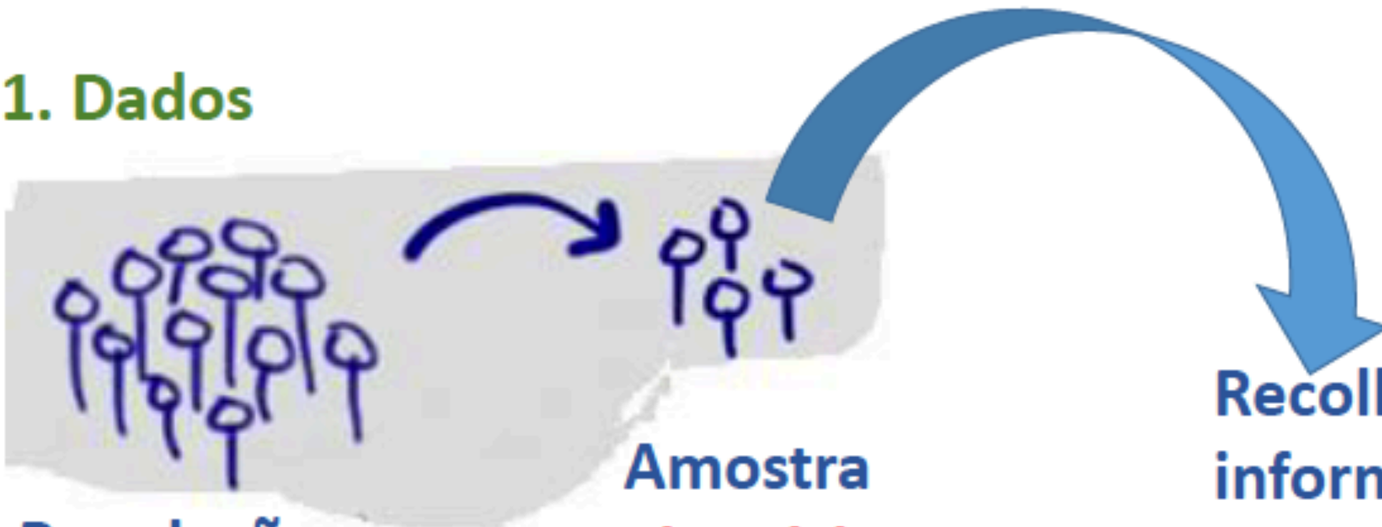
Testes de hipóteses

Intuição e exemplos

Resumo de conceitos base

Dados, população→ amostra

1. Dados



População

Amostra **aleatória**

Recolha de informação

Maçãs de um pomar	10 maçãs	Peso das maçãs
Saltos em comprimento de um atleta	20 saltos	Comprimento dos saltos
População de um concelho	50 residentes no concelho	Prática desporto

Determinar a distribuição

2. Distribuição que melhor representa o comportamento da população é conhecida

População	Questão de interesse	Distribuição
Maçãs de um pomar	Peso médio das maçãs do pomar	Normal Variância conhecida
Saltos em comprimento de um atleta	Variância do Comprimento dos saltos	Normal Variância desconhecida
População de um concelho	Proporção que pratica desporto	Bernoulli

Formular a hipotese

3. Hipóteses

São sempre sobre os valores dos parâmetros da população

Hipótese alternativa

NUNCA SOBRE OS VALORES DAS AMOSTRAS OU DAS ESTATÍSTICAS!

Hipótese nula

É a hipótese que se vai testar
Status Quo\Ausência de Efeito\Afirmação

Exemplos

3. Hipóteses

Hipótese nula

Hipótese alternativa

É a hipótese que se vai testar

Status Quo\Ausência de Efeito\Afirmação

$$\boldsymbol{\Theta}_0 \cup \boldsymbol{\Theta}_1 = \boldsymbol{\Theta} = \{\mu \in (-\infty, +\infty)\}$$

Questão de interesse

Peso médio das maçãs do pomar

$\boldsymbol{H_0}: \mu = 130\ grs$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \mu = 150\ grs$ **Hipótese simples contra simples**

$\boldsymbol{H_0}: \mu = 130\ grs$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \mu > 130\ grs$

$\boldsymbol{H_0}: \mu = 130\ grs$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \mu < 130\ grs$ **Hipóteses simples contra composta**

$\boldsymbol{H_0}: \mu = 130\ grs$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \mu \neq 130\ grs$

$\boldsymbol{H_0}: \mu \leq 130\ grs$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \mu > 130\ grs$ **Hipóteses composta contra composta**

$\boldsymbol{H_0}: \mu \geq 130\ grs$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \mu < 130\ grs$

3. Hipóteses

Hipótese nula

Hipótese alternativa

Questão de interesse

$$\boldsymbol{\Theta}_0 \cup \boldsymbol{\Theta}_1 = \boldsymbol{\Theta} = \{\sigma^2 \in (0, +\infty)\}$$

Variação do comprimento do salto de um atleta

$\boldsymbol{H_0}: \sigma^2 = 0.5\, mts$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \sigma^2 = 0.7\, mts$ $\quad$ Hipótese simples contra simples

$\boldsymbol{H_0}: \sigma^2 = 0.5\, mts$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \sigma^2 > 0.5\, mts$

$\boldsymbol{H_0}: \sigma^2 = 0.5\, mts$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \sigma^2 < 0.5\, mts$ $\quad$ Hipóteses simples contra composta

$\boldsymbol{H_0}: \sigma^2 = 0.5\, mts$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \sigma^2 \neq 0.5\, mts$

$\boldsymbol{H_0}: \sigma^2 \leq 0.5\, mts$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \sigma^2 > 0.5\, mts$ $\quad$ Hipóteses composta contra composta

$\boldsymbol{H_0}: \sigma^2 \geq 0.5\, mts$ $\quad$ $\boldsymbol{H_1}: \sigma^2 < 0.5\, mts$

3. Hipóteses

Hipótese nula

Hipótese alternativa

Questão de interesse

Prática de desporto pelos residentes de um concelho

$$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta = \{\theta \in [0, 1]\}$$

$H_0: \theta = 0.35$ $\quad$ $H_1: \theta = 0.4$ $\quad$ **Hipótese simples contra simples**

$H_0: \theta = 0.35$ $\quad$ $H_1: \theta > 0.35$

$H_0: \theta = 0.35$ $\quad$ $H_1: \theta < 0.35$ $\quad$ **Hipóteses simples contra composta**

$H_0: \theta = 0.35$ $\quad$ $H_1: \theta \neq 0.35$

$H_0: \theta \leq 0.35$ $\quad$ $H_1: \theta > 0.35$ $\quad$ **Hipóteses composta contra composta**

$H_0: \theta \geq 0.35$ $\quad$ $H_1: \theta < 0.35$

3. Hipóteses

Hipótese nula

Hipótese alternativa

Em resumo:

$$\boldsymbol{\Theta}_0 \cup \boldsymbol{\Theta}_1 = \boldsymbol{\Theta} \quad (*)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_0 \cap \boldsymbol{\Theta}_1 = \emptyset$$

Muito importante: - a **igualdade aparece sempre na H_0**

- valores que o parâmetro pode assumir em H_1 são complementares dos valores de H_0 $(*)$

Do espaço do parametro→espaço estatística teste

4. Escolha da estatística teste

Questão de interesse	Informação	Estatística teste
Peso das maçãs do pomar	Peso de cada maçã da amostra	Peso médio na **amostra** - $\bar{X}$
Variação no comprimento dos saltos	Comprimento de cada salto na amostra	Variância do comprimento dos saltos na **amostra** - S'^2
Proporção que pratica desporto	Número de pessoas que pratica desporto na amostra	Proporção na **amostra** que pratica desporto- $\bar{X}$

A distribuição da estatística teste e’ conhecida

5. Distribuição da estatística teste

Estatística teste	Distribuição
Peso médio na amostra - $\bar{X}$	$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ou $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
Variância do comprimento dos saltos na amostra - S'^2	$\frac{(n-1)S'^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

Mais exemplos

5. Distribuição da estatística teste

Estatística teste	Distribuição
$T = \bar{X} - \bar{Y}$ σ_X^2, σ_Y^2 **conhecidas**	$T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{m} + \dfrac{\sigma_Y^2}{n}}} \sim N(0,1)$
$T = \bar{X} - \bar{Y}$ σ_X^2, σ_Y^2 **desconhecidas**	$\dfrac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)\sqrt{\dfrac{(m-1)S_X'^2 + (n-1)S_Y'^2}{m+n-2}}} \sim t(m+n-2)$
$T = \dfrac{S_X'^2}{S_Y'^2}$	$\dfrac{S_X'^2}{S_Y'^2} * \dfrac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \sim F(m-1, n-1)$

Mais exemplos

5. Distribuição da estatística teste – populações Bernoulli

Estatística teste | **Distribuição**

Proporção na amostra que pratica desporto- $\bar{X}$

$$\frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} \dot{\sim} N(0,1)$$

Diferença de proporções amostrais

$$T = \bar{X} - \bar{Y}$$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\theta_X - \theta_Y)}{\sqrt{\frac{\theta_X(1-\theta_X)}{m} + \frac{\theta_Y(1-\theta_Y)}{n}}} \dot{\sim} N(0,1)$$

Decisão sobre a hipótese com base na amostra

6. Regra de decisão: Rejeitar $\boldsymbol{H_0}$ ou não rejeitar $\boldsymbol{H_0}$

Decisão é tomada tendo por referência a uma Região de Rejeição

Região de Rejeição\Crítica - W é um subconjunto do espaço amostra X, tal que:

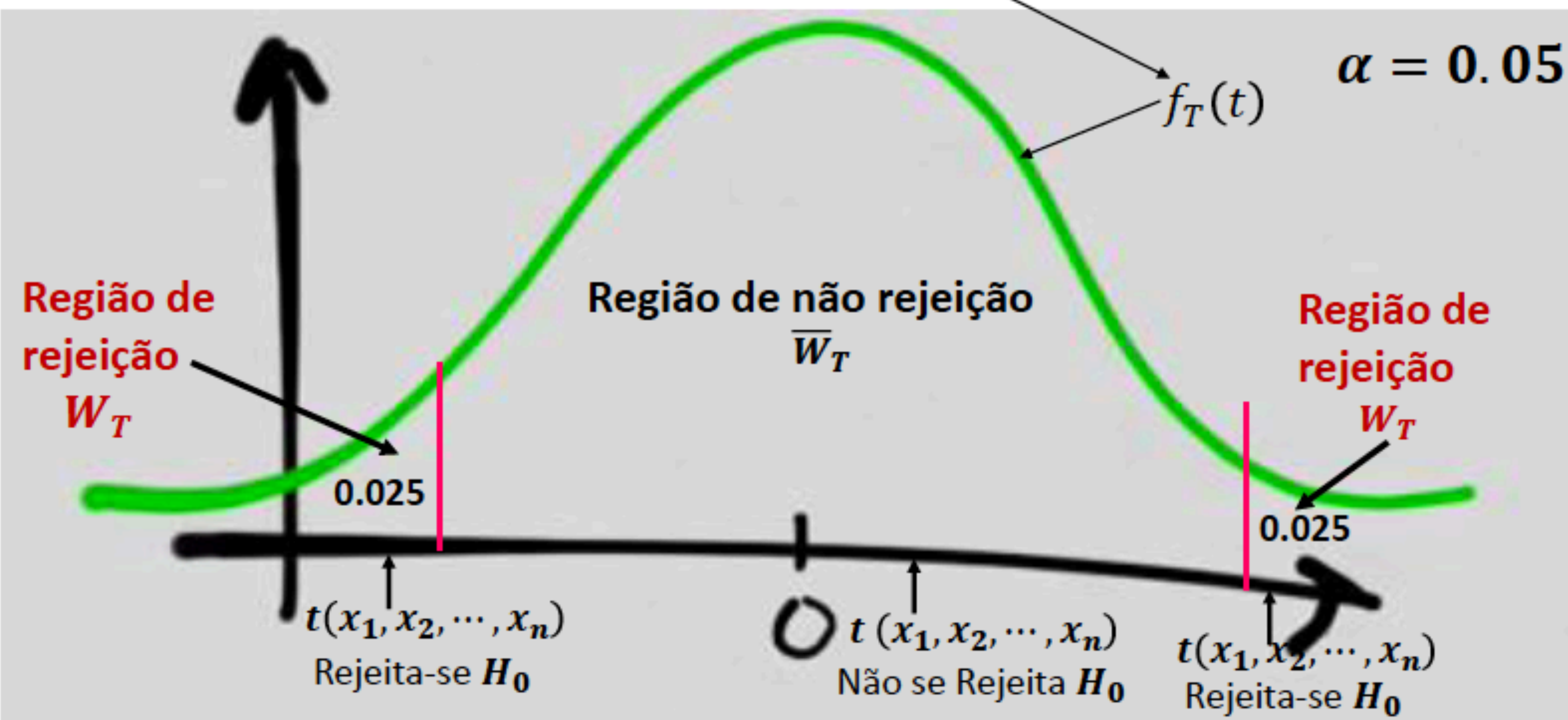
- se $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in W, rejeita - se\ \boldsymbol{H_0};$
- se $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \bar{W}, não\ se\ rejeita\ \boldsymbol{H_0}$

Notas: $W \cup \bar{W} = \mathbb{R}^n$ $\quad W \cap \bar{W} = \emptyset$

Atenção: como $W \subset \mathbb{R}^n$ pode ser complicado dizer se uma amostra particular pertence ou não a W. A utilização de uma estatística teste $\mathrm{T}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ e definição de uma região de rejeição W_T resolve esta dificuldade.

Avaliamos a distribuição por amostragem da estatística teste

Definido um **nível de significância α**, define-se a Região de Rejeição W_T com base na distribuição por amostragem da estatística teste T.



4 decisões possíveis em cada teste

Erro tipo 1: rejeitar H_0 e H_0 ser verdadeira

Erro tipo 2: não rejeitar H_0 e H_0 ser falsa

Situação Decisão tomada	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Rejeitar H_0	Erro de 1ª espécie	Decisão correcta
Não rejeitar H_0 (Aceitar)	Decisão correcta	Erro de 2ª espécie

Dimensão e potencia do teste

Dimensão do ensaio\P(erro 1ª espécie)

Considere−se $\boldsymbol{H_0}: \theta = \theta_0$ contra $\boldsymbol{H_A}: \theta = \theta_1$

$$P(rejeitar\,\boldsymbol{H_0}|\boldsymbol{H_0}\ verdadeira) = P\big((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in W_T|\theta = \theta_0\big) = \boldsymbol{\alpha}$$

P(Erro 2ª espécie)

$$P(não\ rejeitar\,\boldsymbol{H_0}|\boldsymbol{H_0}\ falsa) = P\big((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in \overline{W_T}|\theta = \theta_1\big) = \boldsymbol{1 - \beta}$$

$$P(rejeitar\,\boldsymbol{H_0}|\boldsymbol{H_0}\ falsa) = P\big((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in W_T|\theta = \theta_1\big) = \boldsymbol{\beta}$$

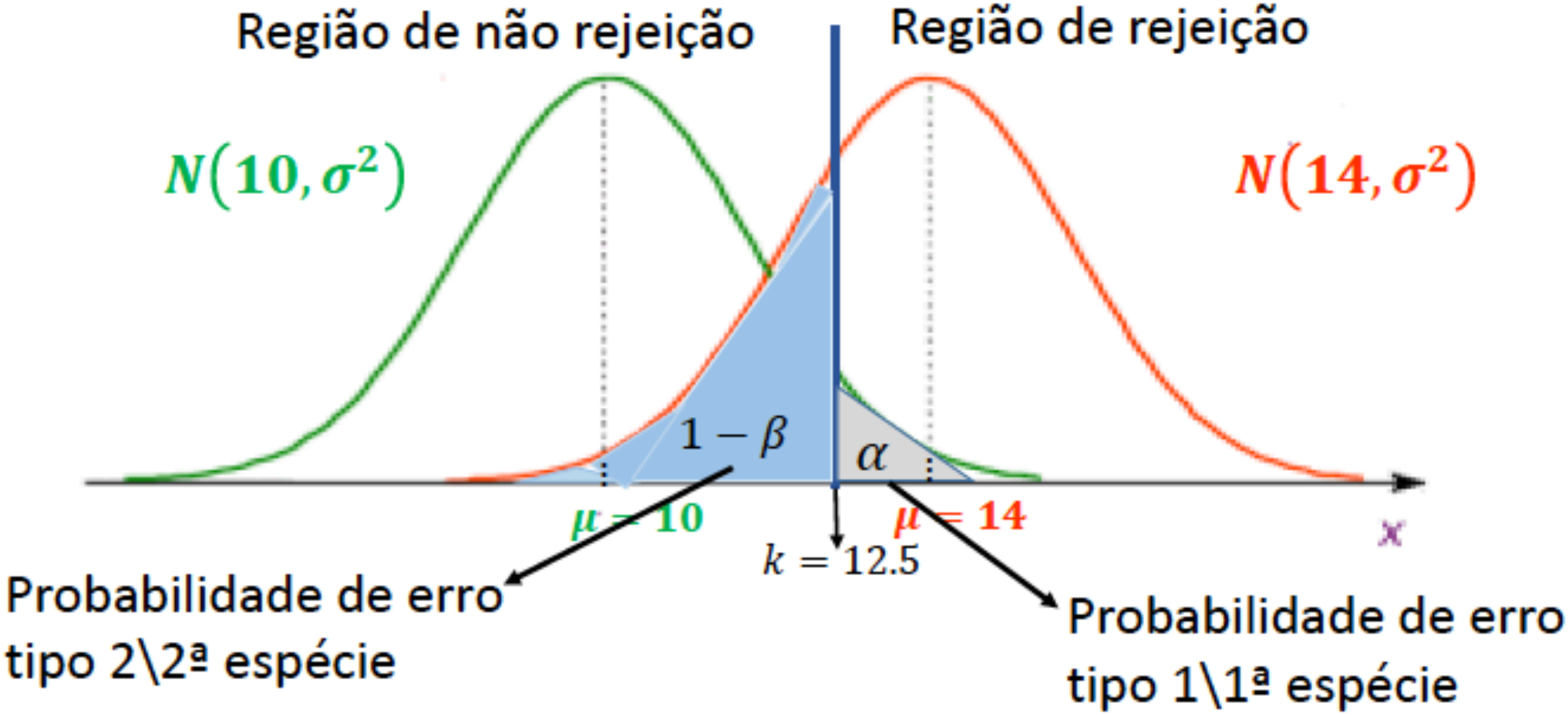
Potência do ensaio\teste

Exemplo

Seja uma população $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4)$

Pretende−se testar $\boldsymbol{H_0}: \mu = 10$ contra $\boldsymbol{H_1}: \mu = 14$

$$W = \{\bar{x} : \bar{x} > k\}$$

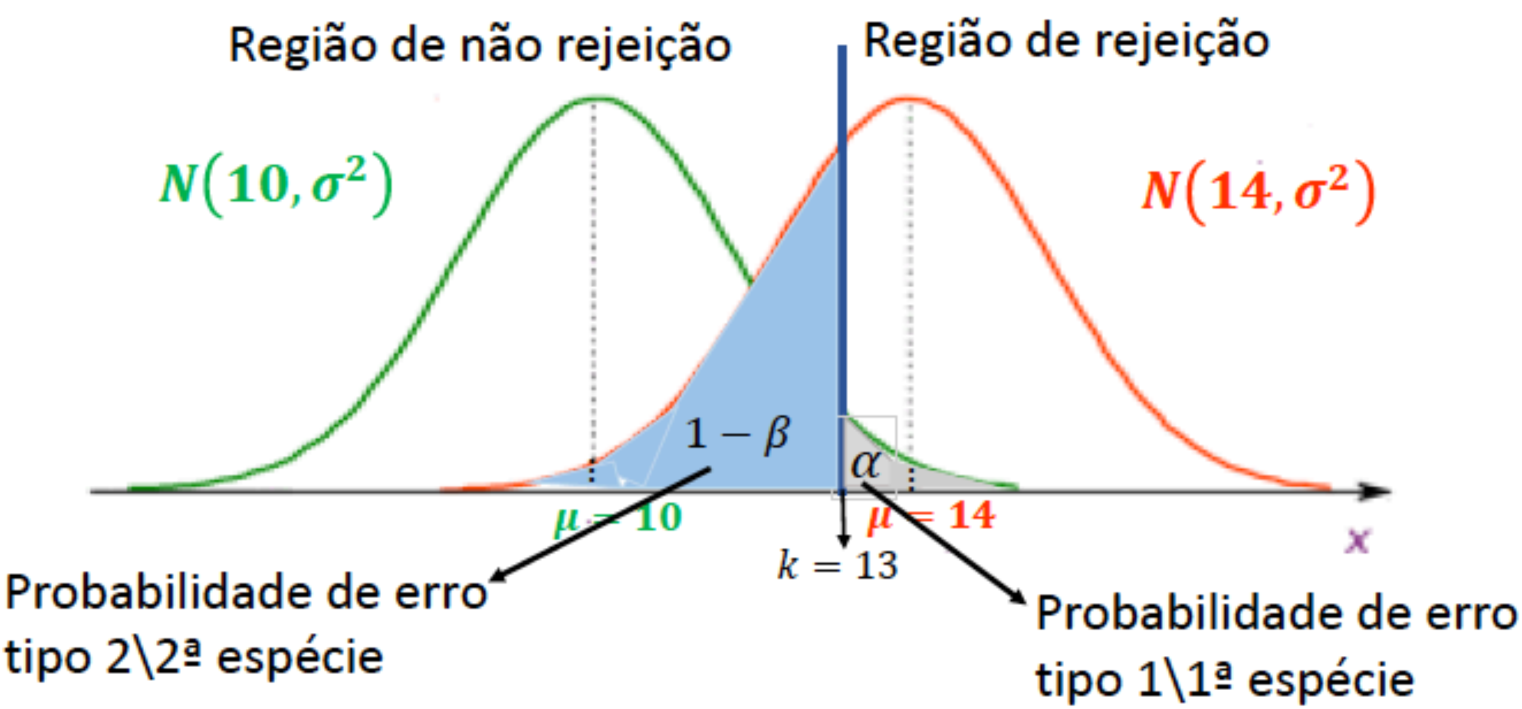


Reduzir Erro tipo 1→Aumentar Erro tipo II (e viceversa)

Seja uma população $X \sim N(\mu, \sigma^2 = 4)$

Pretende−se testar $\boldsymbol{H_0}: \mu = 10$ contra $\boldsymbol{H_1}: \mu = 14$

$W = \{\bar{x} : \bar{x} > k\}$ Se se reduz α, aumenta $1 - \beta$



Teste mais potente

8. Teste mais potente – Lema de Neyman-Pearson

Ideia importante: A redução das duas probabilidades (ou de uma delas, supondo a outra fixa) só se consegue aumentando a dimensão da amostra.

Na impossibilidade de minimizar ambos os erros, o Lema Neyman-Pearson define o **teste mais potente** com base em dois critérios:

1. Fixar a probabilidade de erro tipo 1 (α) porque atribui a este erro maior importância. Em geral $\alpha = 0{,}1, 0.05, 0.01$. Apenas se rejeita H_0 se houver forte evidência estatística contra esta hipótese.

2. Minimizar a probabilidade de erro tipo 2 $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\beta})$ ou maximizar a potência do ensaio $(\boldsymbol{\beta})$.

Lema Neyman-Pearson

Teorema 8.1: Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casualde uma população com função densidade $f(x|\theta), \quad \theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$. Seja $C > 0$, e $W \subset \mathbb{R}^n$ o conjunto do espaço amostra definido pelas condições:

$$\frac{L(\theta_1)}{L(\theta_0)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} f(x|\theta_1)}{\prod_{i=1}^{n} f(x|\theta_0)} > \mathrm{C} \Leftrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in W, \qquad (8.5)$$

$$P\big((X_1, X_2, \cdots, X_n) \in W | \theta = \theta_0\big) = \alpha \qquad (8.6)$$

Então, o teste associado à região crítica W é o teste mais potente de dimensão α para testar $H_0: \theta = \theta_0 \quad contra \; H_1: \theta = \theta_1$

Exemplo

Exemplo: Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual de uma população com distribuição de Poisson de média λ desconhecida.

$$H_0: \lambda = \lambda_0 \quad contra \; H_1: \lambda = \lambda_1 > \lambda_0$$

$$f(x|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \lambda > 0, \quad x = 0, 1, 2, \cdots \Rightarrow \frac{L(\lambda_1)}{L(\lambda_0)} = \frac{\prod_{i=1}^n f(x|\lambda_1)}{\prod_{i=1}^n f(x|\lambda_0)} > C \quad \text{dada } (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in W$$

É a região crítica UMP para o ensaio

$$H_0: \lambda = \lambda_0 \quad contra \; H_1: \lambda = \lambda_1 > \lambda_0$$

$$\frac{\prod_{i=1}^n f(x|\lambda_1)}{\prod_{i=1}^n f(x|\lambda_0)} = \frac{e^{-n\lambda_1} \lambda_1^{\sum_{i=1}^n x_i}}{e^{-n\lambda_0} \lambda_0^{\sum_{i=1}^n x_i}} = e^{-n\lambda_1 + n\lambda_0} * \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i} > C$$

$$W_{\sum_{i=1}^n x_i} = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n): \sum_{i=1}^n x_i > C'\right\}$$

$$ln\left(e^{-n\lambda_1 + n\lambda_0} * \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}\right) = -n(\lambda_1 - \lambda_o) + \sum_{i=1}^n x_i \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) > lnC$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i > \underbrace{\frac{n(\lambda_1 - \lambda_o) + lnC}{\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)}}_{C'}$$

$$\lambda_1 > \lambda_0 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_0} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) > 0 \Leftrightarrow C' > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i > C'$$

continuação

Exemplo: Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual de uma população com distribuição de Poisson de média λ desconhecida.

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad contra\ H_1 : \lambda = \lambda_1 < \lambda_0$$

$$-n(\lambda_1 - \lambda_o) + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) > lnC \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) > lnC + n(\lambda_1 - \lambda_o)$$

$$\lambda_1 < \lambda_0 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_0} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) < 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i < \frac{lnC + n(\lambda_1 - \lambda_o)}{\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i < k \longrightarrow$$

É a região crítica UMP para o ensaio

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad contra\ H_1 : \lambda = \lambda_1 < \lambda_0$$

$$W_{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i < k\right\}$$

Como definir a região critica?

Regra intuitiva: No teste de médias, variâncias ou proporções a região de rejeição está do lado da alternativa quando se utiliza a estatística "natural".

Exemplos:

$$\boldsymbol{H_0}: \mu \leq 130\ grs\ contra\ \boldsymbol{H_1}: \mu > 130 \Rightarrow W_T = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): \bar{x} > k\}$$

$$\boldsymbol{H_0}: \sigma^2 \geq 0.5\ mts \text{ contra } \boldsymbol{H_1}: \sigma^2 < 0.5\ mts \Rightarrow W_T = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n): {s'}^2 < k\right\}$$

$$\boldsymbol{H_0}: \theta = 0.35 \text{ contra } \boldsymbol{H_1}: \theta = 0.4 \Rightarrow W_T = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): \bar{x} > k\}$$

Resumo

Procedimento prático para realizar um teste\ensaio:

1. Fixar α num valor adequado ao problema a resolver

2. Escolher uma estatística teste (cuja distribuição, sob H_0, deve ser conhecida)

3. Definir a região de rejeição

4. Realizar o teste e concluir (<u>só nesta última etapa se utiliza a amostra observada</u>)