LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Departamento de Matemática
Licenciatura em MAEG
Análise Matemática II - 2019/2020

Exame de Época Normal, 5 de junho de 2020

Duração: 2 horas e 15 minutos

1. [1,5 valores] Mostre que a série $\sum ne^{-n}$ é convergente e que[1]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n} \geq \frac{1}{e-1}.$$

2. Considere uma sucessão minorada $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

a. [1,0 valores] Mostre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, de limite nulo.
b. [1,5 valores] Mostre que a série $\sum u_n^2$ converge e que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 = u_1.$$

3. [2,0 valores] Mostre que a função

$$f : x \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{3^n}$$

é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que $f'(0) = 2$.

4. a. [1,0 valores] Determine constantes reais A e B tais que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}, \qquad \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

b. [1,5 valores] Determine o desenvolvimento em série de potências centradas em $x_0 = 0$ da função $f : x \to \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$, indicando em que intervalo o desenvolvimento é válido.

5. [1,5 valores] Seja $\mathcal{P}$ o conjunto dos polinómios de coeficientes reais P tais que $P(0) = 0$. Mostre que a aplicação d definida em $\mathcal{P}^2$ por

$$d(P_1, P_2) = \max\{|P_1'(X) - P_2'(X)| \, : \, x \in [0; 1]\}$$

é uma distância.

[1] não se pede o cálculo explícito da soma $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$

6. Considere a função definida pela expressão

$$f(x,y) = \frac{\ln(y^2 - x + 3) + \ln(4 - 4(x-3)^2 - y^2)}{\sqrt{(x-3)^2 + y^2 - 1}}.$$

a. [1,5 valores] Determine o domínio D de f e represente-o geometricamente.

b. [1,0 valores] Atribua um valor lógico à proposição

$$\exists \epsilon > 0,\ D \subset B_\epsilon((3,0)),$$

onde $B_\epsilon((3,0))$ designa a bola centrada no ponto de coordenadas $(3,0)$ e de raio $\epsilon > 0$.

7. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 \cos(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. [1,5 valores] Mostre que existe a derivada direcional de f no ponto $(0,0)$ segundo qualquer direção, mas que, ainda assim, f não é diferenciável nesse ponto.

b. [1,5 valores] Estude a continuidade de f no ponto $(0,0)$.

8. [2,0 valores] Prove por definição que $(0,0)$ é um ponto de sela da função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = (x - y^2)^2 - (x + y)^2.$$

9. a. [1,0 valores] Determine todas as funções u harmónicas tais que, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2xy.$$

b. [1,5 valores] Considere agora a função u definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$u(x,y) = x^2 y - \frac{1}{3} y^3 + 1.$$

Obtenha a função inteira f tal que $u = Re(f)$ e $f(i) = \frac{2}{3} - i$.