Simulação e Otimização

Teste Capítulo 1

15/10/2024 Ano letivo 2024/2025

1. (2,0 valores) Considere os seguintes problemas de programação linear

$$(A) \qquad \min\{cx : Ax \leq b \text{ e } Dx \geq d\}$$

e

$$(B) \qquad \min\{cx + v(b - Ax) : Dx \geq d\},$$

com $v \leq 0$. Mostre que (B) é uma relaxação de (A).

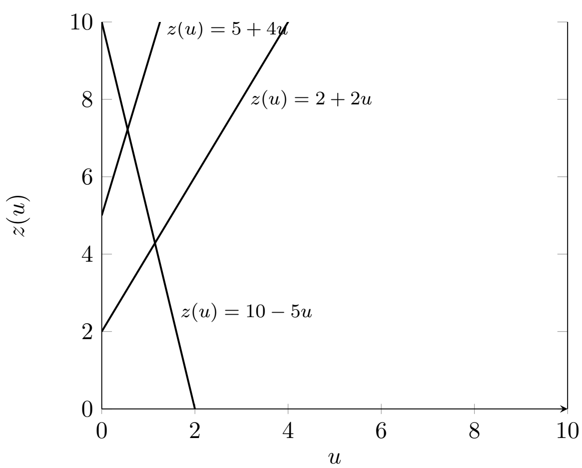
2. Considere o seguinte problema de programação linear inteira.

$$\begin{aligned} (P) \qquad & \min\ 7x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a: } & 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & 5x_1 + x_2 \leq 8 \qquad (*) \\ & x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

   (a) (1,5 valores) Construa a relaxação Lagrangeana de (P) relaxando a restrição assinalada com $(*)$ e apresente o problema dual Lagrangeano.

   (b) (2,5 valores) Considerando $u = -2$, resolva a relaxação Lagrangeana e relacione o seu valor com o valor ótimo de (P).

3. Considere um problema de programação linear inteiro de **maximização** (Q). Foram calculadas todas as soluções admissíveis de uma relaxação Lagrangeana de (Q) e as expressões $z(u)$ associadas, que estão representadas no seguinte gráfico:



   (a) (2,0 valores) Deduza a expressão da função dual Lagrangeana através da representação gráfica e calcule o w^{DL}.

   (b) (1,5 valores) O que pode concluir sobre o valor ótimo de (Q)? E sobre o valor ótimo da relaxação linear de (Q)?

4. Considere o seguinte problema de programação linear inteira.

$$
\begin{aligned}
(R) \qquad & \max\ 3x_1 + 2x_2 \\
\text{sujeito a: } & 2x_1 + 5x_2 \leq 18 \\
& 4x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

   (a) (2,5 valores) Determine a solução ótima do problema apresentado utilizando o algoritmo de *branch-and-bound* ramificando na variável mais fracionária.

   (b) (1,5 valores) Assuma que a variável x_2 é contínua. Indique, justificando, qual é a solução ótima neste caso.

5. Considere o seguinte problema de programação linear inteira.

$$
(S) \qquad z = \max_{(x_1,x_2)\in X} \{2x_1 + 4x_2\}
$$

   com $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : 2x_1 + 5x_2 \leq 18,\ x_1 + x_2 \leq 5 \text{ e } x_1, x_2 \geq 0\}$.

   (a) (1,5 valores) Apresente uma desigualdade válida para X e indique, justificando, se é redundante.

   (b) (2,5 valores) Sabendo que a solução ótima da relaxação linear de (S) é $x^{RL} = (7/3, 8/3)$, encontre um corte de Gomory para x^{RL} e mostre que se trata de um corte.

6. (2,5 valores) Aplique o algoritmo para fortalecer a seguinte restrição com variáveis binárias

$$
10x_1 + 20x_2 + 30x_3 \leq 50,
$$

   com $x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, 3$. Qual foi a restrição fortalecida que obteve?