ISEG Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Departamento de Matemática
Licenciatura em MAEG
Análise Matemática II - 2021/2022

Exame de Época de Recurso, 4 de julho de 2022

Duração: 2 horas 15 minutos

1. **[2,5 valores]** Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Utilizando o critério da razão, determine para que valores de α a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\alpha n}}{n!}.$$

é convergente.

2. Considere a sucessão de funções (f_n) onde, para todo o $n \in \mathbb{N}$, a função f_n está definida em $\mathbb{R}_0^+$ pela expressão

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^n}\right).$$

.

a. **[1,0 valores]** Estude a convergência pontual de (f_n) no intervalo $[0;1]$.
b. **[1,0 valores]** Estude a convergência uniforme de (f_n) no intervalo $[0;\delta]$, onde $\delta \in [0;1[$ é um número real fixado.
c. **[1,0 valores]** Estude a convergência uniforme de (f_n) no intervalo $[0;1]$.

3. **[2,5 valores]** Verifique para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a série $\sum_{n\geq 1} n(-1)^n x^n$ é convergente.

Para esses valores, calcule a respetiva soma.

4. Considere o conjunto $\mathcal{E} = \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ limitada}\}$, munido da norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|.$$

Considere ainda o conjunto $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{E} \,:\, f(0) = 0\}$.

a. **[1,0 valores]** Seja f_0 a função identicamente nula.
Mostre que qualquer bola centrada em f_0 contém elementos de $\mathcal{E} \setminus \mathcal{A}$.
O conjunto $\mathcal{A}$ é aberto?

b. **[1,0 valores]** Mostre que o conjunto $\mathcal{A}$ é fechado.

5. [3,0 valores] Estude a continuidade e a diferenciabilidade na origem da função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{2x^2+y^2}} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6. [2,5 valores] Seja $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ uma função tal que para todo o $(\tau, x) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau, x) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau, x) = 0.$$

Considere também a função $V \in C^2(\mathbb{R}^2)$ definida por

$$V(S,t) = e^{-\tau(t)} u(\tau(t), x(S, \tau(t))),$$

onde

$$\tau(t) = 1 - t \text{ e } x(S,t) = \ln(S) + \frac{1}{2}(1-t).$$

Calcule Mostre que $\dfrac{\partial V}{\partial t}$, $\dfrac{\partial V}{\partial S}$ e $\dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ e mostre que

$$\frac{\partial V}{\partial t} + S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial S} - V = 0.$$

7. [2,5 valores] Identifique e classifique os pontos críticos da função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = (x-y)^2 + x^3.$$

8. [2,0 valores] Considere a função [1]

$$u(x,y) = \sin(x)\cosh(y)$$

Encontre uma função inteira f tal que $\text{Re} f = u$ e $f(0) = i$.

[1] Recorde-se que $\cosh(z) := (e^z + e^{-z})/2$.