ISEG
Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Estatística I

Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)

2.º Ano/1.º Semestre

2024/2025

Aulas Teórico-Práticas N.ºs 9 e 10 (Semana 5)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)	Aulas TP (Semanas 3 a 6)	Aulas TP (Semanas 7 a 9)	Aulas TP (Semanas 10 a 12)
• **Capítulo 1**: Análise Descritiva • **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

3. Variáveis aleatórias unidimensionais

3.1. Variável aleatória

3.2. Função de distribuição

3.3. Classificação de variáveis aleatórias.

3.4. Variável aleatória discreta

3.5. Variável aleatória contínua

3.6. Função distribuição de uma função de uma variável aleatória

3.7. Valores esperados de variáveis aleatórias

3.8. Valores esperados de funções de variáveis aleatórias

3.9. Propriedades dos valores esperados

3.10. Momentos em relação à origem

3.11. Momentos em relação à média

3.12. Variância de uma variável aleatória

1

Variáveis Aleatórias Contínuas

Variável Aleatória, Função de Distribuição, Função Densidade de Probabilidade, Valor Esperado, Moda, Variância e Quantis

Variável Aleatória Contínua

Definição 1.1: (Variável aleatória contínua) Uma variável aleatória X é contínua se assume valores num intervalo da reta real, ou seja, o número de valores que X pode assumir é não enumerável.

EXEMPLOS:

- Tempo até a cura de uma doença;
- Peso das peças em uma linha de produção;
- Salário dos estatísticos em João Pessoa.

Probabilidade II (ufpb.br)

Variável Aleatória Contínua

- Uma vez que os valores possíveis de X não são enumeráveis, não podemos falar do i-ésimo valor de X, e, por isso, $p(x_i)$ se torna sem sentido.

- Em vez de atribuir, como no caso discreto, probabilidades aos valores da variável, pode-se atribuir probabilidades a intervalos de valores da variável contínua por meio de uma função.

- A ideia então é substituir a função p definida somente para $x_1, x_2, \ldots$ por uma função f definida para todos os valores de x.

Probabilidade II (ufpb.br)

V.a. Contínua: Função Densidade de Probabilidade (fdp)

Para variáveis aleatórias contínuas introduzimos a **função densidade de probabilidade (fdp),** tal que,

$$\text{(a)}\quad f(x) \geq 0$$

$$\text{(b)}\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

A condição (a) implica que a densidade é uma função não negativa e condição (b) corresponde ao fato de que a soma (integral no caso de variáveis contínuas) das probabilidades é igual a um. A integração de ±oo significa que devemos integrar sobre todos os valores de x em que f(x) é definida.

Qualquer função f(x) satisfazendo (a) e (b) é uma fdp.

Note que para variáveis contínuas as somas são substituídas por integrais.

Tópico_08_.pdf (usp.br)

Variável Aleatória Contínua: fdp

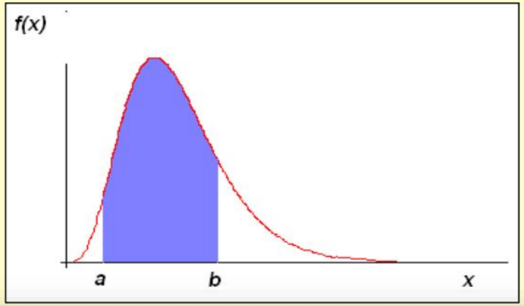
Uma v.a. X contínua é caracterizada por sua ***função densidade de probabilidade $f(x)$***, com as propriedades:

(i) A área sob a curva de densidade é 1;

(ii) $P(a \leq X \leq b)$ = área sob a curva da densidade $f(x)$ e acima do eixo x, entre os pontos a e b;

(iii) $f(x) \geq 0$, para todo x;

(iv) $P(X = x_0) = 0$, para x_0 fixo.



Assim

Note que, como a probabilidade da variável x assumir valor num dado ponto é nula, temos que: $P(a < x < b) = P(a \leq x \leq b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b)$

Variável Aleatória Contínua: Probabilidades

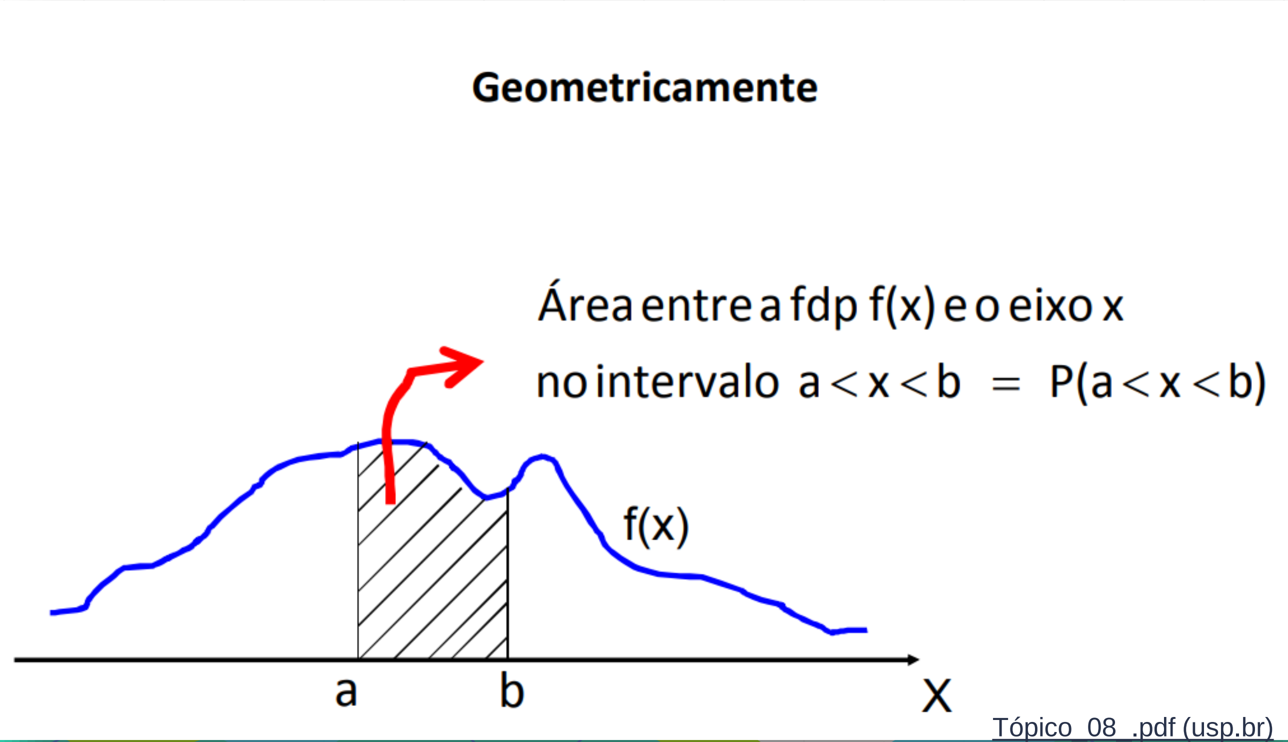
Para variáveis contínuas não podemos obter a probabilidade de x ter o valor num ponto $(x = a)$, ou seja, temos que considerar a probabilidade de x assumir valores num intervalo $a < x < b$.

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

representa a probabilidade de x assumir valores no intervalo $a < x < b$.

Tópico_08_.pdf (usp.br)

Variável Aleatória Contínua: Probabilidades



Tópico_08_.pdf (usp.br)

Cálculo de Probabilidades para uma Distribuição Contínua: Exemplo

Exemplo: Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 1 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

(a) verifique se f(x) é uma fdp.

(b) Calcule a probabilidade de X assumir valores no intervalo $2 < x < 3$

Tópico_08_.pdf (usp.br)

Cálculo de Probabilidades para uma Distribuição Contínua: Exemplo

(a) Temos que $f(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{1}^{4} \frac{1}{3}\, dx = \frac{1}{3}\, x \Big|_{1}^{4} = \frac{1}{3}\,(4\text{-}1) = 1$

portanto f(x) é uma fdp.

(b) Temos: $P(2 < x < 3) = \int_{2}^{3} \frac{1}{3}\, dx = \frac{1}{3}\, x \Big|_{2}^{3} = \frac{1}{3}\,(3\text{-}2) = \frac{1}{3}$

Tabela 1.1: Tabela de Primitivas Elementares

f	$P f = F$
$c, c \in IR$	$c\,x$
$x^{\alpha}\ (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\sec^2 x$	$\mathrm{tg} x$
$\mathrm{cosec}^2 x$	$-\mathrm{cotg} x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg}\, x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$

Tópico_08_.pdf (usp.br)

Média, Variância e Desvio-Padrão para V.a. Contínua

Do mesmo modo que para variáveis discretas, podemos definir para variáveis contínuas a média, a variância e o desvio padrão. Lembrando que introduzimos a fdp associada a variável aleatória considerada e substituímos as somas por integrais.

Assim, para a variável aleatória X, temos:

Média (μ): $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$

Variância (σ^2): $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\, dx$

Desvio-padrão: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$

Tópico_08_.pdf (usp.br)

Média, Variância e Desvio-Padrão para V.a. Contínua: Exemplo

Exemplo: Considere a fdp considerada anteriormente

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 1 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

(a) Calcule a média da variável aleatória X.

(b) Calcule a variância e o desvio padrão de X.

Tópico_08_.pdf (usp.br)

Média, Variância e Desvio-Padrão para V.a. Contínua: Exemplo

(a) Temos: $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{1}^{4} x\left(\frac{1}{3}\right) dx = \frac{1}{3}\int_{1}^{4} x\, dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{4} = \frac{1}{6}(4^2 - 1^2) = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

(b) Temos: $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\, dx = \int_{1}^{4} (x - \frac{5}{2})^2 \left(\frac{1}{3}\right) dx = \frac{1}{3}\int_{1}^{4} (x - \frac{5}{2})^2\, dx = \frac{1}{3}\frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^3}{3}\Bigg|_{1}^{4} = \frac{3}{4}$

e assim: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Tópico_08_.pdf (usp.br)

Variável Aleatória Contínua: Função de Distribuição (fd)

Definição 1.2: (Variável aleatória absolutamente contínua) Uma variável aleatória X é absolutamente contínua se existir uma função não negativa f tal que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

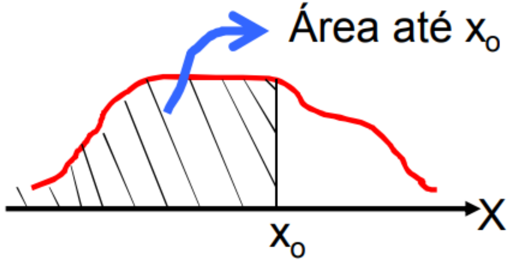
em que F é a função de distribuição acumulada e f é a função densidade da variável aleatória X.

Variável Aleatória Contínua: fd

A função distribuição acumulada (fda) $F(x)$ é a probabilidade de que $X \leq x_o$, ou seja,

$$F(x_o) = P(X \leq x_o) = \int_{-\infty}^{x_o} f(x)\,dx$$

$F(x)$ é análoga a distribuição de frequências relativas acumuladas (ou % acumuladas) estudadas no início do curso



Tópico_08_.pdf (usp.br)

Variável Aleatória Contínua: Probabilidades

IMPORTANTE: A partir da definição de função de distribuição, tem-se que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Note que a integral acima não se altera com a inclusão ou não dos extremos *a* e *b*. Dessa forma, para as variáveis contínuas, a probabilidade da variável ser igual a um particular valor é zero.

Assim,

$$P(X(\omega) \in [a,b]) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b).$$

$P(a \leq X \leq b)$ representa a área sob a curva da função densidade entre *a* e *b*.

Variável Aleatória Contínua: fdp vs fd

IMPORTANTE: A função de densidade serve para a caracterização da variável contínua. Dada a função de densidade, a função de distribuição é obtida por integração. Por outro lado, derivando a função de distribuição, obtemos a densidade.

Ou seja, utilizando o teorema fundamental de Cálculo, se $f(x)$ for contínua, temos a seguinte relação

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

fdp vs fd: Exemplo 1

Encontre a função de distribuição acumulada da seguinte função de densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \ 0 < x < 1, \\ 0,\ \textit{para quaisquer outros valores} \end{cases}$$

Probabilidade II (ufpb.br)

fdp vs fd: Exemplo 1

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \textit{para quaisquer outros valores} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < 0, \\ \int_0^x (2s)ds = x^2, & se\ 0 \leq x < 1, \\ 1, & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

fdp vs fd: Exemplo 2

Arqueólogos estudaram uma certa região e mediram o *comprimento de fósseis* encontrados (em cm). Chamamos de **C** a v.a. contínua comprimento de fósseis. Suponha que C possui a função densidade de probabilidade:

$$f(c) = \begin{cases} \frac{1}{40}\left(\frac{c}{10}+1\right) & \text{se} \quad 0 \leq c \leq 20; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Qual a probabilidade de um fóssil, escolhido ao acaso nessa região, apresentar comprimento inferior a 8 cm?

Probabilidade II (ufpb.br)

fdp vs fd: Exemplo 2

$$f(c)=\begin{cases}\dfrac{1}{40}\left(\dfrac{c}{10}+1\right) & \text{se}\quad 0\le c\le 20;\\ 0 & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

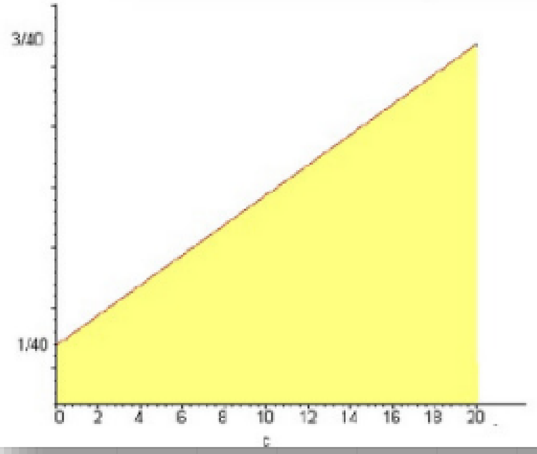
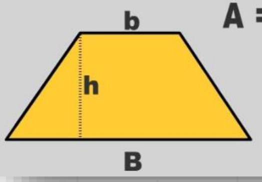


Gráfico da função densidade de probabilidade

ÁREA DO TRAPÉZIO



$$A=\frac{(B+b).h}{2}$$

A **área** do **trapézio** é a soma das bases vezes a altura dividido por dois.

$$\text{Área sob } f(c)=\frac{(b+B)h}{2}=\frac{\left(\dfrac{1}{40}+\dfrac{3}{40}\right)20}{2}=1$$

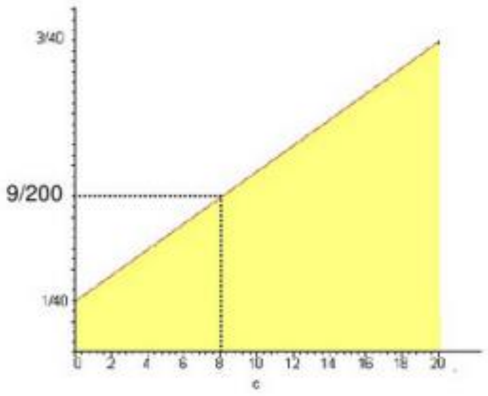
$$\text{Área sob } f(c)=\int_0^{20}\frac{1}{40}\left(\frac{c}{10}+1\right)=1$$

- Como f(c) é positiva e a área é igual 1, podemos concluir que f(c) é efetivamente uma densidade.

Probabilidade II (ufpb.br)

fdp vs fd: Exemplo 2

- Qual a probabilidade de um fóssil, escolhido ao acaso nessa região, apresentar comprimento inferior a 8 cm?



$$f(8) = \frac{9}{200}$$

$$P(C < 8) = \frac{\left(\frac{1}{40} + \frac{9}{200}\right)8}{2} = \frac{7}{25}$$

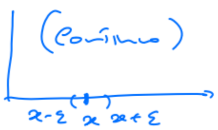
$$P(C < 8) = \int_0^8 f(c)dc = \frac{7}{25}$$

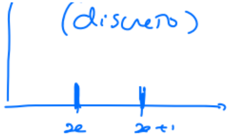
V.a. Discreta vs V.a. Contínua

Seja X uma v.a. contínua, que toma valores num intervalo de $\mathbb{R}$ (ou em $\mathbb{R}$),

i) $P(X=x) = 0, \quad \forall x$ [1ª grande diferença em relação às v.a. discretas]

Em vez de função de probabilidade, vamos definir:

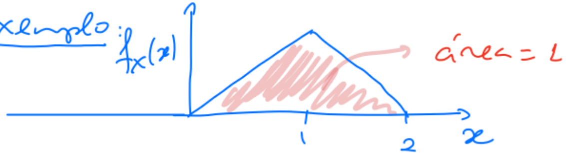




$$\boxed{f_X(x)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P(x-\varepsilon/2 \le X \le x+\varepsilon/2)}{\varepsilon}$$

↳ função densidade de probabilidade

Exemplo:



V.a. Discreta vs V.a. Contínua

v.a. discreta

propriedades : $P(X=x) \in [0,1]$

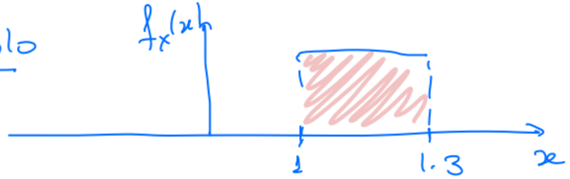
$$\sum_{x=-\infty}^{+\infty} P(X=x) = 1$$

v.a. contínua

propriedades :

- $f_X(x) \geq 0, \ \forall x$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

Exemplo



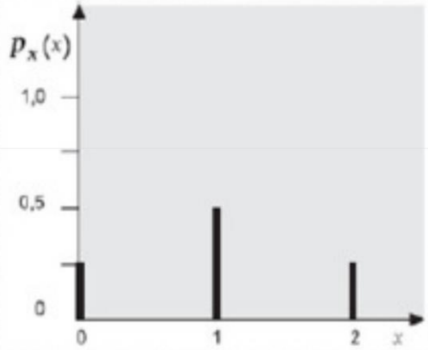
$$\text{área} = (1.3 - 1)k = 1 \Rightarrow 0.3k = 1 \Rightarrow$$

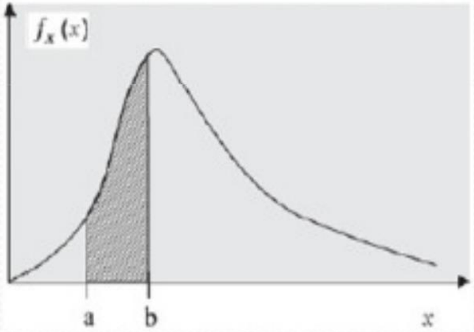
$$k = \frac{1}{0.3} = 3.33\ldots$$

Slides Professora Claúdia Nunes

V.a. Discreta vs V.a. Contínua

- Função massa de probabilidade
  - Indica com que probabilidade a variável aleatória x assume o valor x_o, *i.e.*, $P(x=x_o) = p_x(x_o)$.
  - A função massa de probabilidade se aplica a variáveis discretas.
- Função densidade de probabilidade
  - Equivale à função massa de probabilidade, sendo que se aplica a variáveis contínuas.





V.a. Discreta vs V.a. Contínua

$$P(X=x) \leftrightarrow f_X(x)$$

$$\Sigma \leftrightarrow \int$$

V.a. Discreta

- $F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{y=-\infty}^{x} P(X=y)$
- $F_X(x) \in [0,1]$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- $P(X=x) = F_X(x) - F_X(x^-)$
- Não decrescente
- $P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$
- $P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a^-)$
- $P(a \le X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$
- $P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$

$=]-\infty, b] -]-\infty, a[$

V.a. Contínua

- $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$
- $F_X(x) \in [0,1]$
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- A função F_X é contínua
  $f_X(x) = F_X'(x)$
- Não decrescente
- $P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$
  $= P(a \le X < b) = P(a < X < b)$
  $= F_X(b) - F_X(a)$
  (porque $P(X=a) = P(X=b) = 0$)

V.a. Discreta vs V.a. Contínua

v.a. discretas	v.a. contínuas
• $E(X) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x\, P(X=x)$	• $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx$

$$E[aX+b] = aE(X)+b$$

• $E[g(X)] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} g(x)\, P(X=x)$	• $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx$

$$\mathrm{var}(X) = E[X^2] - E^2(X)$$

• $\mathrm{var}(X) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x^2 P(X=x) - E^2(X)$	• $\mathrm{var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx - E^2(X)$
$= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x^2 P(X=x) - \left[\sum_{x=-\infty}^{+\infty} x\, P(X=x)\right]^2$	$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx\right]^2$

$$\mathrm{var}(aX+b) = a^2\, \mathrm{var}(X)$$

• mediana $= me$	• mediana $= me$
$0.5 \leq F_X(me) \leq 0.5 + P(X=me)$	$F_X(me) = 0.5$
	• percentil de prob. $p = x_p$
	$F_X(x_p) = p \qquad p \in (0,1)$

Slides Professora Claúdia Nunes

Características da Distribuição

Localização/Tendência

- **Central**: Moda, Mediana, Média
- **Não central ou relativa**: Alguns Quantis (Quartis, Decis, Percentis, Mínimo, Máximo)

Dispersão

- Amplitude Total ou Amostral, Amplitude Interquartil, Variância, Desvio Padrão, Coeficiente de Variação

Assimetria

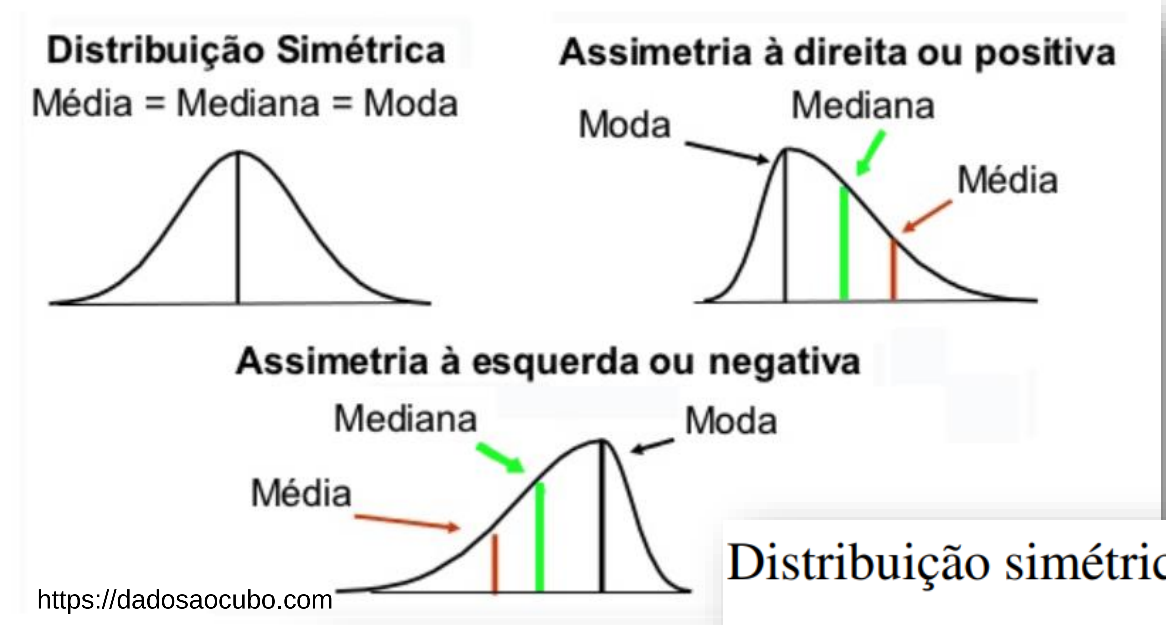
- Coeficientes de Assimetria

Achatamento/Curtose/Forma

- Coeficientes de Achatamento

Para avaliar o peso relativo da dispersão face à localização, utiliza-se o **coeficiente de variação**: $\text{CV} = \dfrac{\sigma}{\mu}$ (utiliza-se sobretudo se o suporte de $X \subset \Re^{+}$)

Assimetria/Enviesamento



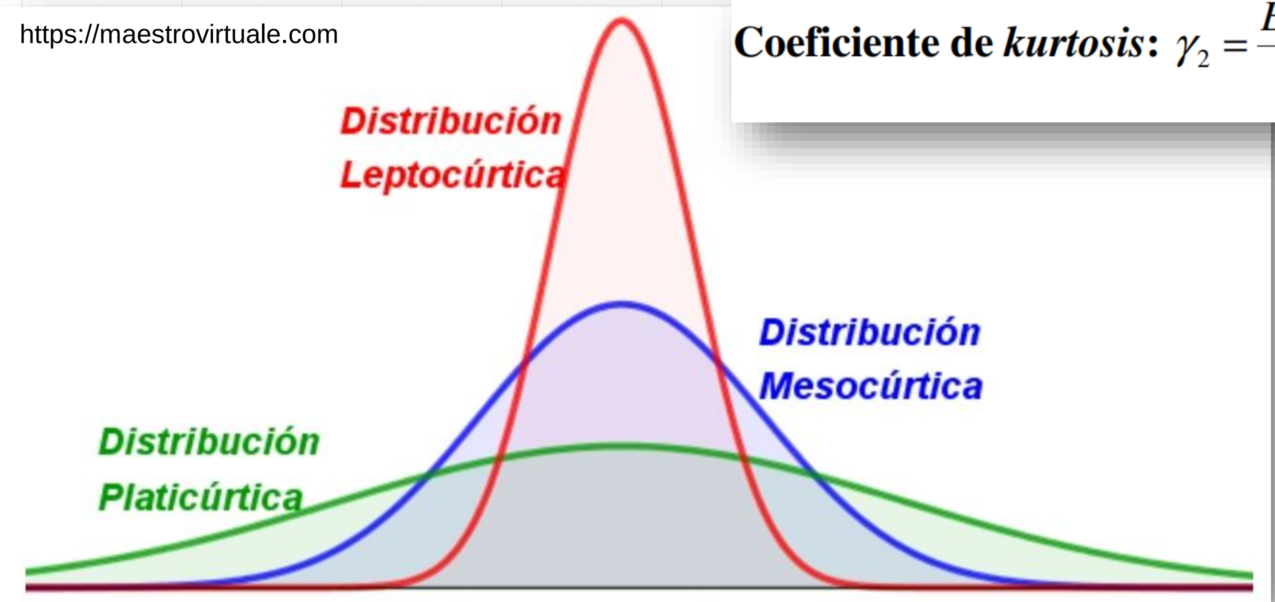
$$\text{Distribuição simétrica} \rightarrow \gamma_1 = 0$$

$$\textbf{Coeficiente de assimetria: } \gamma_1 = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Achatamento/Curtose/Forma

https://maestrovirtuale.com

Coeficiente de *kurtosis*: $\gamma_2 = \frac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$



o **grau de afastamento de uma certa distribuição em relação à distribuição normal**. Nesta distribuição tem-se $\gamma_1 = 0$, pois trata-se de uma distribuição simétrica, e $\gamma_2 = 3$.

Assimetria e Achatamento

Assimetria e curtose

A assimetria γ_1, a curtose β_2 e a curtose normalizada γ_2 são obtidas a partir das fórmulas dos momentos

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3} = 0 \\ \beta_2 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} = 3 \\ \gamma_2 = \beta_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

.[49]

A distribuição normal é um ponto de referência para comparação das espessuras de caudas longas. Se uma distribuição possui uma curtose normalizada $\gamma_2 > 0$, então a distribuição possui uma cauda longa mais grossa que a distribuição normal e é chamada leptocúrtica. Se $\gamma_2 < 0$, a distribuição possui uma cauda longa mais fina que a distribuição normal e é chamada platicúrtica. Se a distribuição possui uma curtose normalizada nula, então a distribuição possui uma cauda longa comparável à distribuição normal e é chamada mesocúrtica.[50][51]

Distribuição normal – Wikipédia, a enciclopédia livre (wikipedia.org)

Variáveis Aleatórias Contínuas: Exercícios

2

11. Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por,

$$f(x)=\begin{cases} x/4 & (0<x<2) \\ 1-x/4 & (2<x<4). \end{cases}$$

a) Obtenha a função de distribuição de X.

b) Calcule a probabilidade de X ser maior que 3.

c) Calcule a $P(X<3 \mid X>2)$.

d) Obtenha a distribuição de $Y=8-2X$.

Exercício 11 (a): Função de Distribuição

Função de distribuição: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du$

- $x < 0 \rightarrow F(x) = 0$
- $0 \leq x < 2 \rightarrow F(x) = \int_0^x u/4 \, du = \left[\frac{u^2}{8}\right]_0^x = \frac{x^2}{8}$
- $2 \leq x < 4 \rightarrow F(x) = \int_0^2 \frac{x}{4}\, dx + \int_2^x \left(1 - \frac{u}{4}\right) du = \left[\frac{x^2}{8}\right]_0^2 + \left[u - \frac{u^2}{8}\right]_2^x =$

$$= \frac{2^2}{8} + \left(x - \frac{x^2}{8}\right) - \left(2 - \frac{2^2}{8}\right) = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{8} - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{x^2}{8} + x - 1$$

- $x \geq 4 \Rightarrow F(x) = 1$

Logo, a função de distribuição é dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x^2/8 & (0 \leq x < 2) \\ -x^2/8 + x - 1 & (2 \leq x < 4) \\ 1 & (x \geq 4) \end{cases}$$

Exercício 11 (b): Probabilidade

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \left(-\frac{3^2}{8} + 3 - 1\right) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8} = 0.125$$

Ou, $P(X > 3) = \int_3^4 f(x)\,dx = \int_3^4 \left(1 - \frac{x}{4}\right) dx = \dots = \frac{1}{8} = 0.125$

Exercício 11 (c): Probabilidade

$$P(X<3 \mid X>2) = \frac{P(X<3 \wedge X>2)}{P(X>2)} = \frac{P(2<X<3)}{P(X>2)}$$

- $P(2<X<3) = F(3^-) - F(2) \overset{\uparrow \text{X contínua}}{=} F(3) - F(2) = \left(-\frac{3^2}{8} + 3 - 1\right) - \left(-\frac{2^2}{8} + 2 - 1\right) =$

$$= \frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

- $P(X>2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \left(-\frac{2^2}{8} + 2 - 1\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Logo,

$$P(X<3 \mid X>2) = \frac{3/8}{1/2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Exercício 11 (d): Função de Distribuição

$Y = 8 - 2X$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(8-2X \leq y) = P(-2X \leq y-8) = P\left(X \geq \frac{8-y}{2}\right) =$$

$$= 1 - P\left(X < \frac{8-y}{2}\right) = 1 - F_X\left(\left(\frac{8-y}{2}\right)^-\right) = 1 - F_X\left(\frac{8-y}{2}\right)$$

- $x < 0 \Leftrightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow 8-2x > 8 \Leftrightarrow y > 8$

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{8-y}{2}\right) = 1 - 0 = 1$$

Exercício 11 (d): Função de Distribuição

- $0 < x < 2 \Leftrightarrow 0 > -2x > -4 \Leftrightarrow 8 > 8-2x > 4 \Leftrightarrow 4 < y < 8$

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{8-y}{2}\right) = 1 - \left[\frac{\left(\frac{8-y}{2}\right)^2}{8}\right] = 1 - \frac{(8-y)^2}{32} = 1 - \frac{64 - 16y + y^2}{32} =$$

$$= 1 - \frac{64}{32} + \frac{16y}{32} - \frac{y^2}{32} = -\frac{y^2}{32} + \frac{y}{2} - 1$$

Exercício 11 (d): Função de Distribuição

$\bullet\ 2 < x < 4 \Leftrightarrow -4 > -2x > -8 \Leftrightarrow 4 > 8-2x > 0 \Leftrightarrow 0 < y < 4$

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{8-y}{2}\right) = 1 - \left[-\frac{\left(\frac{8-y}{2}\right)^2}{8} + \frac{8-y}{2} - 1\right] =$$

$$= 1 - \left[-\frac{(8-y)^2}{32} + \frac{8-y}{2} - 1\right] = 1 - \left(-\frac{64-16y+y^2}{32} + \frac{8-y}{2} - 1\right) =$$

$$= 1 - \left(-\frac{64}{32} + \frac{16y}{32} - \frac{y^2}{32} + \frac{8}{2} - \frac{y}{2} - 1\right) =$$

$$= 1 - \left(-2 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{32} + 4 - \frac{y}{2} - 1\right) = 1 + 2 - \frac{y}{2} + \frac{y^2}{32} - 4 + \frac{y}{2} + 1 =$$

$$= \frac{y^2}{32}$$

Exercício 11 (d): Função de Distribuição

• $x > 4 \Leftrightarrow -2x < -8 \Leftrightarrow 8-2x < 0 \Leftrightarrow y < 0$

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{8-y}{2}\right) = 1 - 1 = 0$$

Logo, a função de distribuição de y é dada por:

$$F(y) = \begin{cases} 0 & (y < 0) \\ y^2/32 & (0 \leq y < 4) \\ -y^2/32 + y/2 - 1 & (4 \leq y < 8) \\ 1 & (y \geq 8) \end{cases}$$

E a função densidade é dada por:

$$f(y) = \begin{cases} y/16 & (0 < y < 4) \\ -y/16 + 1/2 & (4 < y < 8) \end{cases}$$

12. Para cada uma das funções definidas nas alíneas seguintes encontre o valor da constante k de modo que sejam funções densidade de uma variável aleatória X:

a) $f(x) = \begin{cases} kx & (0 < x < 1) \\ 2 - x & (1 < x < 2). \end{cases}$

b) $f(x) = x^3 / 4 \quad (0 < x < k)$.

c) $f(x) = 4x^k \quad (0 < x < 1)$.

Exercício 12 (a): Função Densidade de Probabilidade

$$\int_0^1 kx\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \left[k\,\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{2} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{k = 1}$$

Exercício 12 (b): Função Densidade de Probabilidade

$$\int_0^K \frac{x^3}{4}\,dx = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{x^4}{16}\right]_0^K = 1 \Leftrightarrow \frac{K^4}{16} = 1 \Leftrightarrow K^4 = 16 \Leftrightarrow K = -2 \lor K = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K = 2}$$

Exercício 12 (c): Função Densidade de Probabilidade

$$\int_0^1 4x^k \, dx = 1 \iff \left[4\,\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = 1 \iff \frac{4}{k+1} = 1 \iff k+1 = 4 \iff \boxed{k = 3}$$

13. Seja

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x^2 & (0 \le x < 1/2) \\ -(3x^2 - 6x + 2) & (1/2 \le x < 1) \\ 1 & (x \ge 1). \end{cases}$$

a) Prove que F é a função de distribuição de uma variável aleatória X.
b) Determine a função densidade correspondente.
c) Calcule a $P(X < 3/2)$.
d) Encontre o valor de k, tal que $P(X \le k) = 1/2$.

Exercício 13 (a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x^2 & (0 \leq x < 1/2) \\ -(3x^2 - 6x + 2) & (1/2 \leq x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

(a)

F é uma função de distribuição se verificar as propriedades 2, 3 e 5 da função de distribuição (Teorema 3.1 do livro).

P2) F é não decrescente

- Para $x < 0$ e $x \geq 1$, F é não decrescente, pois é constante
- Para $0 \leq x < 1/2$, F é não decrescente, pois $(x^2)' = 2x \geq 0$
- Para $1/2 \leq x < 1$, F é não decrescente, pois $[-(3x^2 - 6x + 2)]' = -6x + 6 = 6(1-x)$

P3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 0 = 0$

$F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$

Exercício 13 (a)

P5) F é contínua à direita: $F(a^+) = F(a)$.

Pontos de transição: $x=0$, $x = 1/2$ e $x = 1$

- $x = 0 \rightarrow F(0^+) = \lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0^2 = 0$ e $F(0) = 0^2 = 0$

- $x = \frac{1}{2} \rightarrow F(\frac{1}{2}^+) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} F(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} -(3x^2 - 6x + 2) = -\left[3.(\frac{1}{2})^2 - 6(\frac{1}{2}) + 2\right] =$

$= \frac{1}{4}$ e $F(\frac{1}{2}) = -\left[3.(\frac{1}{2})^2 - 6.(\frac{1}{2}) + 2\right] = \frac{1}{4}$

- $x = 1 \rightarrow F(1^+) = \lim_{x \to 1^+} F(x) = \lim_{x \to 1} 1 = 1$ e $F(1) = 1$

Logo, F é função de distribuição.

Exercícios 13 (b) e (c)

Função densidade: $f(x) = F'(x)$

- $0 < x < 1/2 \rightarrow f(x) = (x^2)' = 2x$
- $1/2 < x < 1 \rightarrow f(x) = [-(3x^2 - 6x + 2)]' = -(6x - 6) = -6x + 6 = 6(1-x)$

Logo, a função densidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 < x < 1/2) \\ 6(1-x) & (1/2 < x < 1) \end{cases}$$

(c)

$P(X < 3/2) = F(3/2^-) = F(3/2) = F(1.5) = 1$

Exercício 13 (d)

$K: P(X \leq K) = 1/2 \Leftrightarrow F(K) = 1/2$

- No ramo $(0 \leq x < 1/2)$, tem-se: $F(0) \leq F(x) \leq F(1/2^-) \Leftrightarrow 0^2 \leq F(x) \leq (1/2)^2 \Leftrightarrow$

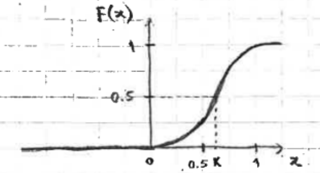
$\Leftrightarrow 0 \leq F(x) \leq 1/4 < 1/2$

Logo, o valor de K encontra-se no ramo $(1/2 \leq x < 1)$, o que significa que: $(1/2 \leq K < 1)$. Assim sendo,

$F(K) = 1/2 \Leftrightarrow -(3K^2 - 6K + 2) = 1/2 \Leftrightarrow -3K^2 + 6K - 2 = 1/2 \Leftrightarrow 3K^2 - 6K + 5/2 = 0$

$\Leftrightarrow K = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 3 \times 5/2}}{2 \times 3} = \dfrac{6 \pm \sqrt{6}}{6} \Leftrightarrow K \approx 1.4083 \vee K \approx 0.5918$

Porque $1/2 \leq K < 1$, conclui-se que: $K \approx 0.5918$



17. A quantidade de vinho (em dezenas de litros) que um produtor-engarrafador vende por dia é uma variável aleatória X com função de distribuição

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \dfrac{x^2}{50} & (0 \leq x < 5) \\ \dfrac{20x - x^2}{50} - 1 & (5 \leq x < 10) \\ 1 & (x \geq 10). \end{cases}$$

a) Determine a função densidade.

b) Do conjunto dos dias em que vende mais que 50 litros, qual a probabilidade de vender menos que 90 litros?

c) Se o ganho líquido diário for $Y = 2X - 6$, calcule a função de distribuição do ganho líquido e a proporção de dias em que há prejuízo.

Exercício 17 (a)

$f(x) = F'(x)$

- $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{50}\right)' = \dfrac{x}{25} \quad (0 < x < 5)$

- $f(x) = \left(\dfrac{20x - x^2}{50} - 1\right)' = \dfrac{20 - 2x}{50} = \dfrac{10 - x}{25} \quad (5 < x < 10)$

Então,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{25} & (0 < x < 5) \\ \dfrac{10 - x}{25} & (5 < x < 10) \end{cases}$$

Exercício 17 (b)

$$P(X<9 \mid X>5) = \frac{P(X<9 \cap X>5)}{P(X>5)} = \frac{P(5<X<9)}{1-P(X\leq 5)} = \frac{F(9^-)-F(5)}{1-F(5)}$$

- $F(9^-) = \dfrac{20\times 9 - 9^2}{50} - 1 = 0.98$

$F(5) = \dfrac{20\times 5 - 5^2}{50} - 1 = 0.5$

Logo,

$$P(X<9 \mid X>5) = \frac{0.98-0.5}{0.5} = 0.96$$

Exercício 17 (c)

$$Y = 2X - 6$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(2X - 6 \leq y) = P(2X \leq y + 6) = P\left(X \leq \frac{y+6}{2}\right) = F_X\left(\frac{y+6}{2}\right)$$

- $x < 0 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow 2x - 6 < -6 \Leftrightarrow y < -6$

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y+6}{2}\right) = 0$$

- $0 < x < 5 \Leftrightarrow 0 < 2x < 10 \Leftrightarrow -6 < 2x - 6 < 4 \Leftrightarrow -6 < y < 4$

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y+6}{2}\right) = \frac{\left(\frac{y+6}{2}\right)^2}{50} = \frac{y^2 + 12y + 36}{200}$$

Exercício 17 (c)

- $5 < x < 10 \Leftrightarrow 10 < 2x < 20 \Leftrightarrow 4 < 2x - 6 < 14 \Leftrightarrow 4 < y < 14$

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y+6}{2}\right) = \frac{20\left(\frac{y+6}{2}\right) - \left(\frac{y+6}{2}\right)^2}{50} - 1 = \frac{40y + 240 - y^2 - 12y - 36}{200} - 1$$

$$= \frac{-y^2 + 28y + 4}{200}$$

- $x > 10 \Leftrightarrow 2x > 20 \Leftrightarrow 2x - 6 > 14 \Leftrightarrow y > 14$

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y+6}{2}\right) = 1$$

Então,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & (y < -6) \\ \dfrac{y^2 + 12y + 36}{200} & (-6 \leq y < 4) \\ \dfrac{-y^2 + 28y + 4}{200} & (4 \leq y < 14) \\ 1 & (y \geq 14) \end{cases}$$

$$P(Y < 0) = F(0^-) = \frac{0^2 + 12 \times 0 + 36}{200} = \frac{36}{200} = 0.18$$

25. Considere a variável aleatória X com a seguinte função de probabilidade

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.2	0.2	0.1	0.3	0.2

a) Calcule $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

b) Faça $Y = 1 - 3X$ e calcule $E(Y)$ e $\mathrm{Var}(Y)$.

c) Sendo $Z = |X - 2|$, determine $E(Z)$ e $\mathrm{Var}(Z)$.

Exercício 25 (a): Valor Médio e Variância

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 & (x = 0) \\ 0.2 & (x = 1) \\ 0.1 & (x = 2) \\ 0.3 & (x = 3) \\ 0.2 & (x = 4) \end{cases} \longrightarrow D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Exercício 25 (a): Valor Médio e Variância

$$E(X) = \sum_{x \in D} x\, f(x) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.2 = 2.1$$
μ_X

$$Var(X) = E\left[(X - \mu_X)^2\right] = \sum_{x \in D} (x - \mu_X)^2 f(x) = (0 - 2.1)^2 \times 0.2 + (1 - 2.1)^2 \times 0.2 +$$
σ_X^2

$$+ (2 - 2.1)^2 \times 0.1 + (3 - 2.1)^2 \times 0.3 + (4 - 2.1)^2 \times 0.2 = 2.09$$

Alternativamente,

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

- $$E(X^2) = \sum_{x \in D} x^2 f(x) = 0^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.1 + 3^2 \times 0.3 + 4^2 \times 0.2 = 6.5$$

$$Var(X) = 6.5 - 2.1^2 = 2.09$$

Exercício 25 (b): Valor Médio e Variância

$Y = 1 - 3X \longrightarrow$ É uma função linear em X

$$\underset{\mu_Y}{E(Y)} = E(1-3X) = 1 - 3E(X) = 1 - 3 \times 2.1 = -5.3$$

$$\underset{\sigma_Y^2}{Var(Y)} = Var(1-3X) = (-3)^2\, Var(X) = 9 \times 2.09 = 18.81$$

Exercício 25 (c): Valor Médio e Variância

$Z = |X-2|$ → É uma função não linear em X

z	0	1	2
f(z)	0,1	0,5	0,4

$$\underset{\mu_Z}{E(Z)} = E(|X-2|) = \sum_{x \in D} |x-2| f(x) = |0-2| \times 0.2 + |1-2| \times 0.2 + |2-2| \times 0.1 + |3-2| \times 0.3 +$$
$$+ |4-2| \times 0.2 = 1.3$$

$$\mathrm{Var}(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2$$

- $E(Z^2) = E(|X-2|^2) = E[(X-2)^2] = E(X^2 - 4X + 4) = E(X^2) - 4E(X) + 4 =$

$$= 6.5 - 4 \times 2.1 + 4 = 2.1$$

$$\underset{\sigma_Z^2}{\mathrm{Var}(Z)} = 2.1 - 1.3^2 = 0.41$$

27. Sabe-se que o primeiro e o segundo momentos em relação à origem da variável aleatória discreta X, são iguais a 6 e a 62, respectivamente. Sendo $Y = (X/2) + 3$, determine a média, a variância e o desvio padrão de Y.

Exercício 27: Média, Variância e Desvio Padrão

$E(X) = 6 \qquad E(X^2) = 62$

$Y = \frac{X}{2} + 3$

$\underset{\mu_Y}{E(Y)} = E\left(\frac{X}{2} + 3\right) = \frac{1}{2} E(X) + 3 = \frac{1}{2} \cdot 6 + 3 = 6$

$\underset{\sigma_Y^2}{\mathrm{Var}(Y)} = \mathrm{Var}\left(\frac{X}{2} + 3\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{4}\left\{E(X^2) - [E(X)]^2\right\} =$

$= \frac{1}{4}\left(62 - 6^2\right) = \frac{1}{4} \cdot 26 = 6.5$

$\sigma_Y = \sqrt{\mathrm{Var}(Y)} = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{6.5} \approx 2.5495$

29. Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade,

$$f_X(x) = \begin{cases} x & (0 < x < 1) \\ 1/2 & (1 < x < 2). \end{cases}$$

a) Calcule a média e a variância de X.
b) Utilizando as propriedades do valor esperado, obtenha a média e a variância da variável aleatória $Y = 4X - 2$.
c) Calcule a média das seguintes variáveis aleatórias:

$$Z = \frac{1}{X}\,;\; U = \begin{cases} -1 & (X < 0.5) \\ 1 & (X \geq 0.5). \end{cases}$$

d) Determine o 1.º e o 3.º quartis.

Exercício 29 (a): Média e Variância

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot x\, dx + \int_1^2 x \cdot \tfrac{1}{2}\, dx = \left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\tfrac{x^2}{4}\right]_1^2 =$$

$$= \tfrac{1^3}{3} + \left(\tfrac{2^2}{4} - \tfrac{1^2}{4}\right) = \tfrac{1}{3} + 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{13}{12} \approx 1.0833$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

- $$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2 \cdot x\, dx + \int_1^2 x^2 \cdot \tfrac{1}{2}\, dx = \left[\tfrac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\tfrac{x^3}{6}\right]_1^2 =$$

$$= \tfrac{1^4}{4} + \left(\tfrac{2^3}{6} - \tfrac{1^3}{6}\right) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{8}{6} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{17}{12}$$

$$Var(X) = \tfrac{17}{12} - \left(\tfrac{13}{12}\right)^2 = \tfrac{35}{144} \approx 0.24306$$

Ou,

$$Var(X) = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f(x)\, dx = \int_0^1 \left(x - \tfrac{13}{12}\right)^2 \cdot x\, dx + \int_1^2 \left(x - \tfrac{13}{12}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{2}\, dx$$

$$= \dots = \tfrac{35}{144}$$

Exercício 29 (b): Média e Variância

$Y = 4X - 2$

$E(Y) = E(4X-2) = 4E(X) - 2 = 4 \times 13/12 - 2 = 7/3 \approx 2.3333$

$Var(Y) = Var(4X-2) = 4^2 \, Var(X) = 16 \times 35/144 = 35/9 \approx 3.8889$

Exercício 29 (c): Média

$$Z = \underbrace{1/X}_{\psi(X)}$$

$$E(Z) = E(1/X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\cdot x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\,dx = \int_0^1 1\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

$$= [x]_0^1 + 1/2\,[\ln|x|]_1^2 = 1 + 1/2\,(\ln 2 - \ln 1) = 1 + 1/2 \ln 2 \approx 1.3466$$

$$U = \begin{cases} -1 & (X < 0.5) \\ 1 & (X \geq 0.5) \end{cases}$$

$$E(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot f(x)\,dx = \int_0^{0.5} (-1)\cdot x\,dx + \int_{0.5}^1 1\cdot x\,dx + \int_1^2 1\cdot 1/2\,dx =$$

$$= \left[-x^2/2\right]_0^{0.5} + \left[x^2/2\right]_{0.5}^1 + \left[x/2\right]_1^2 = -\frac{0.5^2}{2} + \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0.5^2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} =$$

$$= 3/4 = 0.75$$

Exercício 29 (d): 1º e 3º Quartis

1º Quartil: $Q_{0.25}$

$$\int_{-\infty}^{Q_{0.25}} f(x)\,dx = 0.25$$

3º Quartil: $Q_{0.75}$

$$\int_{-\infty}^{Q_{0.75}} f(x)\,dx = 0.75$$

Verificação da posição dos quartis nos Ramos. Para o 1º Ramo tem-se:

$$\int_0^1 x\,dx = \left[x^2/2\right]_0^1 = 1/2 = 0.5 \Rightarrow \begin{cases} \text{1º Quartil no 1º Ramo: } 0 < Q_{0.25} < 1 \\ \text{3º Quartil no 2º Ramo: } 1 < Q_{0.75} < 2 \end{cases}$$

$$Q_{0.25}: \int_0^{Q_{0.25}} x\,dx = 0.25 \Leftrightarrow \left[x^2/2\right]_0^{Q_{0.25}} = 0.25 \Leftrightarrow \frac{(Q_{0.25})^2}{2} = 0.25 \Leftrightarrow (Q_{0.25})^2 = 0.5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q_{0.25} = \sqrt{0.5} \vee Q_{0.25} = -\sqrt{0.5} \Rightarrow Q_{0.25} = \sqrt{0.5} \approx 0.7071$$

$$Q_{0.75}: \int_0^1 x\,dx + \int_1^{Q_{0.75}} 1/2\,dx = 0.75 \Leftrightarrow 0.5 + \left[x/2\right]_1^{Q_{0.75}} = 0.75 \Leftrightarrow \frac{Q_{0.75}}{2} - \frac{1}{2} = 0.2$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q_{0.75}}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow Q_{0.75} = 3/2 = 1.5$$

34. Seja X uma variável aleatória com função densidade tal que,

$$f_X(x) = \frac{1}{9}x^{-4} \quad (x > 1/3).$$

a) Calcule $P(X > 4 \mid X > 2)$.

b) Calcule a média e a mediana de X. Interprete.

c) Classifique a distribuição de X quanto à assimetria, relacionando com o resultado de a).

Exercício 34 (a)

$$f(x) = \frac{1}{9}x^{-4} \qquad (x > 1/3)$$

(a)

$$P(X>4 \mid X>2) = \frac{P(X>4 \wedge X>2)}{P(X>2)} = \frac{P(X>4)}{P(X>2)}$$

- $$P(X>4) = \int_4^{+\infty} \frac{1}{9} x^{-4}\, dx = \frac{1}{9}\left[-\frac{x^{-3}}{3}\right]_4^{+\infty} = \frac{1}{9}\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_4^{+\infty} = \frac{1}{9}\left(0 + \frac{1}{3\times 4^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{192} = \frac{1}{1728}$$

- $$P(X>2) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{9} x^{-4}\, dx = \frac{1}{9}\left[-\frac{x^{-3}}{3}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{3x^3}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{9}\left(0 + \frac{1}{3\times 2^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{24} = \frac{1}{216}$$

Logo,

$$P(X>4 \mid X>2) = \frac{1/1728}{1/216} = \frac{216}{1728} = \frac{1}{8} = 0.125$$

Exercício 34 (b)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_{1/3}^{+\infty} x \cdot \left(\frac{1}{9} x^{-4}\right) dx = \int_{1/3}^{+\infty} \frac{1}{9} x^{-3}\, dx = \frac{1}{9}\int_{1/3}^{+\infty} x^{-3}\, dx =$$

$$= \frac{1}{9}\left[-\frac{x^{-2}}{2}\right]_{1/3}^{+\infty} = \frac{1}{9}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{1/3}^{+\infty} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$E(X) = 0.5 \rightarrow$ os valores assumidos por X variam em torno de 0.5.

$$\varepsilon_{0.5}: \; P(X < \varepsilon_{0.5}) = 0.5 \Leftrightarrow \int_{1/3}^{\varepsilon_{0.5}} \frac{1}{9} x^{-4}\, dx = 0.5 \Leftrightarrow \frac{1}{9}\int_{1/3}^{\varepsilon_{0.5}} x^{-4}\, dx = 0.5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[-\frac{x^{-3}}{3}\right]_{1/3}^{\varepsilon_{0.5}} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{1/3}^{\varepsilon_{0.5}} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{3(\varepsilon_{0.5})^3} + \frac{1}{3\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

Exercício 34 (b)

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3\,\varepsilon_{0.5}^3} + \frac{27}{3} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{3\,\varepsilon_{0.5}^3} = \frac{9}{2} - 9 \Leftrightarrow -\frac{1}{3\,\varepsilon_{0.5}^3} = -\frac{9}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3\,\varepsilon_{0.5}^3} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon_{0.5}^3} = \frac{27}{2} \Leftrightarrow \varepsilon_{0.5}^3 = \frac{2}{27} \Leftrightarrow \varepsilon_{0.5} = \sqrt[3]{\frac{2}{27}} \simeq 0.42$$

$\varepsilon_{0.5} \simeq 0.42$ $\rightarrow$ é o valor de X que distribui a unidade de probabilidade em duas partes iguais de 0.5: $P(X \leq 0.42) = 0.5$ e $P(X > 0.42) = 0.5$

Exercício 34 (c)

Porque $\mu_X > \xi_{0.5}$, a distribuição de X é assimétrica positiva

42. A variável aleatória X tem função probabilidade tal que

$$f(x) = \frac{x}{10} \quad (x = 1, 2, 3, 4).$$

a) Calcule $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.

b) Sendo $Y = X^2$, determine $E(Y)$ e $\mathrm{Var}(Y)$.

Exercício 42 (a): Valor Médio e Variância

$f(x) = \frac{x}{10} \quad (x = 1, 2, 3, 4)$

(a)

$$E(x) = \sum_x x\, f(x) = \sum_{x=1}^{4} x \cdot \frac{x}{10} = \sum_{x=1}^{4} \frac{x^2}{10} = \frac{1^2}{10} + \frac{2^2}{10} + \frac{3^2}{10} + \frac{4^2}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

- $$E(x^2) = \sum_x x^2 f(x) = \sum_{x=1}^{4} x^2 \cdot \frac{x}{10} = \sum_{x=1}^{4} \frac{x^3}{10} = \frac{1^3}{10} + \frac{2^3}{10} + \frac{3^3}{10} + \frac{4^3}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

Logo,

$$Var(x) = 10 - 3^2 = 1$$

Exercício 42 (b): Valor Médio e Variância

$y = x^2$

$E(y) = E(x^2) = 10$

$Var(y) = Var(x^2) = E(x^4) - [E(x^2)]^2$

- $E(x^4) = \sum_x x^4 f(x) = \sum_{x=1}^{4} x^4 \frac{x}{10} = \sum_{x=1}^{4} \frac{x^5}{10} = \frac{1^5}{10} + \frac{2^5}{10} + \frac{3^5}{10} + \frac{4^5}{10} = \frac{1300}{10} = 130$

Logo,

$Var(y) = 130 - 10^2 = 30$

43. Seja X uma variável aleatória com função probabilidade definida por,

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^x \quad (x = 1, 2, 3, \ldots).$$

Obtenha a função geradora dos momentos e utilizando-a calcule a média e a variância de X.

Obrigada!

Questões?