Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Departamento de Matemática
Licenciatura em MAEG
Análise Matemática II - 2021/2022

Exame de Época Normal, 6 de junho de 2022

Duração: 2 horas 15 minutos

1. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$, onde $a, b > 0$ são duas constantes.

a. [1,0 valores] Mostre que se $a \geq b$, a série $\sum u_n$ é grosseiramente divergente.
b. [1,5 valores] Mostre que se $a < b$, a série $\sum u_n$ é convergente.

2. a. [1,0 valores] Mostre que a função $S : x \to \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ está bem definida em $\mathbb{R}^+$.

b. [1,5 valores] Mostre que S é diferenciável em $\mathbb{R}^+$.

3. a. [2,0 valores] Calcule o raio de convergência R da série de potências

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

Determine igualmente a natureza da série para $x = -R$ e para $x = R$.

b. [2,0 valores] Desenvolva em série de potências centrada em $x_0 = 0$ a função definida por

$$f(x) = \ln(1 + 2x^2),$$

indicando o maior intervalo aberto em que o desenvolvimento é válido.

4. [1,5 valores] Seja f uma função injetiva e limitada e, para todo o $x, y \in \mathbb{R}$, seja

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|.$$

Mostre que que $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico e que, nesta métrica, $\mathbb{R}$ é um conjunto limitado.

5. Considere a função f definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

a. [1,5 valores] Mostre que f não é contínua em $(0,0)$.

b. [1,5 valores] Mostre que na origem f admite derivadas direcionais em todas as direções.

6. Seja $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ uma função tal que para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 1.$$

a. [1,5 valores] Seja $f(u,v) = g\Big(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2}\Big)$. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \dfrac{1}{2}$.

b. [1,0 valores] Deduza da alínea anterior a existência de uma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(x,y) = \frac{1}{2}(x-y) + h(x+y).$$

7. [2,0 valores] Identifique um mínimo local da função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = xy(x+y-1).$$

8. [2,0 valores] Seja $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}$ e f a função definida em Ω por

$$f(z) = \ln|z| + i \arctan\Big(\frac{Im(z)}{Re(z)}\Big).$$

Mostre que f é holomorfa em Ω.