , é o seguinte:

1. Calcular o ponto do gráfico de f cuja abscissa é x_0 , ou seja, calcular $(x_0, f(x_0))$;
2. Traçar uma linha horizontal desde o ponto calculado anteriormente até à interseção com a diagonal, onde se obtém o ponto $(f(x_0), f(x_0))$;
3. Traçar uma linha vertical desde o ponto calculado anteriormente até à interseção com o gráfico de f , ou seja, calcular $(f(x_0), f(f(x_0)))$;
4. Repetir o segundo e terceiro ponto o número de iterações que se pretende.

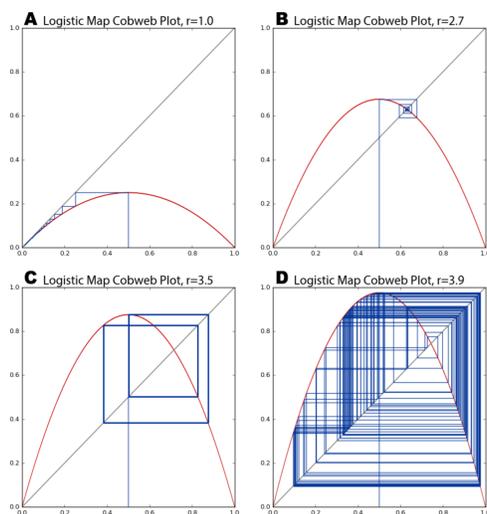


Figura 3.2: Função logística com diferentes taxas de crescimento e respetivos diagramas *cobweb*. Fonte: Boeing, 2016.

No caso do mapa logístico, poderemos ter três situações distintas:

- **ponto fixo**: o diagrama *cobweb* tem um formato de espiral que converge para o ponto no qual a curva da função f interseca a diagonal $y = x$ (Figura 3.2 A e B);
- **órbitas periódicas**: o diagrama *cobweb* tem o formato de ciclos retangulares fechados, se a órbita tiver período 2, então terá um retângulo no gráfico, se for de período 4, terá dois retângulos (Figura 3.2 C);
- **órbitas caóticas**: o diagrama *cobweb* irá preencher o gráfico com uma infinidade de retângulos sem um padrão aparente, resultando num comportamento caótico (Figura 3.2 D).

3.2 Sistemas Dinâmicos Contínuos

Um sistema dinâmico é considerado contínuo se evolui continuamente no tempo (Hirsch et al., 2012).

Definição 3.2.1 (Sistema Dinâmico Contínuo). *Um sistema dinâmico contínuo em S é um par (S, ϕ) , onde S é um subconjunto de \mathbb{R}^n e $\phi: \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ é uma função onde $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ satisfaz as seguintes condições:*

- $\phi_0: S \rightarrow S$ é a função identidade, i.e., $\phi_0(x) = x$ para todo $x \in S$;
- $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Repare-se que ϕ_t é uma função invertível com inversa ϕ_{-t} para todo $t \in \mathbb{R}$. De facto $\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_{-t} \circ \phi_t = \phi_0$. Se ϕ é de classe C^1 , ou seja, é uma função contínua, diferenciável com derivadas contínuas, então diz-se que o sistema dinâmico é suave. A função $\phi_t: S \rightarrow S$ designa-se por fluxo.

Tal como foram introduzidos alguns conceitos importantes na secção sobre sistemas dinâmicos discretos, introduzem-se também os correspondentes conceitos, mas no caso dos sistemas dinâmicos contínuos.

Definição 3.2.2 (Órbita). *Seja $x \in S$. O conjunto que representa a evolução no tempo do estado x designa-se por órbita ou caminho e representa-se por:*

$$O(x) = \bigcup_{t \geq 0} \{\phi_t(x)\}.$$

Definição 3.2.3 (Pontos Periódicos). *Diz-se que um estado $x \in S$ é um ponto periódico com período $T > 0$ se $\phi_T(x) = x$ e $\phi_t(x) \neq x$, para $0 < t < T$, ou seja, T é o primeiro instante, em que se verifica a desigualdade.*

A órbita de um ponto periódico denomina-se por órbita periódica.

Definição 3.2.4 (Equilíbrio). *Diz-se que $x \in S$ é um equilíbrio ou ponto fixo se $\phi_t(x) = x$ para todo $t \geq 0$.*

3.2.1 Fluxos de Equações Diferenciais

Seja U um aberto de \mathbb{R}^n e considere a equação diferencial

$$X' = F(X),$$

onde $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo de vetores Lipschitz, ou seja, existe $K > 0$ tal que

$$\|F(X) - F(Y)\| \leq K\|X - Y\|, \quad \forall X, Y \in U,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana. Diz-se que uma curva $X: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida em algum intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$ é uma solução da equação diferencial se, para todo $t \in J$, $X(t) \in U$ e

$$X'(t) = F(X(t)).$$

Assim, pensa-se geometricamente em $X'(t)$ como o vetor tangente à curva $X(t)$ em \mathbb{R}^n , para todo o $t \in J$, que é igual a $F(X(t))$, tal que F define um campo vetorial em \mathbb{R}^n . O problema central nas equações diferenciais é descobrir a solução para qualquer problema com valor inicial, isto é, determinar a solução da equação diferencial com condição inicial $X(t_0) = X_0$, onde $X_0 \in U$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Este problema é conhecido como o *problema de Cauchy*. Fazendo uma translação no tempo, pode-se assumir que $t_0 = 0$.

Poderá dar-se o caso de algumas equações diferenciais não lineares não terem soluções que satisfaçam certas condições iniciais. Ou, por outro lado, também poderá haver algumas equações que tenham diferentes soluções para as mesmas condições iniciais. Desta forma, é necessário impor algumas condições ao campo vetorial F para garantir a existência e unicidade de solução do problema de Cauchy. A demonstração do seguinte teorema pode ser encontrada em Hirsch et al., 2012 no Capítulo 17.

Teorema 5 (Existência e Unicidade das Soluções). *Considere-se o problema com a condição inicial*

$$X' = F(X), \quad X(t_0) = X_0,$$

onde $X_0 \in U$. Suponha-se que $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é Lipschitz. Então, o problema com a condição inicial tem uma solução que é única. Ou seja, existe um $a > 0$ e uma curva

$$\tilde{X}: (t_0 - a, t_0 + a) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

que é solução da equação diferencial e satisfaz a condição inicial $X(t_0) = X_0$. Se $X: (t_0 - \tilde{a}, t_0 + \tilde{a}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $\tilde{a} > 0$, é outra solução da equação diferencial tal que $\tilde{X}(t_0) = X_0$, então $X(t) = \tilde{X}(t)$ para todo o t na interseção do domínio das soluções.

É usual escrever-se $X(t, X_0)$ para salientar que a solução tem condição inicial X_0 . A seguinte propriedade também será importante para complementar o teorema anterior. Estabelece que $X(t)$ depende continuamente da condição inicial. A demonstração do seguinte teorema pode ser encontrada em Hirsch et al., 2012 no Capítulo 17.

Teorema 6 (Dependência Contínua nas Condições Iniciais). *Considere a equação diferencial $X' = F(X)$ onde $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é Lipschitz. Suponha que $X(t)$ e $Y(t)$ são duas soluções desta equação definidas no intervalo fechado $[t_0, t_1]$ tal que $X(t), Y(t) \in U$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Então*

$$\|Y(t) - X(t)\| \leq K \|Y(t_0) - X(t_0)\| \exp(K(t - t_0))$$

para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Desta forma, é possível definir o fluxo associado a um campo vetorial F ,

$$\phi(t, X_0) := X(t),$$

onde $X: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é solução da equação diferencial com condição inicial $X(t_0) = X_0 \in U$. Segue também do teorema da dependência contínua das condições iniciais em que o fluxo é contínuo.

Corolário 1. *O fluxo ϕ associado ao campo vetorial F é contínuo.*

Exemplo 3.2.1. *Seja $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o campo vetorial definido por $F(x, y) = (ax - by, bx + ay)$. A solução do problema de Cauchy é $X(t) = e^{at}R_{bt}X_0$ onde $X_0 \in \mathbb{R}^2$ é qualquer condição inicial e R_{bt} é a matriz de rotação*

$$\begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}.$$

O fluxo irá ser o seguinte:

$$\phi_t(X_0) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} X_0.$$

Se $a = 0$ então o fluxo tem uma órbita periódica. Se $a < 0$ então as órbitas convergem para $X = 0$. Se $a > 0$ as órbitas divergem.

Capítulo 4

Bucket Brigades com Velocidades Dependentes

No modelo simples das BB as velocidades v_i do trabalhador i dependem apenas da sua posição na linha, ou seja, v_i é uma função da posição x_i . No entanto, quando se pensa na realidade, é natural pensar que a velocidade de trabalhadores pode depender dos restantes trabalhadores da linha. Analise-se o caso que o trabalhador i se apercebe que o seu antecessor se está a aproximar. Então, o trabalhador i poderá aumentar a sua velocidade de trabalho para evitar que haja um bloqueio na linha. Ou seja, cada trabalhador está constantemente a decidir se deve aumentar, diminuir ou manter a sua velocidade. Desta forma, pretende-se considerar o caso em que as velocidades dos trabalhadores não dependem apenas deles próprios, mas também dos seus antecessores e sucessores. Pretende-se mesmo assumir que a velocidade depende de todos os trabalhadores da linha. Assim, não se vai ter uma função $x_i \mapsto v_i(x_i)$, mas sim uma função $X \mapsto v_i(X)$ onde $X = (x_1, \dots, x_n)$ é o vetor das posições dos n trabalhadores.

Seja

$$M = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1\},$$

o espaço de configurações. Tal como no modelo simples das BB, iremos assumir hipóteses gerais: as funções $v_i: M \rightarrow \mathbb{R}$ são Lipschitz e, conseqüentemente, limitadas e existe $k > 0$ tal que

$$0 < k < v_i(X), \quad \forall X \in M.$$

A evolução das posições ao longo da linha ocorre no espaço de configurações M ,

$$X(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t)) \in M, \quad \forall t \geq 0.$$

Dada uma configuração inicial $X_0 = X(0) \in M$, a evolução de $X(t)$ é obtida da seguinte maneira. Entende-se por *instante de reset* o primeiro instante no tempo $t_r \geq 0$ tal que

$$x_n(t_r) = 1.$$

Ou seja, o primeiro momento no tempo em que o último trabalhador chega ao final da linha. O instante de *reset* é uma função da condição inicial X_0 , portanto pode-se escrever $t_r(X_0)$. Antes do momento de *reset*, o último trabalhador avança na linha de acordo com a equação diferencial

$$x'_n(t) = v_n(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad 0 \leq t \leq t_r.$$

Segue da hipótese de v_n ser limitada inferiormente por $k > 0$ que

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t v_n(x_1(s), \dots, x_n(s)) ds > x_n(0) + tk.$$

Portanto, o último trabalhador chegará em tempo finito ao final da linha, uma vez que se desloca com velocidade superior a k . Os restantes trabalhadores também se deslocam ao longo da linha com as respectivas velocidades v_i . No entanto, podem ser bloqueados pelos seus sucessores, assumindo a velocidade destes. Assim, para $0 \leq t \leq t_r$ e $i = 1, \dots, n-1$, tem-se

$$x'_i(t) = \begin{cases} v_i(x_1(t), \dots, x_n(t)), & x_i(t) < x_{i+1}(t), \\ \min\{v_i(x_1(t), \dots, x_n(t)), v_{i+1}(x_1(t), \dots, x_n(t))\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

No momento exato do *reset* $t = t_r$, cada trabalhador assume instantaneamente a posição do seu antecessor, ou seja,

$$x_i(t_r^+) = \lim_{t \rightarrow t_r^+} x_i(t) = x_{i-1}(t_r), \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Em relação ao primeiro trabalhador, este regressa ao início da linha:

$$x_1(t_r^+) = \lim_{t \rightarrow t_r^+} x_1(t) = 0.$$

Com as novas posições $X(t_r^+)$ após o momento de *reset*, a evolução de $X(t)$ continua até que o último trabalhador chegue novamente ao final da linha. Desta forma, obtém-se uma sequência não-decrescente de tempos de *reset* $(t_r^{(n)})_{n \geq 1}$ tal que

$$t_r^{(n)} = \min\{t \geq t_r^{(n-1)} : x_n(t) = 1\},$$

onde se estipula $t_r^{(0)} = 0$. Designa-se por *ciclo* um intervalo de tempo entre dois instantes de *reset* consecutivos.

Observe-se o exemplo da Figura 4.1 de uma linha com dois trabalhadores onde está representada a evolução das funções $x_i(t)$ ao longo do tempo.

4.1 Espaço de Configurações

O espaço de configurações M é compacto e convexo. De facto, M é um n -simplex quando visto numa coordenadas apropriadas, ou seja, nas coordenadas que

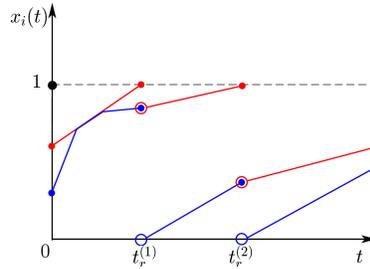


Figura 4.1: Evolução de $x_1(t)$ (linha azul) e $x_2(t)$ (linha vermelha) ao longo do tempo.

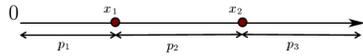


Figura 4.2: Notação de distâncias.

registam a distância entre posições sucessivas (Figura 4.2). Seja p_i a distância entre o trabalhador i e o seu antecessor $i - 1$, isto é,

$$p_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n + 1.$$

Convenciona-se que $x_0 = 0$ e $x_{n+1} = 1$. Repare que $x_i = p_1 + \dots + p_i$ para $i = 1, \dots, n + 1$. Seja $P = (p_1, \dots, p_{n+1})$. Então o espaço de configurações também poderá ser escrito com as novas coordenadas da seguinte forma

$$M = \{P \in \mathbb{R}_+^{n+1} : p_1 + \dots + p_{n+1} = 1\},$$

onde \mathbb{R}_+^{n+1} é o ortante não-negativo de \mathbb{R}^{n+1} . Para simplificar a notação, optou-se por usar a mesma letra M para representar o espaço de configurações nas novas coordenadas. Note-se que M é um n -simplex. Como a convexidade é invariante por transformações lineares, conclui-se que M é um conjunto compacto e convexo. O n -simplex tem n faces representadas por $M^{(i)} = \{P \in \mathbb{R}_+^{n+1} : P_i = 0\}$. Cada face é um $(n - 1)$ -simplex.

Veja-se o caso particular de uma linha onde apenas existem dois trabalhadores ($n = 2$). Então o espaço de configurações nas novas coordenadas é 2-simplex $M = \{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3 : p_1 + p_2 + p_3 = 1\}$, ou seja, o triângulo formado pelos vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, como se pode ver na Figura 4.3.

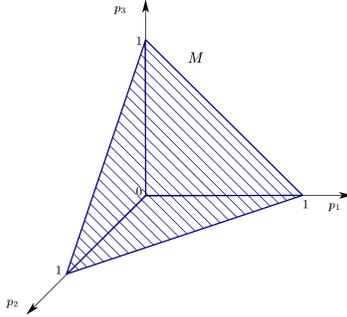


Figura 4.3: Exemplo de espaço de configurações M com novas coordenadas e com 2 trabalhadores.

4.2 Campo Vetorial F e o Fluxo das *Bucket Brigades*

Seja $F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ o campo vetorial $F = (F_1, \dots, F_n)$, onde

$$F_i(X) = \begin{cases} v_i(X), & x_i < x_{i+1} \\ \min\{v_i(X), v_{i+1}(X)\}, & x_i = x_{i+1} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

e

$$F_n(X) = v_n(X).$$

Como no interior de M , $F_i(X) = v_i(X)$ e as funções v_i são Lipschitz por hipótese, então F também é Lipschitz no interior de M . Na fronteira de M , o campo F também é Lipschitz, pois é igual ao mínimo de duas funções que são Lipschitz. Assim, as condições dos teoremas do capítulo anterior estão verificadas (Teoremas 5 e 6).

Do teorema da existência e unicidade das soluções (Teorema 5) segue que, dada uma condição inicial $X_0 \in M$, a solução $X(t; X_0)$ está bem definida para $t \in [0, t_r(X_0)]$. Por outro lado, como o fluxo associado a F é contínuo, pelo Corolário 1, e a função $X_0 \mapsto t_r(X_0)$ é também contínua, conseqüentemente a função $X_0 \mapsto X(t_r(X_0), X_0)$ é contínua em M , uma vez que é uma composição de funções contínuas. Designar-se-á esta função contínua por $\psi: M \rightarrow M$ onde

$$\psi(X_0) = X(t_r(X_0); X_0).$$

Veja-se na Figura 4.4 vários exemplos de fluxos no espaço de configurações M com diferentes condições iniciais.

4.3 Transformação no Momento de *Reset*

Seja

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in M: x_1 = 0\}$$

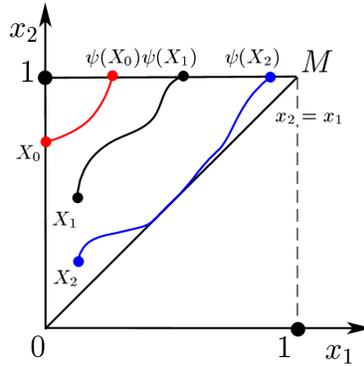


Figura 4.4: Espaço de configurações M com diferentes fluxos associados a diferentes condições iniciais X_i , numa linha com 2 trabalhadores

o conjunto designado por *espaço de estados*. Os pontos de Ω representam todas as configurações na linha onde o primeiro trabalhador se encontra no início. No espaço de estados define-se a seguinte transformação $f: \Omega \rightarrow \Omega$ dada por

$$f(X) = R \circ \psi(X),$$

onde ψ é a função definida na secção anterior e R é a transformação linear

$$R(x_1, \dots, x_n) = (0, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Ou seja, R é a transformação responsável pela *backward part*, i.e., no instante de *reset* cada trabalhador assume a posição do seu antecessor e o primeiro trabalhador volta ao início da linha.

Portanto, (Ω, f) é um sistema dinâmico discreto, referido como o *sistema dinâmico associado ao bucket brigades*.

Teorema 7. *A transformação $f: \Omega \rightarrow \Omega$ tem um ponto fixo $X^* \in \Omega$.*

Demonstração. Como f é uma composição de funções contínuas, conclui-se que f é também uma transformação contínua. Sendo Ω uma face de M , é compacto e convexo uma vez que é um $(n - 1)$ -simplex. Portanto, segue do Teorema de Brouwer que f tem um ponto fixo em Ω . □

Desta forma, ficou provado que, mesmo que a velocidade de cada trabalhador dependa dos restantes trabalhadores, a linha terá um ponto fixo, $X^* = f(X^*)$, i.e., se os trabalhadores iniciarem o seu trabalho na posição X^* então, no momento de *reset*, irão sempre voltar a X^* . Veja-se o exemplo de uma linha com dois trabalhadores na Figura 4.5.

Este teorema generaliza o Teorema 1 que se encontra em Bartholdi III and Eisenstein, 1996, pois considera-se que as velocidades dependem das diversas

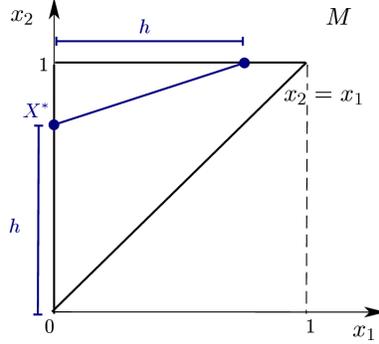


Figura 4.5: Linha com 2 trabalhadores com um ponto fixo $X^* = (0, h)$.

posições dos trabalhadores, ao contrário de estudos anteriores, onde a velocidade v_i depende apenas de x_i . Este resultado é novo e não se encontra publicado na literatura.

4.4 Ausência de Bloqueios numa Configuração em Equilíbrio

Seja X^* o ponto fixo do sistema dinâmico associado ao BB. Em Bunimovich, 2001 demonstra-se que no modelo simples BB correspondente com tempo contínuo, a órbita não apresenta qualquer bloqueio, ou seja, não tem tempos de bloqueio.

No entanto, será que, tendo uma função v_i que depende não só de um trabalhador, mas de todos os trabalhadores da linha, se continua a verificar esta propriedade?

Considere-se a seguinte notação, $x_i(t; X)$, que representa a posição do trabalhador i no instante t partindo de X .

Proposição 1. *(Ausência de bloqueios numa configuração em equilíbrio para $t \in [0, t_R]$): Seja $X^* \in \Omega$ tal que $f(X^*) = X^*$. Então para todo $1 \leq i < n$,*

$$x_{i+1}(t; X^*) > x_i(t; X^*), \forall t \in [0, t_R]$$

Demonstração. Por absurdo, suponha-se que existe $i = 1, \dots, n-1$ e $t' \in [0, t_R]$ tal que

$$x_{i+1}(t'; X^*) \leq x_i(t'; X^*).$$

Esta demonstração divide-se em dois casos:

- $t' < t_R$:

Como $t' \in [0, t_R[$ e $v_i(X) > 0$ tem-se que

$$x_i(t'; X^*) < x_i(t_R; X^*) = x_{i+1}^* < x_{i+1}(t'; X^*),$$

que implica que $x_i(t'; X^*) < x_{i+1}(t'; X^*)$, que é absurdo.

- $t' > 0$: Como $t' \in]0, t_R]$ e $v_i(X) > 0$ tem-se que

$$x_i(t'; X^*) \leq x_i(t_R; X^*) = x_{i+1}^* < x_{i+1}(t'; X^*),$$

que implica que $x_i(t'; X^*) < x_{i+1}(t'; X^*)$, que é absurdo.

□

Desta forma, ficou demonstrada a existência de um ponto fixo e a ausência de bloqueios numa linha BB onde as velocidades dos trabalhadores dependem das posições de todos os trabalhadores da linha. A ausência de bloqueios sugere que sob a condição de ordenação dos trabalhadores do mais lento para o mais rápido, o ponto fixo existente é único e que as órbitas irão convergir para esse ponto X^* . A condição de ordenação, introduzida na secção 2.2, refere que

$$\sup_{X \in M} \left(\frac{v_i(X)}{v_j(X)} \right) < 1 \quad \text{quando } i < j.$$

Assim, sugere-se a demonstração destes dois resultados como trabalho futuro.

Capítulo 5

Modelo BB com Dois Trabalhadores e um Ponto Crítico

5.1 Explicação e Motivação do Modelo

O caso mais simples do modelo BB é quando a linha tem apenas dois trabalhadores e as suas velocidades são constantes, com

$$v_1 < v_2.$$

A dinâmica desta linha é explicada em Bartholdi III et al., 1999 juntamente com o exemplo de uma linha com 3 trabalhadores. Para motivar a variante que será introduzida na próxima secção, segue-se uma descrição do modelo simples com dois trabalhadores.

Comece-se por deduzir a função f , introduzida na secção 4.3 que determina a posição para a qual o trabalhador 2 se vai deslocar no instante de *reset*. Para calcular o instante de *reset* da linha é necessário calcular o tempo que falta para o trabalhador 2 terminar as tarefas. É intuitivo que

$$t_r = \frac{1 - x_2}{v_2}.$$

Neste instante o trabalhador 2 vai imediatamente para a posição do seu antecessor, que está na posição $v_1 t_r$. Assim, a função $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ será a seguinte

$$f(x) = v_1 \frac{1 - x}{v_2}, \quad (5.1)$$

onde x é a posição onde o trabalhador 2 se encontrava no instante de *reset* anterior. Escreva-se $f(x) = ax + b$, onde $a = -\frac{v_1}{v_2}$ e $b = \frac{v_1}{v_2}$. Demonstrar que f tem um único ponto fixo e qualquer órbita converge para este ponto é simples. Comece-se por provar o seguinte lema.

Lema 2. $f^n(x) = a^n x + b(1 + a + \dots + a^{n-1}), \quad \forall n \geq 1$

Demonstração. Para $n = 1$ é verdade pois tem-se $f(x) = ax + b$. Assumindo que para n é verdade então vai-se provar por indução que para $n + 1$ também continua a ser verdade:

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) &= f(f^n(x)) = f(a^n x + b(1 + a + \dots + a^{n-1})) \\ &= a(a^n x + b(1 + a + \dots + a^{n-1})) + b \\ &= a^{n+1}x + b(a + \dots + a^n) + b \\ &= a^{n+1}x + b(1 + a + \dots + a^n), \end{aligned}$$

□

Assim, dado $x_0 \in [0, 1]$ e $|a| < 1$, sabendo que $x_n = a^n x_0 + b(1 + a + \dots + a^{n-1})$ calcule-se o limite de x_n quando n vai para o infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a^n \right) x_0 + b \sum_{k=0}^{\infty} a^k \\ &= 0 \times x_0 + b \frac{1}{1-a} \\ &= \frac{b}{1-a}. \end{aligned}$$

Conclui-se que f tem um único ponto fixo x^* e que é um atrator,

$$x^* = \frac{b}{1-a} = \frac{\frac{v_1}{v_2}}{1 + \frac{v_1}{v_2}} = \frac{v_1}{v_1 + v_2}.$$

Na Figura 5.1 é possível ver um exemplo de uma linha de dois trabalhadores que estão ordenados pela velocidade, onde a órbita é convergente.

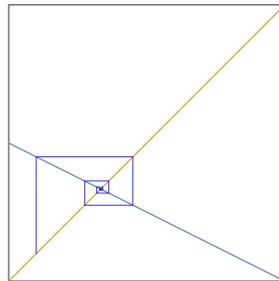


Figura 5.1: Linha com dois trabalhadores e uma órbita convergente.

Usando a expressão do ponto fixo x^* pode-se calcular a taxa de produção da linha:

$$\begin{aligned}
 \text{taxa de produção} &= \frac{1}{\text{tempo do ciclo}} \\
 &= \frac{\text{velocidade do trabalhador 2}}{\text{distância percorrida pelo trabalhador 2}} \\
 &= \frac{v_2}{1 - \frac{v_1}{v_1+v_2}} \\
 &= v_1 + v_2.
 \end{aligned}$$

5.2 Variante do Modelo Simples com Dois Trabalhadores

Se se considerar o caso real, os trabalhadores não conseguem manter sempre a velocidade de trabalho devido a vários fatores. Um desses fatores poderá ser o facto de o primeiro trabalhador se ter atrasado e o último trabalhador ter de ir buscar o trabalho a uma estação antes da que este está habituado. Desta forma, este, por já não realizar as tarefas daquela estação frequentemente e ter desaprendido, poderá ter uma velocidade média de trabalho mais baixa do que a normal.

Assim, introduz-se uma variação no modelo simples que capte a variabilidade da velocidade dos trabalhadores dependendo do local da linha onde é realizado o *reset*. Defina-se a seguinte notação

- c : ponto crítico pertencente ao intervalo $]0, 1[$;
- v_1^- : velocidade sub-crítica do trabalhador 1, ou seja, velocidade do trabalhador 1 quando, no momento de *reset*, este se encontra antes do ponto crítico;
- v_1^+ : velocidade super-crítica do trabalhador 1, ou seja, velocidade do trabalhador 1 quando, no momento de *reset*, este se encontra depois do ponto crítico;
- v_2^- : velocidade sub-crítica do trabalhador 2, ou seja, velocidade do trabalhador 2 quando este inicia o trabalho antes do ponto crítico;
- v_2^+ : velocidade super-crítica do trabalhador 2, ou seja, velocidade do trabalhador 2 quando este inicia o trabalho depois ou no ponto crítico.

Face ao modelo simples, assumem-se as seguintes hipóteses nas velocidades:

1. $v_1^- < v_1 < v_1^+$ e $v_2^- < v_2 < v_2^+$: ordenar as velocidades sub-crítica e super-crítica por trabalhador;
2. $v_1^- < v_2^-$: ordenação das velocidades sub-críticas;

3. $v_1^+(1-c) < v_2^+$: ordenação das velocidades super-críticas.

As condições de ordenação das velocidades garantem que não há bloqueios na linha. Por exemplo, a última condição garante que se a troca foi realizada depois do ponto crítico, então o trabalhador 1 não é bloqueado pelo trabalhador 2.

Assim, procedendo analogamente ao modelo simples, obtém-se a seguinte função $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por ramos, que representa a posição do trabalhador 2 após o instante de *reset*:

$$f(x) = \begin{cases} \mu^-(1-x), & x < c \\ \mu^+(1-x), & x \geq c, \end{cases}$$

onde $\mu^\pm = \frac{v_1^\pm}{v_2^\pm}$. Segue das hipóteses das velocidades que

$$\mu^- < 1 \quad \text{e} \quad \mu^+ < \frac{1}{1-c}.$$

O gráfico da função f pode ser observado nas Figuras 5.2 e 5.3.

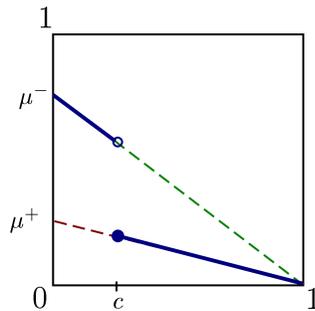


Figura 5.2: Função f com $\mu^- > \mu^+$.

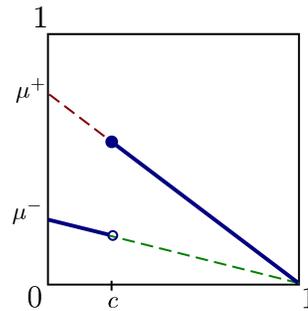


Figura 5.3: Função f com $\mu^- < \mu^+$.

5.3 Diferentes Cenários do Modelo

Pretende-se perceber se, nestas condições, a variante do modelo simples também é auto-balanceada e, caso se verifique, calcular a respetiva taxa de produção da linha e comparar com a taxa de produção do modelo simples.

Com esse objetivo em vista, com a ajuda do *software Mathematica*, analisou-se esta nova função f variando os cinco fatores anteriormente enumerados e também a condição inicial x_0 , que caracteriza a posição inicial do trabalhador 2.

5.3.1 Cenário: $\mu^- > \mu^+$

Veja-se o caso em que

$$\mu^- > \mu^+ \Leftrightarrow \frac{v_1^+}{v_1^-} < \frac{v_2^+}{v_2^-}. \quad (5.2)$$

Sabe-se à partida que o rácio $\frac{v_i^+}{v_i^-}$ é sempre maior que 1 e interpreta-se como a vontade do trabalhador i fazer a troca à direita do ponto crítico. Pela desigualdade anterior (5.2) pode-se concluir que o trabalhador 2 prefere realizar a troca à direita do ponto crítico quando comparado com a vontade do trabalhador 1.

Atribuíram-se os seguintes valores, $\mu^- = \frac{1}{2}$, $\mu^+ = \frac{1}{3}$, sendo o ponto crítico $c = 0.5$ e condição inicial $x_0 = 0.1$. Então, obtém-se a função representada na Figura 5.4 onde se observa uma órbita que converge para um ponto, independentemente do valor que x_0 tomar. No entanto, se $c \in [0.2, 0.4]$, já terá uma órbita periódica de período 2 (Figura 5.5). Ainda assim, se c tomar um valor que implique a interseção da função f com a reta laranja representada nos gráficos e x_0 for suficientemente perto do ponto de interseção, então poderá ter uma órbita convergente (Figura 5.6). Este comportamento aparenta acontecer quando o ponto de convergência é próximo do ponto crítico.

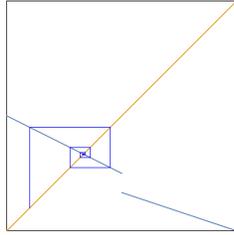


Figura 5.4: Caso em que $\mu^- > \mu^+$, $c = 0.5$ e $x_0 = 0.1$

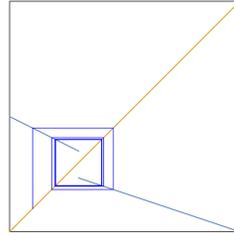


Figura 5.5: Caso anterior mas com um valor de $c = 0.3$ e $x_0 = 0.1$ sem ponto de convergência.

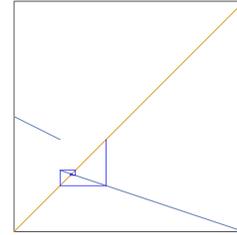


Figura 5.6: Caso anterior mas com um valor de $c = 0.21$ e $x_0 = 0.35$ com ponto de convergência.

Supondo que f tem uma órbita periódica de período 2, como na Figura 5.5, então os pontos periódicos $x^- < c < x^+$ da órbita periódica satisfazem a equação de ponto fixo $f^2(x^\pm) = x^\pm$, ou seja,

$$\mu^\mp(1 - \mu^\pm(1 - x^\pm)) = x^\pm. \quad (5.3)$$

Resolvendo estas equações, é fácil calcular a taxa de produção ao longo da

órbita periódica de período 2:

$$\text{taxa de produção} = \frac{2}{\text{tempo de 2 ciclos consecutivos}} \quad (5.4)$$

$$= \frac{2}{\frac{1-x^-}{v_2^-} + \frac{1-x^+}{v_2^+}}. \quad (5.5)$$

Pela equação (5.3) sabe-se que:

$$x^\pm = \frac{\mu^\mp - \mu^+ \mu^-}{1 - \mu^+ \mu^-}$$

e substituindo em (5.5) obtém-se:

$$\text{taxa de produção} = \frac{v_2^- v_2^+ - v_1^- v_1^+}{v_2^+ - v_1^+ + v_2^- - v_1^-}. \quad (5.6)$$

Um caso particular é quando o ponto crítico é igual ao ponto fixo do modelo simples, ou seja $c = x^* = v_1/(v_1 + v_2)$. Assumindo que as novas velocidades são uma pequena perturbação das velocidades anteriores, ou seja $v_1^\pm = v_1 \pm \delta_1$ e $v_2^\pm = v_2 \pm \delta_2$ com $\delta_1, \delta_2 > 0$ suficientemente pequenos, pode-se concluir que a órbita de período 2 existe e, substituindo as velocidades na expressão (5.6), obtém-se

$$\frac{v_2^2 - v_1^2 - (\delta_2^2 - \delta_1^2)}{v_2 - v_1}. \quad (5.7)$$

Como se sabe à partida que

$$\mu^- > \mu^+ \Leftrightarrow \frac{v_2}{v_1} < \frac{\delta_2}{\delta_1},$$

e como $\frac{v_2}{v_1} > 1$, então:

$$\delta_2 > \delta_1.$$

Da igualdade (5.7) pode-se concluir que a taxa de produção na variante do modelo simples diminui uma vez que,

$$\frac{v_2^2 - v_1^2 - (\delta_2^2 - \delta_1^2)}{v_2 - v_1} < \frac{v_2^2 - v_1^2}{v_2 - v_1} = v_1 + v_2.$$

Estas interpretações só fazem sentido quando existem pequenas variações das velocidades do trabalhador 1 e 2 face ao modelo simples.

5.3.2 Cenário: $\mu^- < \mu^+$

Veja-se agora o caso em que

$$\mu^- < \mu^+ \Leftrightarrow \frac{v_1^+}{v_1^-} < \frac{v_2^+}{v_2^-}. \quad (5.8)$$

Neste cenário, pela a desigualdade anterior (5.8), conclui-se que o trabalhador 1 prefere realizar a troca à direita do ponto crítico quando comparado com o trabalhador 2.

Nesta caso há dois sub-cenários:

1. $\mu^+ < 1$: não há órbitas caóticas;
2. $\mu^+ > 1$: poderá ter órbitas caóticas.

Comece-se no sub-cenário em que $\mu^+ < 1$. Primeiro, considere-se o seguinte exemplo, $\mu^- = \frac{1}{4}$ e $\mu^+ = \frac{2}{5}$. Neste caso, qualquer que seja o valor de c e de x_0 a órbita irá convergir para um ponto fixo (Figura 5.7). Se o valor de μ^+ começar a aproximar-se de 1, obtém-se também uma órbita convergente. No entanto, dependendo do valor de c e x_0 , poderão ser necessárias mais iterações para chegar a esse ponto de convergência. Por exemplo, para $\mu^- = \frac{1}{4}$, $\mu^+ = 0.95$, $c = 0.3$ e $x_0 = 0.3$ tem-se o representado na Figura 5.8.

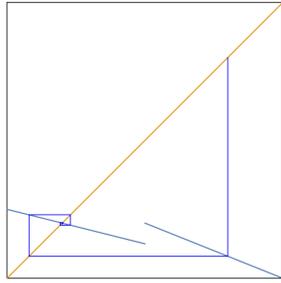


Figura 5.7: Caso em que $\mu^+ < 1$, $c = 0.5$ e $x_0 = 0.8$ com órbita convergente.

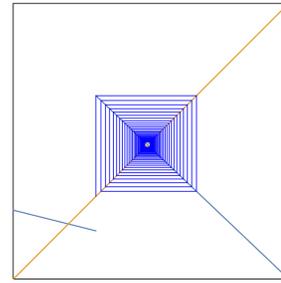


Figura 5.8: Caso em que $\mu^+ < 1$, $c = 0.3$ e $x_0 = 0.3$

Pode-se também analisar o caso em que, se o trabalhador 2 iniciar o trabalho depois do ponto crítico, o trabalhador 1 vai ter uma velocidade maior que o trabalhador 2 ($\mu^+ > 1$). A explicação para este acontecimento deve-se ao facto de o segundo trabalhador se encontrar a uma maior distância do início da linha e o primeiro trabalhador sentir a necessidade de aumentar a sua velocidade para conseguir acompanhar o trabalho do seu colega. Veja-se o exemplo em que $\mu^- = \frac{1}{2}$ e $\mu^+ = \frac{6}{5}$. Dependendo do valor que c e x_0 tomam, poderá ter ponto fixo se a linha laranja intersectar o primeiro ramo da função (Figura 5.9) ou poderá ter uma órbita de período 3 (Figura 5.10) ou uma órbita caótica (Figura 5.11).

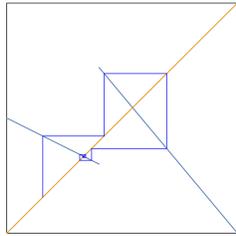


Figura 5.9: Caso em que $\mu^+ > 1$ e $c = 0.4$.

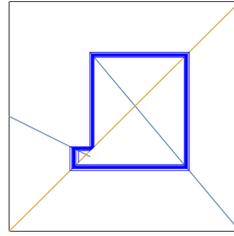


Figura 5.10: Caso em que $\mu^+ > 1$, $c = 0.35$ e $x_0 = 0.3$.

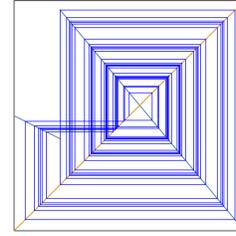


Figura 5.11: Caso em que $\mu^+ > 1$ e $c = 0.2$ e $x_0 = 0.5$.

5.3.3 Cenário: $\mu^- = \mu^+$

Por fim, observe-se o caso em que

$$\mu^- = \mu^+ \Leftrightarrow \frac{v_1^+}{v_1^-} = \frac{v_2^+}{v_2^-}. \quad (5.9)$$

Neste cenário, pela desigualdade 5.9, conclui-se que a preferência de realizar a troca à direita do ponto crítico é igual para os dois trabalhadores. Assim, obtém-se um gráfico similar ao do modelo simples com dois trabalhadores e independentemente dos valores de c e x_0 , a órbita irá convergir para um ponto fixo. Veja-se o exemplo em que $\mu^- = \mu^+ = \frac{1}{3}$ na Figura 5.12.

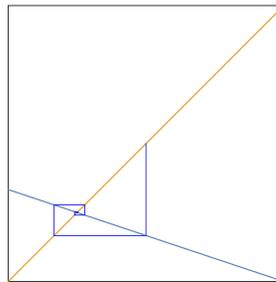


Figura 5.12: Caso em que $\mu^- = \mu^+$, $c = 0.2$ e $x_0 = 0.5$

Com estas simulações é possível concluir que, mesmo que os trabalhadores tenham duas velocidades associadas existem diversos casos em que a órbita irá convergir para um ponto fixo. No entanto, poderão existir cenários em que a órbita poderá ser periódica de período 2, de período 3 ou então ter um atrator caótico. É importante salientar que estes cenários foram observados numericamente e que futuramente deverá ser feito um estudo analítico que comprove estas observações.

Capítulo 6

Conclusão

O presente TFM teve como objetivo demonstrar e reforçar, usando a teoria de sistemas dinâmicos, que o modelo das *bucket brigades* é um bom modelo a ser implementado nas linhas de produção e nos organizadores de pedidos, visto que é auto-balanceado e, por isso, não exige uma gestão exaustiva das linhas.

Conseguiu-se provar que, mesmo que as velocidades de cada trabalhador não dependam apenas de eles próprios, mas dependam também de todos os trabalhadores das linhas, a linha continuará a ter um ponto fixo e existirá uma ausência de bloqueios. O que sugere à partida que, se os trabalhadores respeitarem a condição de ordenação por velocidades, o ponto fixo será único e as posições dos trabalhadores vão convergir para esse ponto, ficando como sugestão a demonstração deste resultado.

Posteriormente, também se construiu e analisou do ponto de vista numérico um modelo BB numa linha com dois trabalhadores, onde ambos têm duas velocidades distintas que dependem de onde é realizada a troca de trabalho na linha. Conclui-se que existem vários cenários possíveis: um único ponto fixo atrator, uma órbita periódica de período 2 ou de período 3 atratora ou então um atrator caótico. Também se observou um caso interessante, que se dá quando existem pequenas variações das velocidades dos trabalhadores face ao modelo simples. Neste caso verificou-se que estas pequenas variações originam um decréscimo na taxa de produção. Este estudo foi apenas numérico e por isso sugere-se como trabalho futuro um estudo analítico deste modelo.

Bibliografia

- Armbruster, D., Gel, E. S. and Murakami, J. (2007), ‘Bucket brigades with worker learning’, *European Journal of Operational Research* **176**(1), 264–274.
- Bartholdi III, J. and Hackman, S. (2018), *Warehouse & distribution science: release 0.96. Atlanta, GA: The Supply Chain and Logistics Institute, School of Industrial and Systems Engineering, Georgia Institute of Technology.*
- Bartholdi III, J. J., Bunimovich, L. A. and Eisenstein, D. D. (1999), ‘Dynamics of two-and three-worker “bucket brigade” production lines’, *Operations Research* **47**(3), 488–491.
- Bartholdi III, J. J. and Eisenstein, D. D. (1996), ‘A production line that balances itself’, *Operations Research* **44**(1), 21–34.
- Bartholdi III, J. J. and Eisenstein, D. D. (2006*a*), ‘Bucket brigades at mitsubishi consumer electronics america’. [Acedido: 09.10.2020].
URL: <https://www2.isye.gatech.edu/~jjb/bucket-brigades/case-studies/mitsubishi.html>
- Bartholdi III, J. J. and Eisenstein, D. D. (2006*b*), ‘Bucket brigades at reader’s digest’. [Acedido: 09.10.2020].
URL: <https://www2.isye.gatech.edu/~jjb/bucket-brigades/case-studies/readersdigest.html>
- Bartholdi III, J. J. and Eisenstein, D. D. (2006*c*), ‘Bucket brigades at reader’s digest’. [Acedido: 09.10.2020].
URL: <https://www2.isye.gatech.edu/~jjb/bucket-brigades.html>
- Bartholdi III, J. J. and Eisenstein, D. D. (2006*d*), ‘Bucket brigades at subway’. [Acedido: 09.10.2020].
URL: <https://www2.isye.gatech.edu/~jjb/bucket-brigades/case-studies/subway.html>
- Bartholdi III, J. J., Eisenstein, D. D. and Foley, R. D. (2001), ‘Performance of bucket brigades when work is stochastic’, *Operations Research* **49**(5), 710–719.
- Bartholdi III, J. J., Eisenstein, D. D. and Lim, Y. F. (2009), ‘Deterministic chaos in a model of discrete manufacturing’, *Naval Research Logistics (NRL)* **56**(4), 293–299.

- Boeing, G. (2016), ‘Visual analysis of nonlinear dynamical systems: chaos, fractals, self-similarity and the limits of prediction’, *Systems* **4**(4), 37–55.
- Boysen, N., Fliedner, M. and Scholl, A. (2007), ‘A classification of assembly line balancing problems’, *European Journal of Operational Research* **183**(2), 674–693.
- Bratcu, A. I. and Dolgui, A. (2005), ‘A survey of the self-balancing production lines (“bucket brigades”)', *Journal of Intelligent Manufacturing* **16**(2), 139–158.
- Bunimovich, L. A. (2001), ‘Dynamical systems and operations research: a basic model’, *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B* **1**(2), 209–218.
- Gleick, J. (2011), *Chaos: Making a new science*, Open Road Media.
- Granotto, G. F., Sgarbossa, F., Glock, C. H. and Grosse, E. H. (2019), ‘The effect of worker fatigue on the performance of a bucket brigade order picking system’, *IFAC-PapersOnLine* **52**(13), 2195–2200.
- Hirsch, M. W., Smale, S. and Devaney, R. L. (2012), *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, Academic Press.
- Kellogg, R. B., Li, T.-Y. and Yorke, J. (1976), ‘A constructive proof of the brouwer fixed-point theorem and computational results’, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **13**(4), 473–483.
- Lim, Y. F. (2011), ‘Cellular bucket brigades’, *Operations Research* **59**(6), 1539–1545.
- Resnick, S. I. (1992), *Adventures in stochastic processes*, Springer Science & Business Media.