Simulação e Otimização

Teste Capítulo 1
Tópicos de uma resolução incompleta

15/10/2024 Ano letivo 2024/2025

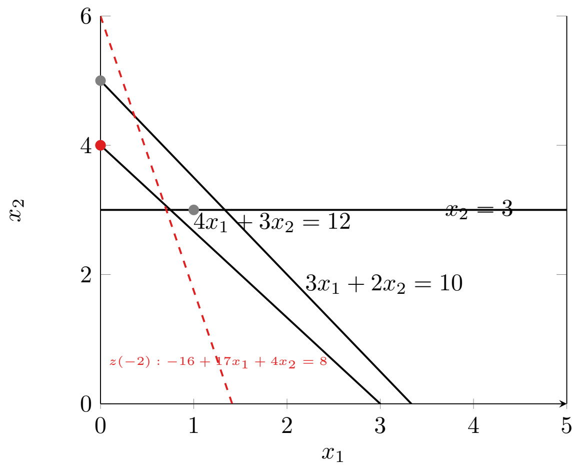
1. Seja $X_A = \{x \in R^n : Ax \leq b \text{ e } Dx \geq d\}$ e $X_B = \{x \in R^n : Dx \geq d\}$. Ora, $X_A \subset X_B$ pois X_A é definido pelas mesmas restrições que X_B e por conjunto de restrições adicional. Além disso, temos, para $x \in X_A$, que $Ax \leq b \iff 0 \leq b - Ax$. Logo, como $v \leq 0$, $cx + v(b - Ax) \leq cx$. Desta forma, podemos concluir que (B) é uma relaxação de (A).

2. (a)

$$\begin{aligned} z(u) = \min\ & 7x_1 + 2x_2 + u(8 - 5x_1 - x_2) = 8u + (7-5u)x_1 + (2-u)x_2 \\ \text{sujeito a: }\ & 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

$$w^{DL} = \max\{z(u) : u \leq 0\}$$

(b)

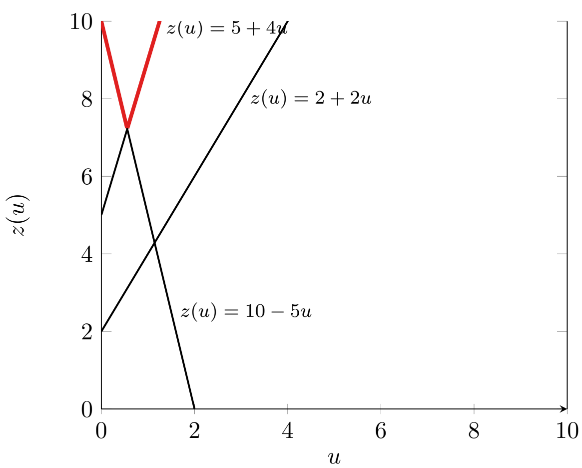


A RA são os pontos assinalados.

$z(-2) = \min 8 \times (-2) + (7 - 5 \times (-2))x_1 + (2 - (-2))x_2 = \min -16 + 17x_1 + 4x_2$

A SO de $z(-2)$ é $(0, 4)$ e $z(-2) = -16 + 17 \times 0 + 4 \times 4 = 0$.
Logo, podemos concluir que $z \geq z(-2) = 0$.

3.

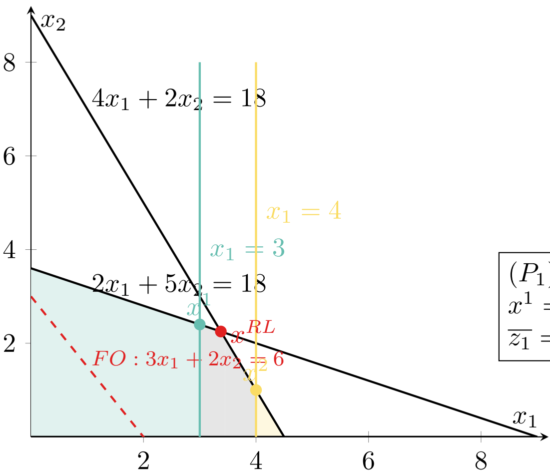


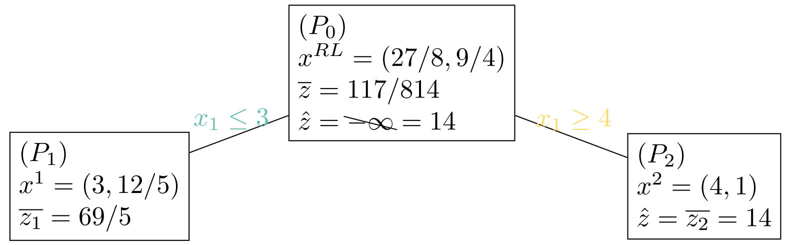
(a) Como o problema original é de maximização, a função dual Lagrangeana é defina pelas retas que estão "acima" de todas as outras. Assim, a expressão da função dual Lagrangeana é:

$$z(u) = \begin{cases} 10 - 5u, & 0 \leq u \leq \frac{5}{9} \\ 5 + 4u, & u \geq \frac{5}{9} \end{cases}$$

O problema dual Langrangeano é $w^{DL} = \min_{u \geq 0}\{z(u)\}$. Logo, $w^{DL} = z(\frac{5}{9}) = 5 + 4 \times \frac{5}{9} = \frac{65}{9}$.

(b) Podemos concluir que $z \geq \frac{65}{9}$ e $z^{RL} \leq \frac{65}{9}$.

4. (a) 



Não é necessário ramificar (P_2) pois a solução obtida é admissível para (P). O valor da solução obtida em (P_1) é $\overline{z_1} = 69/5 = 13.8$. Sabemos que, ramificando (P_1) nunca iremos obter uma solução com valor melhor que 13.8, como já temos uma SA com valor 14, que é melhor que 13.8, não é necessário ramificar (P_1).

Assim, podemos concluir que $x^* = (4, 1)$ e $z = 14$.

(b) Se a variável x_2 é contínua, ambas as soluções x^1 e x^2 são admissíveis. Logo, a SO será a solução com melhor valor da função objetivo, que neste caso é x^2. Assim, a SO é $x^* = (4, 1)$ e o seu valor ótimo é $z = 14$.

5. (a) Uma desigualdade válida para X é, por exemplo, $3x_1 + 6x_2 \leq 23$, que é redundante pois foi obtida somando as restrições $2x_1 + 5x_2 \leq 18$ e $x_1 + x_2 \leq 5$.

(b) Escrevendo o sistema na forma aumentada obtemos:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 18 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5 \end{cases}$$

A SO da relaxação linear na forma aumentada é: $x^{RL} = (\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 0, 0) \implies x_1$ e x_2 são VBs. O sistema em função de x_1 e x_2 fica:

$$\begin{cases} 2(5 - x_1 - x_4) + 5x_2 + x_3 = 18 \\ x_1 = 5 - x_2 - x_4 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ - \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = 8/3 - 1/3x_3 + 2/3x_4 \\ x_1 = 5 - 8/3 + 1/3x_3 - 2/3x_4 - x_4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 + 1/3x_3 - 2/3x_4 = 8/3 \\ x_1 - 1/3x_3 + 5/3x_4 = 7/3 \end{cases}$$

Como ambas as restrições têm TI fracionários, vamos escolher a associada a x_1 para gerar o corte de Gomory.

$$(-\frac{1}{3} + 1)x_3 + (\frac{5}{3} - 1)x_4 \geq (\frac{7}{3} - 2) \iff \frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \geq \frac{1}{3} \iff 2x_3 + 2x_4 \geq 1$$

Reescrevendo o corte em função de x_1 e x_2 obtemos $6x_1 + 12x_2 \leq 45$, que corta a SO da relaxação linear pois $6x_1^{RL} + 12x_2^{RL} = 42/3 + 96/3 = 46 < 45$.

6.

- k = 1
  - S =10+20+30 = 60
  - $S = 60 < b + |a_1| = 50 + 10 = 60$? Não.
  - 1 = 3? Não.
- k = 2
  - S = 10+20+30 = 60
  - $S = 60 < b + |a_2| = 50 + 20 = 70$? Sim.
    - $a_2 = 20 > 0$? Sim.
    - $a'_2 \leftarrow S - b = 60 - 50 = 10, b' \leftarrow S - a_2 = 60 - 20 = 40$
    - Nova restrição: $10x_1 + 10x_2 + 30x_3 \leq 40$.
- k = 3
  - S = 10 + 10 + 30 = 50
  - $S = 50 < b + |a_3| = 40 + 20 = 70$? Sim.
    - $a_3 = 30 > 0$? Sim.
    - $a'_3 \leftarrow S - b = 50 - 40 = 10, b' \leftarrow S - a_3 = 50 - 30 = 20$
    - Nova restrição: $10x_1 + 10x_2 + 10x_3 \leq 20$.

A restrição fortalecida é $10x_1 + 10x_2 + 10x_3 \leq 20$.