INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

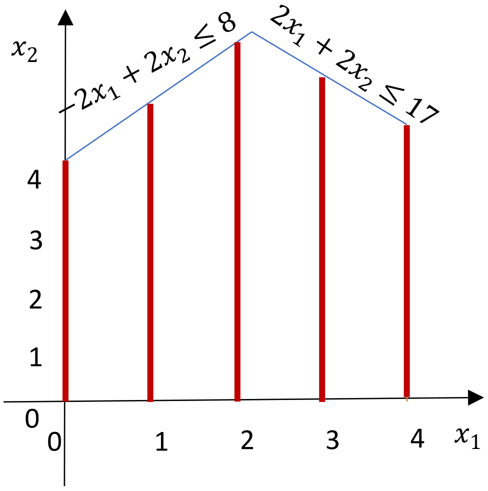
PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA II

11 de novembro de 2025 **Teste 1** Duração: 2h00

TÓPICOS DE RESOLUÇÃO

---

1. a)



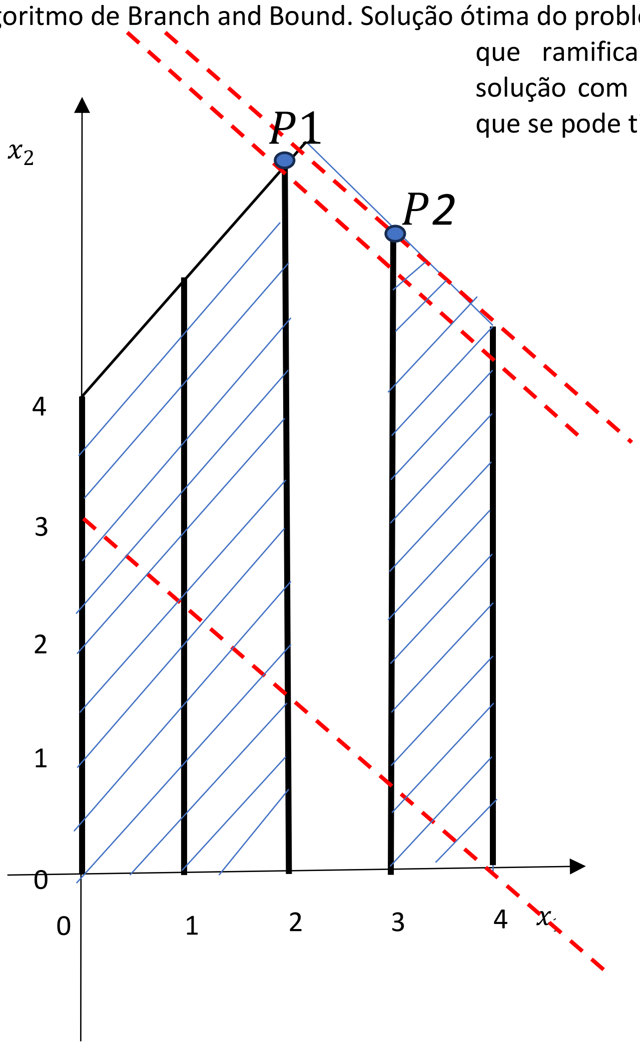
A RA é representada pelos pontos dos 5 segmentos de reta verticais a vermelho.

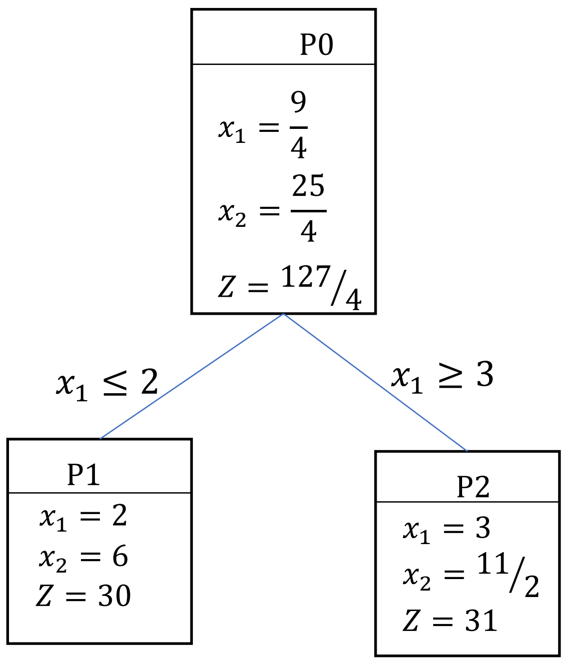
b) O valor ótimo do PLI dado $Z^* \le Z^*_{RL} = 3 \times \frac{9}{4} + 4 \times \frac{25}{4} = \frac{127}{4}$.

c) Corte de Gomory com x_1

$x_1 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x_1 + \left(-1 + \frac{3}{4}\right)x_4 + \left(0 + \frac{1}{4}\right)x_5 = 2 + \frac{1}{4}$ portanto o corte vem $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_5 \le 0 \Leftrightarrow 1 - 3x_4 - x_5 \le 0.$

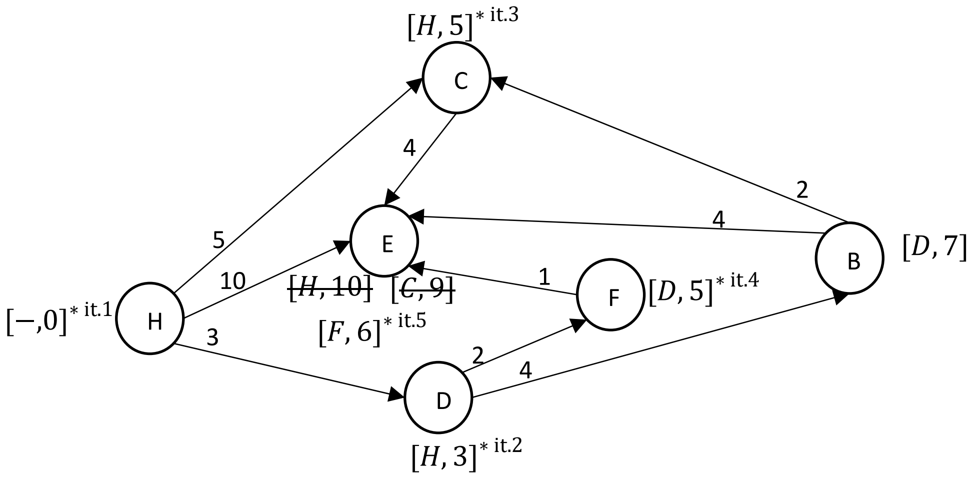
d) Algoritmo de Branch and Bound. Solução ótima do problema dado é P2. Se for PLI pura há que ramificar P2 pois poderá existir uma solução com valor superior a 30. A conclusão que se pode tirar é que $30 \le Z^* \le 31$.





2. **a)** Trata-se do problema do caminho mais curto de *H* para *E*.

b)



O veículo deve seguir o percurso $\mathrm{H} \rightarrow \mathrm{D} \rightarrow \mathrm{F} \rightarrow \mathrm{E}$ e demora 6 minutos.

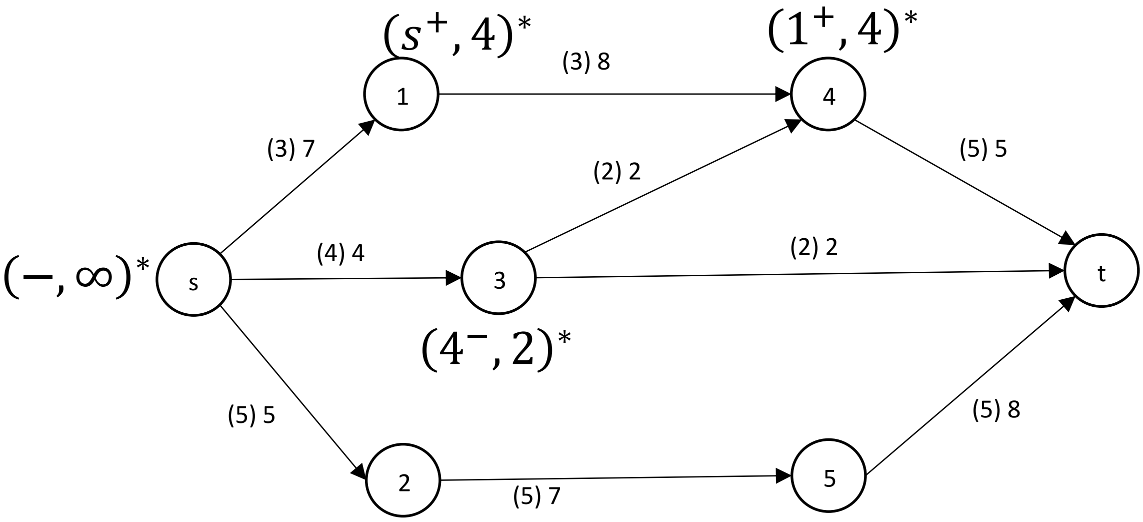
c) Formulação em PL. Caminho mais curto com 2 origens possíveis (H ou B) e 1 destino (E)

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se o arco (i,j) pertence ao caminho} \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}, (i,j) \in A = \cdots$$

$$Min\ Z = 5x_{HC} + 10x_{HE} + 3x_{HD} + 4x_{CE} + 4x_{DB} + 2x_{DF} + x_{FE} + 4x_{BE} + 2x_{BC}$$

$$\begin{cases} x_{HC} + x_{HE} + x_{HD} \leq 1 \\ - x_{DB} + x_{BE} + x_{BC} \leq 1 \\ -x_{HC} + x_{CE} - x_{BC} = 0 \\ -x_{HD} + x_{DB} + x_{DF} = 0 \\ -x_{DF} + x_{FE} = 0 \\ -x_{HE} - x_{CE} - x_{FE} - x_{BE} = -1 \\ x_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in A \end{cases}$$

3. a) Pelo algoritmo de Ford-Fulkerson.
$I = \{(s,1); (1,4); (2,5); (5,t)\}$ e
$R = \{(s,1); (s,2); (s,3); (1,4); (2,5); (3,4); (3,t); (4,t); (5,t)\} = A$



Como não se consegue identificar uma cadeia de aumento, pois não é possível etiquetar o vértice t, o fluxo inicial dado, de valor 12, é ótimo.

b) O corte de capacidade mínima, define-se com S = ao conjunto dos vértices etiquetados, é $\{(4,t); (3,t); (s,2)\}$ e tem capacidade $5 + 2 + 5 = 12$.

4. a)

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se é instalado um aparelho na porta entre as salas } i \text{ e } j \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}, \ (i,j) \in A$$

$$A = \{(1,2); (1,4); (3,4); (3,6); (4,5); (5,7); (6,7)\}$$

$$\min Z = \sum_{(i,j)\in A} x_{ij}$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} + \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} \geq 1 \quad i = 1, 2, \dots, 7 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A. \end{cases}$$

b) Além das variáveis definidas em a) considere-se y= nº de componentes a comprar

$$\min z = c \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} + dy$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} + \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} \geq 1 \quad i = 1, 2, \dots, 7 \\ 2y \geq \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad (i,j) \in A \\ y \geq 0 \quad \text{e inteiro} \end{cases}$$