Lisbon School of Economics & Management
Universidade de Lisboa

Estatística I

Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)

2.º Ano/1.º Semestre

2025/2026

Aulas Teórico-Práticas N.ºs 23 e 24 (Semana 12)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt

https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao

https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)	Aulas TP (Semanas 3 a 6)	Aulas TP (Semanas 7 a 9)	Aulas TP (Semanas 10 a 12)
• **Capítulo 1**: Análise Descritiva • **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

1

Distribuição t-Student

Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição t-Student

- A distribuição t-Student é uma distribuição de probabilidade contínua.
- A distribuição t-Student geralmente surge quando temos uma população com variância desconhecida (e tem de ser estimada a partir dos dados recolhidos) e uma amostra de dimensão pequena ($n < 30$).
- A distribuição t-Student é dada pelo quociente entre uma normal reduzida e a raiz quadrada de uma qui-quadrado dividida pelo respectivo número de graus de liberdade.

  I.e., se $Z \sim N(0;\, 1)$ e $Y \sim \chi^2_{(n)}$, duas variáveis aleatórias independentes, então:

$$\boxed{T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \cap t_{(n)}}$$

- Se X tem distribuição t-Student com n graus de liberdade, escreve-se:

$$\boxed{X \sim t_{(n)}}$$

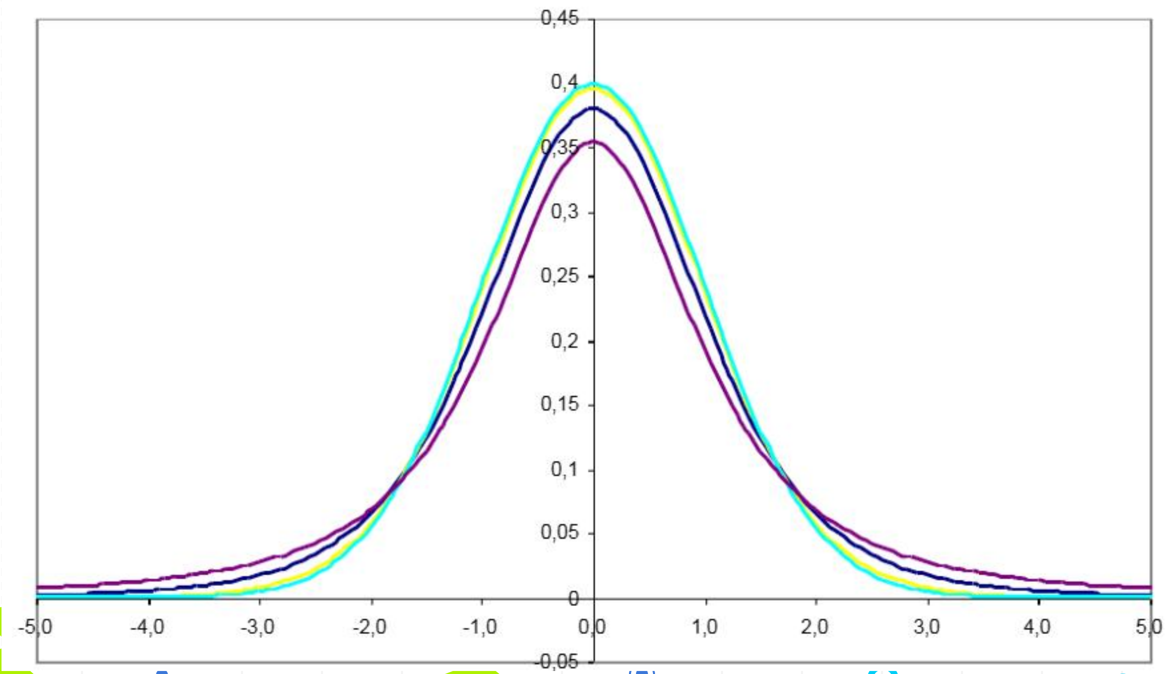
Distribuição t-Student

- A distribuição t-Student tem um parâmetro: n – o nº de graus de liberdade.
- É uma distribuição simétrica.

- $E[X] = 0$
- $Var[X] = n/(n-2)$, se $n > 2$

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição t-Student

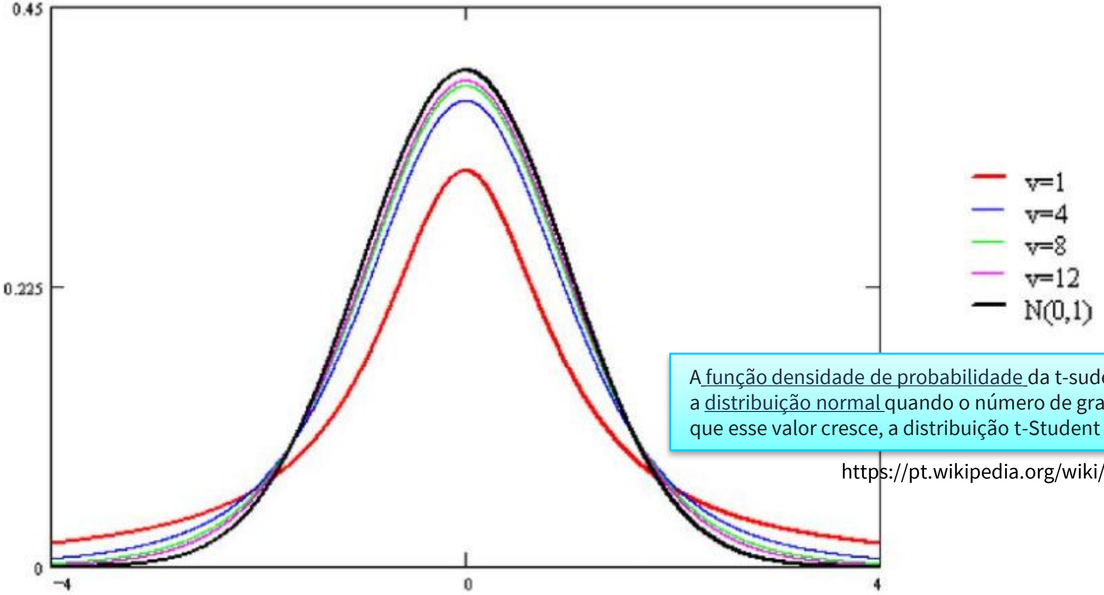


Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

T-Student

- Se a **variável tem distribuição Normal na população**, ou a amostra é suficientemente grande, mas não conhecemos o desvio da população, só da amostra, então ...
- ... A média amostral se distribui conforme uma **t-Student**
- **...** A distribuição t-Student depende dos graus de liberdade (n-1), que denotamos por ν

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \cap t_{(n-1)}$$



A função densidade de probabilidade da t-sudent detém caudas mais pesadas que a distribuição normal quando o número de graus de liberdade é pequeno e à medida que esse valor cresce, a distribuição t-Student aproxima-se da normal.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Distribui%C3%A7%C3%A3o_t_de_Student

https://slideplayer.com.br/slide/14561961

Distribuição t-Student

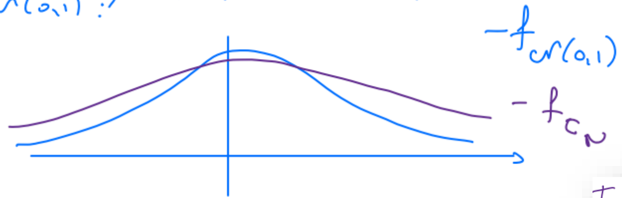
- A distribuição t-Student varia de acordo com os graus de liberdade. Isto significa que a sua curva depende da dimensão da amostra, n.
- Está tabelada para algumas probabilidade e $n \leq 30$, $n = 40$, $n = 60$, $n = 120$ e $n = \infty$.
- Quando $n > 30$, pode usar-se a aproximação à distribuição normal. Em tais casos, $\mu = 0$ e $Var = n/(n-2)$.
- À medida que n aumenta, a distribuição tende para a distribuição normal. Para n grande, a distribuição t-Student tende a ser muito semelhante à distribuição normal.

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição t-Student: Resumo...

propriedades básicas desta distribuição

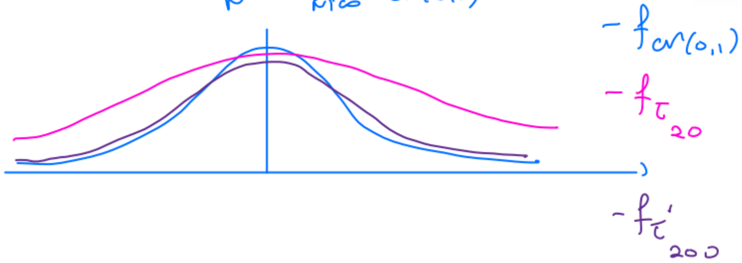
i) a sua função densidade de probabilidade é simétrica em torno de zero e tem uma representação gráfica muito parecida com a da $N(0,1)$:



t_N lê-se "distribuição t de student com N graus de liberdade"

ii) Quando N é "bastante grande",

$$f_{t_N}(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} f_{N(0,1)}(x)$$



Distribuição t-Student

Formulário

- ***t*-“STUDENT”**

$$T = \frac{U}{\sqrt{V/n}} \sim t(n) \text{ com } U \sim N(0{,}1) \text{ e } V \sim \chi^2(n) \text{ independentes}$$

$$E(T) = 0\,;\ \mathrm{Var}(T) = \frac{n}{n-2}\ (n > 2)\,;\ \gamma_1 = 0\,;\ \gamma_2 = \frac{3(n-2)}{n-4}\ (n > 4)$$

Propriedade:
- Sendo $T \sim t(n) \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} F_T(t \mid n) = \Phi(t)$

Distribuição do t-Student: Exercícios

Variáveis Aleatórias Contínuas

2

Suponha que $X \sim t_{(12)}$.

a) Calcule $P[X \leq 2{,}7]$;

b) Qual o valor de a tal que $P[X \geq a] = 0{,}95$;

c) Qual o valor de b tal que $P[X > b] = 0{,}05$;

d) Qual o valor de c tal que $P[-c < X < c] = 0{,}9$.

Exercício a)

Suponha que X ~ $t_{(12)}$.

a) Calcule $P[X \leq 2,7]$;

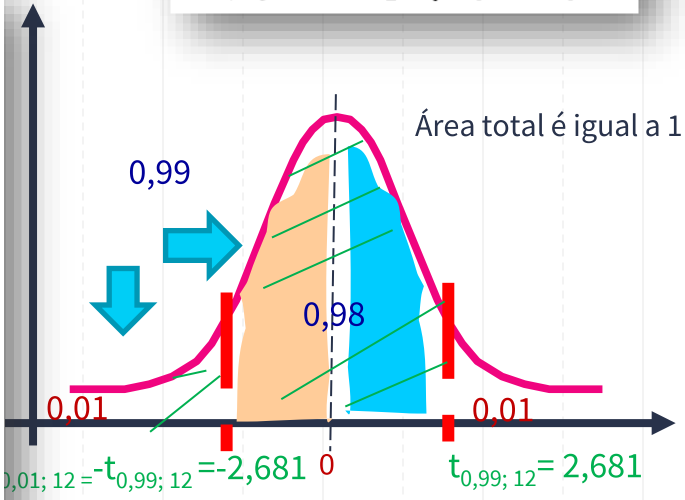
b) Qual o valor de a tal que $P[X \geq a] = 0,95$;

c) Qual o valor de b tal que $P[X > b] = 0,05$;

d) Qual o valor de c tal que $P[-c < X < c] = 0,9$.

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

n \ ε	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733



$$P(X \leq 2,7) \sim P(X \leq 2,681) = 1 - P(X > 2,681) = 1 - 0,01 = 0,99$$

Exercício b)

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

Suponha que $X \sim t_{(12)}$.

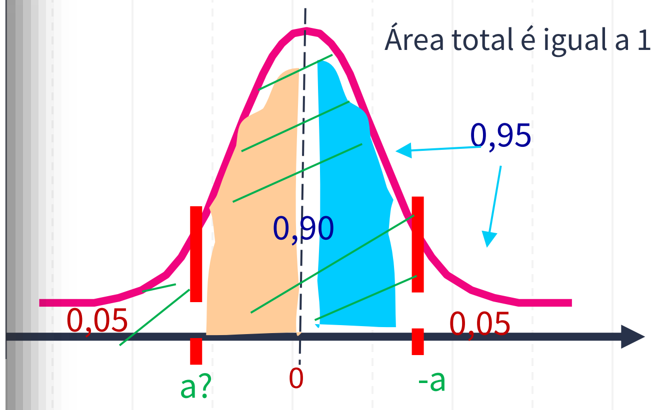
a) Calcule $P[X \leq 2{,}7]$;

b) Qual o valor de a tal que $P[X \geq a] = 0{,}95$;

c) Qual o valor de b tal que $P[X > b] = 0{,}05$;

d) Qual o valor de c tal que $P[-c < X < c] = 0{,}9$.

ε / n	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733



$P(X \geq a) = 0{,}95 \Leftrightarrow P(X > -a) = 0{,}05 \Leftrightarrow -a = 1{,}782 \Leftrightarrow a = -1{,}782$

Exercício c)

Suponha que X ~ $t_{(12)}$.

a) Calcule $P[X \le 2{,}7]$;

b) Qual o valor de a tal que $P[X \ge a] = 0{,}95$;

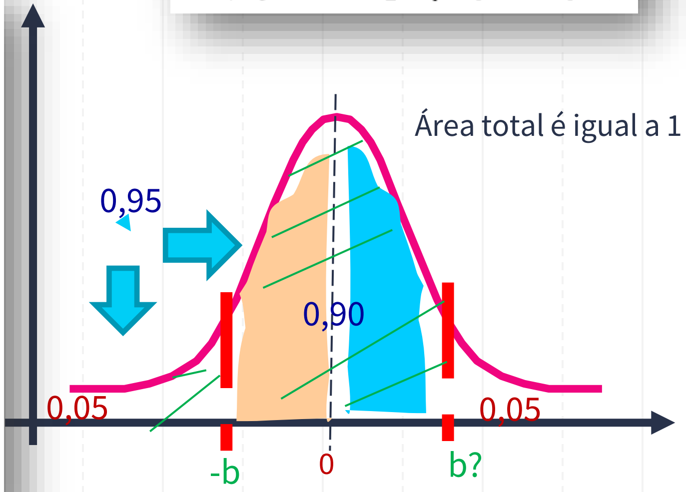
c) Qual o valor de b tal que $P[X > b] = 0{,}05$;

d) Qual o valor de c tal que $P[-c < X < c] = 0{,}9$.

$$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$$

n \ ε	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733

$P(X > b) = 0{,}05 \Leftrightarrow b = 1{,}782$



Exercício d)

$t_{n,\varepsilon} : P(X > t_{n,\varepsilon}) = \varepsilon$

ε / n	.400	.250	.100	.050	.025	.010	.005	.001
1	.325	1,000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733

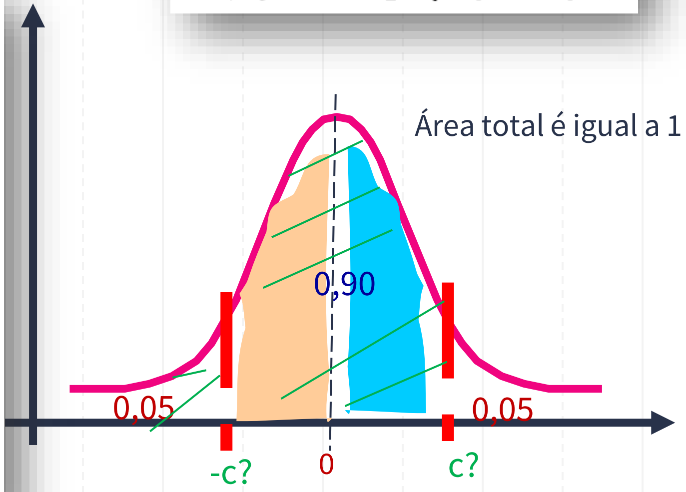
Suponha que $X \sim t_{(12)}$.

a) Calcule $P[X \leq 2{,}7]$;

b) Qual o valor de <u>a</u> tal que $P[X \geq a] = 0{,}95$;

c) Qual o valor de <u>b</u> tal que $P[X > b] = 0{,}05$;

d) Qual o valor de <u>c</u> tal que $P[-c < X < c] = 0{,}9$.



$P(-c < X < c) = 0{,}90 \Leftrightarrow P(X < c) - P(X < -c) = F(c) - F(-c) = F(c) - (1 - F(c))$
$= 2 \times F(c) - 1 = 0{,}90 \Leftrightarrow F(c) = 0{,}95 \Leftrightarrow c = F(0{,}95)^{-1} = 1{,}782$

3 Distribuição F-Snedcor

Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição F-Snedcor

- A distribuição F-Snedecor é uma distribuição de probabilidade contínua.
- A distribuição F-Snedecor é dada pelo quociente entre duas variáveis aleatórias com distribuição do qui-quadrado, cada uma dividida pelos respectivos graus de liberdade.

  I.e., se $X \sim \chi^2_{(m)}$ e $Y \sim \chi^2_{(n)}$, duas variáveis aleatórias independentes, então:

$$\boxed{F \equiv \frac{X/m}{Y/n} \cap F_{(m,n)}}$$

- Se X tem uma distribuição F-Snedecor com m e n graus de liberdade, escreve-se:

  $\boxed{X \sim F_{(m,\, n)}}$

- A distribuição F-Snedecor tem dois parâmetros: m e n – *i.e.*, o nº de graus de liberdade do numerador e do denominador (m, n $\in$ N).

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição F-Snedcor

- É uma distribuição positiva e não simétrica.

- E[X] = n/(n-2), quando n > 2

$$VAR[X] = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \quad , \text{ quando } n > 4$$

- Se $X \sim F_{(m,\, n)}$, então:

$$\frac{1}{X} \cap F_{(n,m)}$$

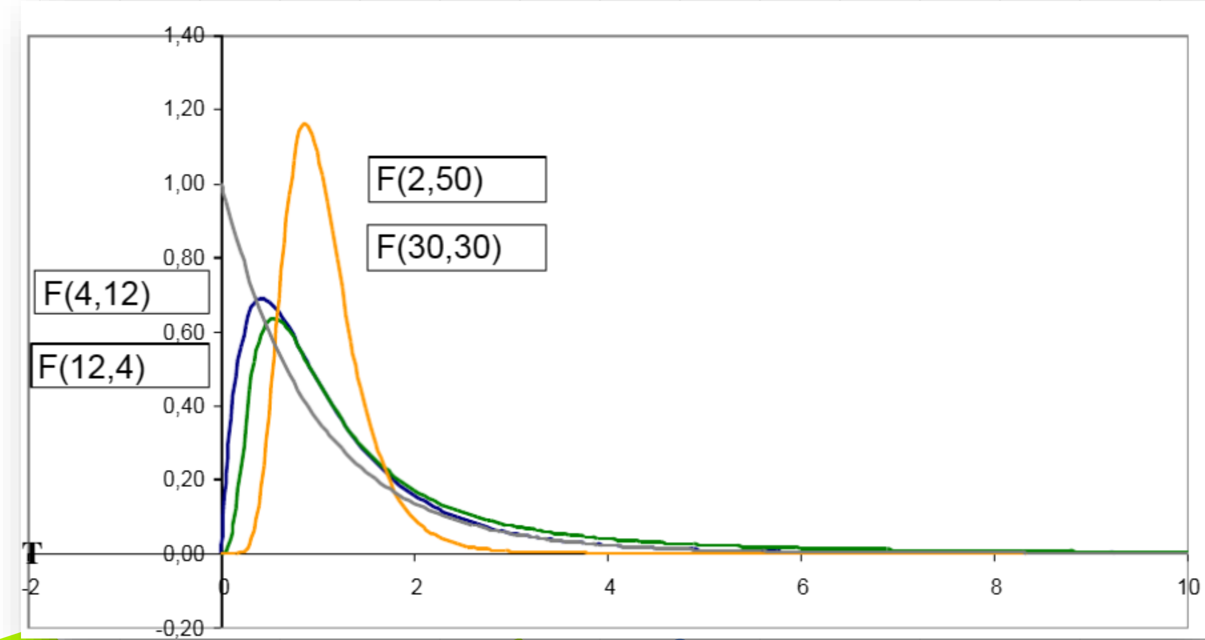
- Se $X \sim t_{(n)}$, então $X^2 \sim F_{(1,\, n)}$

- A distribuição F-Snedecor está tabelada para algumas probabilidade e alguns m e n

(m, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 30, 60, 120, ∞)

Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição F-Snedcor



Distribuição Qui-quadrado, Distribuição t-Student e Distribuição F-Snedecor - Distribuições - Studocu

Distribuição F-Snedcor

Formulário

- ***F*-SNEDCOR**

$$F = \frac{U/m}{V/n} \sim F(m,n) \text{ com } U \sim \chi^2(m)\,,\ V \sim \chi^2(n) \text{ (independentes)}$$

$$E(X) = \frac{n}{n-2} \quad (n>2)\,;\ \mathrm{Var}(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \quad (n>4)$$

Propriedades:

- $X \sim F(m,n) \Rightarrow \frac{1}{X} \sim F(n,m)$
- $T \sim t_{(n)} \Rightarrow T^2 \sim F(1,n)$

Distribuição do F-Snedcor: Exercícios

Variáveis Aleatórias Contínuas

4

Suponha que $X \sim F_{(10;\, 5)}$.

a) Calcule o valor de <u>a</u> tal que $P[X > a] = 0{,}025$;

b) Calcule o valor de <u>b</u> tal que $P[X < b] = 0{,}05$;

c) Calcule os valores de <u>c</u> e <u>d</u> tal que $P[c < X < d] = 0{,}9$.

Exercício a)

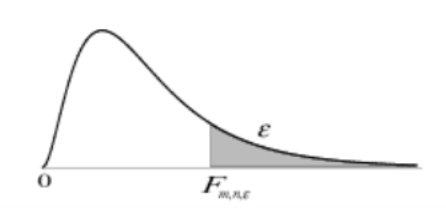
Suponha que X ~ F $_{(10;\,5)}$.

a) Calcule o valor de a tal que P[X > a] = 0,025;

b) Calcule o valor de b tal que P[X < b] = 0,05;

c) Calcule os valores de c e d tal que P[c < X < d] = 0,9.

$$F_{m,n,\varepsilon} : P(X > F_{m,n,\varepsilon}) = \varepsilon$$



lib… de do denominador	ε	m - graus de libe… do numerador 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
	.050	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.90	245.95	248.02	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25	254.32
	.025	647.79	799.48	864.15	899.60	921.83	937.11	948.20	956.64	963.28	968.63	976.72	984.87	993.08	997.27	1001.40	1005.60	1009.79	1014.04	1018.26
	.010	4052.18	4999.34	5403.53	5624.26	5763.96	5858.95	5928.33	5980.95	6022.40	6055.93	6106.68	6156.97	6208.66	6234.27	6260.35	6286.43	6312.97	6339.51	6365.59
2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
	.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
	.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
	.010	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.49	99.50
3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
	.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
	.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11
	.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
	.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02

P(X > a) = 0,025 => a = 6,62

Exercício b)

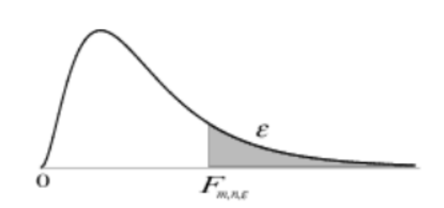
Suponha que X ~ F $_{(10;\,5)}$.

a) Calcule o valor de a tal que P[X > a] = 0,025;

b) Calcule o valor de b tal que P[X < b] = 0,05;

c) Calcule os valores de c e d tal que P[c < X < d] = 0,9.

$$F_{m,n,\varepsilon} : P(X > F_{m,n,\varepsilon}) = \varepsilon$$



		m – graus de liberdade do numerador																		
	ε	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
10	.100	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
	.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
	.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
	.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.36	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4.28	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5.67	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.48	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.26	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
	.025	6.55	5.10	4.47	4.12	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
	.010	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36

Quantil da distribuição F-Snedecor de probabilidade 0,05 com 10 e 5 graus de liberdade

Quantil da distribuição F-Snedecor de probabilidade 0,95 com 5 e 10 graus de liberdade. No caso da tabela é o valor d tal que P(F > d) = 0,05

P(X < b) = 0,05 ⇔ 1-P(X > b) = 0,05 ⇔ P(X > b) = 0,95
=> b = F0,05; 10,5 = 1/ F0,95; 5,10 = 1/3,33 = 0,30

$$F_{n_1-1,n_2-1;\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{F_{n_2-1,n_1-1;1-\frac{\alpha}{2}}}$$

Exercício c)

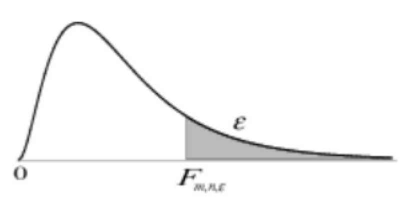
Suponha que X ~ F $_{(10; 5)}$.

a) Calcule o valor de a tal que P[X > a] = 0,025;

b) Calcule o valor de b tal que P[X < b] = 0,05;

c) Calcule os valores de c e d tal que P[c < X < d] = 0,9.

$$F_{m,n,\varepsilon} : P(X > F_{m,n,\varepsilon}) = \varepsilon$$



n - graus de liberdade do denominador	ε	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15							∞
1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.2							63.33
	.050	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.90	245.9							254.32
	.025	647.79	799.48	864.15	899.60	921.83	937.11	948.20	956.64	963.28	968.63	976.72	984.8							1018.26
	.010	4052.18	4999.34	5403.53	5624.26	5763.96	5858.95	5928.33	5980.95	6022.40	6055.93	6106.68	6156.9							6365.59
2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
	.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.4				
	.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30														
	.010	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30														
3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31														
	.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01														
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88														
	.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24														
4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05														
	.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26														
	.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36														
	.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52														
5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11
	.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
	.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02

m - graus de liberdade do numerador

Quantil da distribuição F-Snedecor de probabilidade 0,05 com 10 e 5 graus de liberdade

P(c < X < d) = 0,9

P(X > d) = 0,05 => d = 4,74

P(X > c) = 0,95 => c = F0,05; 10,5 = 1/ F0,95; 5,10 = 1/3,33 = 0,30

(ver slide a seguir)

$$F_{n_1-1,n_2-1;\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{F_{n_2-1,n_1-1;1-\frac{\alpha}{2}}}$$

Exercício c)

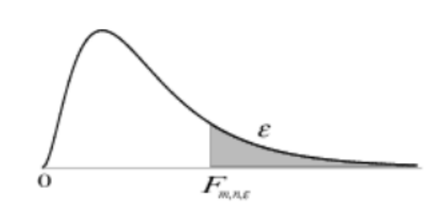
Suponha que X ~ F $_{(10;\,5)}$.

a) Calcule o valor de a tal que P[X > a] = 0,025;

b) Calcule o valor de b tal que P[X < b] = 0,05;

c) Calcule os valores de c e d tal que P[c < X < d] = 0,9.

$$F_{m,n,\varepsilon} : P(X > F_{m,n,\varepsilon}) = \varepsilon$$



		m – graus de liberdade do numerador																		
	ε	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
10	**.100**	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
	.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
	.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
	.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	**.100**	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
	.050	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
	.025	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
	.010	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	**.100**	3.18	2.81	2.61	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1.90
	.050	4.75	3.89	3.49	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.30
	.025	6.55	5.10	4.47	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2.72
	.010	9.33	6.93	5.95	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3.36

P(c < X < d) = 0,9

P(X > c) = 0,95 => c = F0,05; 10,5 = 1/ F0,95; 5,10 = 1/3,33 = 0,30

$$F_{n_1-1,n_2-1\,;\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{F_{n_2-1,n_1-1\,;1-\frac{\alpha}{2}}}$$

Teorema do Limite Central 5

Distribuição Assintótica da Soma e da Média de V.A.´s: Teorema do Limite Central (TLC)

- Na maioria das situações é difícil determinar a distribuição da soma de variáveis (mesmo que sejam independentes!). O teorema seguinte **justifica a grande utilidade** e **importância da distribuição normal** (quer em probabilidades quer em estatística).

- O teorema que vamos ver de seguida diz-nos que, para um grande número de v.a.'s com idêntico comportamento (distribucional), seja ele qual for, e mesmo que seja praticamente desconhecido, a distribuição da soma das v.a.'s aproxima-se de uma distribuição Normal; e tem uma distribuição que é tão mais próxima da Normal, quanto maior for o número de v.a.'s da soma.

TLC

Teorema do Limite Central

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma sequência de v.a. independentes e identicamente distribuídas com valor esperado $\mu < \infty$ e variância $\sigma^2 < \infty$. Considere-se $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ e $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$, então quando $n \to +\infty$

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \overset{a}{\sim} N(0,1),$$

ou seja,

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \leq z\right) = \Phi(z),$$

onde $\Phi(.)$ é a função de distribuição da normal reduzida i.e., $N(0,1)$.

Slides da Professora Conceição Amado

TLC

Teorema do Limite Central

De modo equivalente, se tem

$$\frac{\bar{X}_n - E\left(\bar{X}_n\right)}{\sqrt{V\left(\bar{X}_n\right)}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \overset{a}{\sim} N\left(0,1\right),$$

ou seja,

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{\bar{X}_n - E\left(\bar{X}_n\right)}{\sqrt{V\left(\bar{X}_n\right)}} \leq z\right) = \Phi(z)$$

Slides da Professora Conceição Amado

Valor Médio e Variância de Somas e Médias de V.A.´s Independentes

Observar que:

- $$E\left(S_n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = nE(X_1) = n\mu$$

  e como $X_1, X_2 \cdots X_n$ são v.a. independentes tem-se

  $$V\left(S_n\right) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = nV(X_1) = n\sigma^2$$

- $$E\left(\bar{X}_n\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i/n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = E(X_1) = \mu$$

  e como $X_1, X_2 \cdots X_n$ são v.a. independentes tem-se

  $$V\left(\bar{X}_n\right) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i/n\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n}V(X_1) = \frac{\sigma^2}{n}$$

Formulário

AMOSTRAGEM. DISTRIBUIÇÕES POR AMOSTRAGEM

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$; $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - \bar{X}^2$; $(n-1)S'^2 = n\,S^2$

$E(\bar{X}) = \mu$; $\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$; $E(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$; $E(S'^2) = \sigma^2$

TLC: Aproximações

Observações:

- O TLC deve ser usado apenas quando as v.a.'s $X_1, \ldots, X_n$ não têm distribuição normal!
- A demonstração do teorema exige algumas ferramentas matemáticas avançadas.
- As v.a. $X_1, \ldots, X_n$ podem ser discretas ou contínuas.
- Geralmente considera-se n grande se $n \geq 30$
- As distribuições binomial e de Poisson podem ser aproximadas pela distribuição normal (na secção anterior vimos que podem ser escritas como somas de variáveis aleatórias). Assim:
  - $X \sim Bin(n, p)$ pode ser aproximada por $\tilde{X} \sim N(np, np(1-p))$, a aproximação tem menor erro quando $np > 5$ e $n(1-p) > 5$
  - $X \sim Poisson(\lambda)$ pode ser aproximada por $\tilde{X} \sim N(\lambda, \lambda)$, a aproximação tem menor erro quando $\lambda > 5$

Slides da Professora Conceição Amado

Teorema de De Moivre-Laplace: Binomial - Normal

T. Limite Central: Aplicação a aproximações para distribuições discretas

Corolário 5.3 (T. de De Moivre-Laplace) – Dada a sucessão de variáveis aleatórias iid, $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, com distribuição de Bernoulli de média $E(X_i) = \theta$ e, portanto, $\mathrm{Var}(X_i) = \theta(1-\theta)$, tem-se,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \overset{a}{\sim} N(0,1).$$

Nota: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n;\theta)$. Quando n é grande, utilizar o corolário. Mas...

com Correção de Continuidade.

Murteira et al (2015)

Aproximações Baseadas no TLC: Binomial - Normal

- Probabilidades associadas a uma distribuição Binomial, B(n,p), podem ser aproximadas utilizando uma distribuição Normal, N(μ,σ), com μ=np e $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

  Para que a aproximação não seja muito má, devemos ter np $\geq$ 5 e n (1-p) $\geq$ 5.

Aproximação da Normal para a Distribuição Binomial

- Quanto mais perto p estiver de 0,5, melhor será a aproximação da normal para a distribuição binomial
- Quanto maior o tamanho da amostra, n, melhor será a aproximação da normal para a distribuição binomial
- Regra Geral:
  - A distribuição normal pode ser utilizada para aproximar a distribuição binomial se

$$np \geq 5 \text{ e } n(1-p) \geq 5$$

SlidesBioestatística6 (ua.pt)

Aproximações Baseadas no TLC: Poisson - Normal

- Probabilidades associadas a uma distribuição de Poisson, $P(\lambda)$, podem ser aproximadas utilizando uma distribuição Normal, $N(\mu,\sigma)$, com $\mu = \lambda$ e $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

  A aproximação será tanto melhor quanto maior for λ.

SlidesBioestatística6 (ua.pt)

TLC: Correção de Continuidade

A variante do T. L. C. para distribuições discretas introduz a correção de continuidade que permite aproximar uma distribuição discreta por uma distribuição contínua, neste caso a distribuição Normal.

Correção de continuidade: Seja X uma v. a. discreta, com variação Δ (i.e., X pode tomar os valores $0, \Delta, 2\Delta, 3\Delta, \ldots$), com $E(X) = \mu_X$ e $Var(X) = \sigma_X^2$. Então a correção de continuidade é efetuada da seguinte forma:

$$P(X = k) \approx P\left(k - \frac{\Delta}{2} \leq X \leq k + \frac{\Delta}{2}\right).$$

ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

TLC: Correção de Continuidade

Note-se que nas distribuições usuais, por exemplo, Binomial e Poisson, $\Delta = 1$, pois tratam-se de distribuições de contagem logo

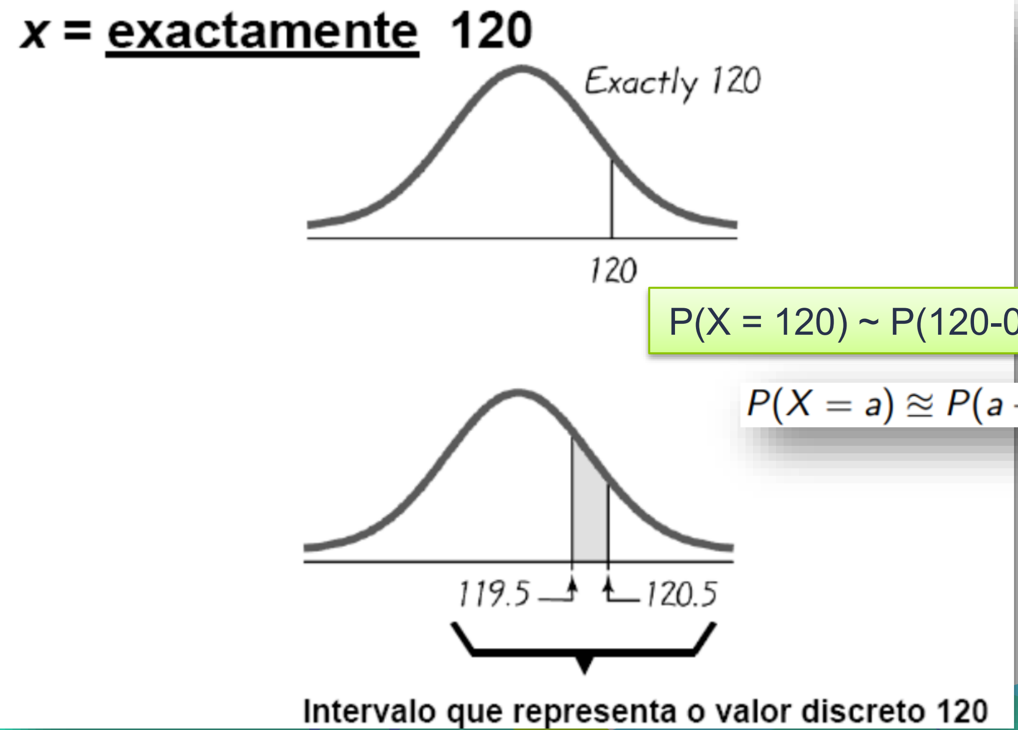
$$P(X = k) \approx P(k - 0{,}5 \leq X < k + 0{,}5).$$

Com a aplicação das propriedades da distribuição Normal, podem generalizar-se as seguintes regras:

- $P(X \leq k) \approx P\left(Z \leq \frac{k + 0{,}5 - \mu_X}{\sigma_X}\right) = \Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - \mu_X}{\sigma_X}\right);$
- $P(X < k) \approx P\left(Z < \frac{k - 0{,}5 - \mu_X}{\sigma_X}\right) = \Phi\left(\frac{k - 0{,}5 - \mu_X}{\sigma_X}\right);$
- $P(X \geq k) \approx P\left(Z \geq \frac{k - 0{,}5 - \mu_X}{\sigma_X}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{k - 0{,}5 - \mu_X}{\sigma_X}\right);$
- $P(X > k) \approx P\left(Z > \frac{k + 0{,}5 - \mu_X}{\sigma_X}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - \mu_X}{\sigma_X}\right).$

ProbabilidadesEstatistica2019.pdf

Aproximações Baseadas no TLC: Correção de Continuidade



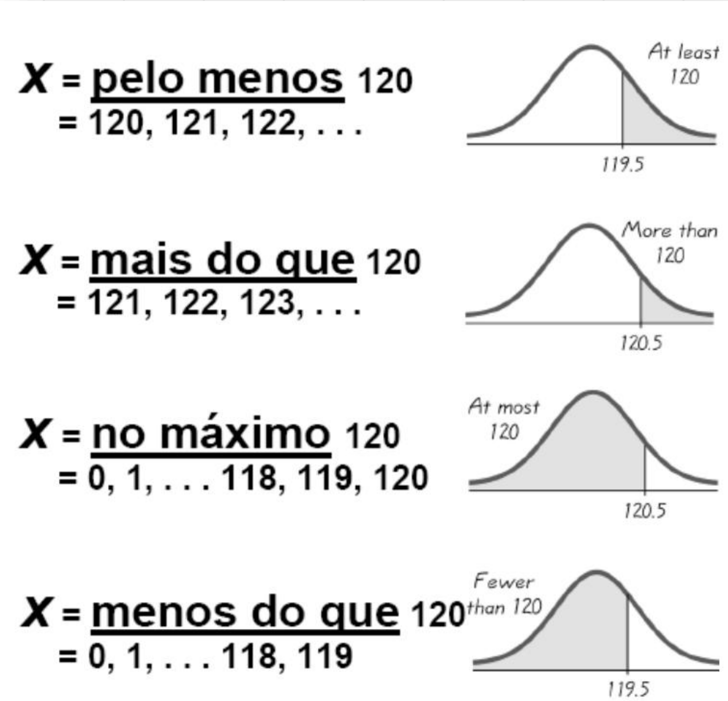
Note-se que $\tilde{X}$ é uma v.a. Normal que "aproxima" X (sendo esta uma v.a. discreta).

P(X = 120) ~ P(120-0,5 < $\tilde{X}$ < 120+0,5)

$$P(X = a) \approxeq P(a - \delta < \tilde{X} < a + \delta)$$

SlidesBioestatística6 (ua.pt)

Aproximações Baseadas no TLC: Correção de Continuidade



$P(X \geq 120) \sim P(\tilde{X} \geq 120\text{-}0{,}5)$

$P(X > 120) \sim P(\tilde{X} > 120\text{+}0{,}5)$

$P(X \leq 120) \sim P(\tilde{X} \leq 120\text{+}0{,}5)$

$P(X < 120) \sim P(\tilde{X} < 120\text{-}0{,}5)$

Note-se que $\tilde{X}$ é uma v.a. Normal que "aproxima" X (sendo esta uma v.a. discreta).

SlidesBioestatística6 (ua.pt)

TLC: Resumo da Correção de Continuidade

Observação - aplicação do TLC para distribuições discretas

- Importante: A utilização do teorema do limite central para **distribuições discretas** apresenta um problema, uma vez que se vai aproximar um fenómeno discreto por uma distribuição contínua. Embora não exista uma solução ótima para todas as situações, na prática é comum adotar a chamada correção de continuidade. Considere-se $0 < \delta < 1$ e $\tilde{X}$ a v.a. normal que "aproxima" X, tem-se:
  - $P(X = a) \approxeq P(a - \delta < \tilde{X} < a + \delta)$
  - $P(a < X < b) \approxeq P(a + \delta \leq \tilde{X} \leq b - \delta)$
  - $P(X \leq a) \approxeq P(\tilde{X} \leq a + \delta)$
  - $P(X < a) \approxeq P(\tilde{X} < a - \delta) = P(\tilde{X} \leq a - \delta)$ (recordar que $\tilde{X}$ é contínua...)
- No caso da aplicação do TLC à binomial e à Poisson o valor típico é $\delta = 0.5$, ou seja metade da variação entre dois valores consecutivos.

Slides da Professora Conceição Amado

TLC

Formulário

TEOREMA DO LIMITE CENTRAL E COROLÁRIOS

TLC: Sendo X_i iid com $E(X_i)=\mu$ e $\text{Var}(X_i)=\sigma^2 \Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

Corolário: Sendo $X_i \sim B(1;\theta)$, iid $\Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

Correcção de continuidade: $P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\dfrac{b+\frac{1}{2}-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-\frac{1}{2}-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right)$, com a e b inteiros

Corolário: Sendo $X \sim \text{Po}(\lambda)$, quando $\lambda \to +\infty \Rightarrow \dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

Correcção de continuidade: $P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\dfrac{b+\frac{1}{2}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-\frac{1}{2}-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$, com a e b inteiros

Exemplo 1: TLC

Exemplo 1- aplicação TLC

Uma empresa de chocolates embala caixas com 100 pacotes de bombons. Os pesos por pacote são v.a.'s X_i, onde $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$, com valor médio 0.5kg e variância 0.1kg^2. São colocadas 10 caixas numa palete. Qual é a probabilidade aproximada do peso dos bombons da palete ser superior a 510kg?

Slides da Professora Conceição Amado

Exemplo 1: TLC

Resolução:

$X_i -$ 'v.a. peso do $i-$ésimo pacote (kg)'

$E(X_i) = 0.5,\ V(X_i) = 0.1\ , \forall i$ e $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$ para $i \neq j$

$S = \sum_{i=1}^{1000} X_i$ 'v.a. peso dos bombons colocados na palete (kg)'

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i\right) = \sum_{i=1}^{1000} E(X_i) = 1000E(X_1) = 1000 \times 0.5 = 500$$

(porque são identicamente distribuídas (i.d.) a X_1)

$$V(S) = V\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i\right) = \sum_{i=1}^{1000} V(X_i) = 1000V(X_1) = 1000 \times 0.1 = 100$$

porque são independentes e identicamente distribuídas (i.d.) a X_1.

Slides da Professora Conceição Amado

Exemplo 1: TLC

Resolução (cont.):

Pelo T.L.C. tem-se que:

$$\frac{S - E(S)}{\sqrt{V(S)}} = \frac{S - 500}{\sqrt{100}} \overset{a}{\sim} N(0,1),$$

$$P(S > 510) = 1 - P(S \leq 510) = 1 - P\left(\frac{S - 500}{\sqrt{100}} \leq \frac{510 - 500}{\sqrt{100}}\right) \underset{T.L.C.}{\approx}$$

$$\underset{T.L.C.}{\approx} 1 - \Phi(1) \approx 0.1587.$$

Slides da Professora Conceição Amado

Exemplo 2: TLC

Exemplo 2 - aplicação TLC e correção de continuidade

O número de chamadas de telemóvel registadas a partir de certa "zona" numa hora tem, em condições estacionárias, distribuição de Poisson de parâmetro 1500. Calcule a probabilidade (aproximada) de ocorrerem mais de 1600 chamadas na próxima hora.

Slides da Professora Conceição Amado

Exemplo 2: TLC

Resolução:
$X \sim Poisson(1500)$, como o valor de λ é elevado não consta nas tabelas disponibilizadas, e sem a ajuda de um computador não é possível calcular a probabilidade pedida. Mas, podemos usar a distribuição normal para obter uma aproximação.
Como $X \sim Poisson(1500)$ pode ser aproximada por $\tilde{X} \sim N(1500, 1500)$

$$P(X > 1600) = 1 - P(X \leq 1600) \simeq 1 - P(\tilde{X} \leq 1600 + 0.5) =$$
$$= 1 - P(\tilde{X} \leq 1600.5) = 1 - P\left(\frac{\tilde{X} - 1500}{\sqrt{1500}} \leq \frac{1600.5 - 1500}{\sqrt{1500}}\right) =$$
$$= 1 - \Phi(2.59) \simeq 0.0048$$

Nota:
Lambda = 1500 > 5
Logo pode-se aproximar a distribuição Poisson à distribuição Normal

Slides da Professora Conceição Amado

Teorema do Limite Central

Formulário

TEOREMA DO LIMITE CENTRAL E COROLÁRIOS

TLC: Sendo X_i iid com $E(X_i) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$ $\Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

Corolário: Sendo $X_i \sim B(1;\theta)$, iid $\Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

Correcção de continuidade: $P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\dfrac{b + \frac{1}{2} - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right) - \Phi\left(\dfrac{a - \frac{1}{2} - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right)$, com a e b inteiros

Corolário: Sendo $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, quando $\lambda \to +\infty \Rightarrow \dfrac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

Correcção de continuidade: $P(a \le X \le b) \approx \Phi\left(\dfrac{b + \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\dfrac{a - \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$, com a e b inteiros

Teorema do Limite Central: Exercícios do Murteira et al (2015)

6

Variáveis Aleatórias Contínuas

68. Suponha que os elos de uma corrente de bicicleta têm comprimentos aleatórios de média 0.5 cm e de desvio padrão 0.04 cm. As normas de um fabricante de bicicletas exigem que o comprimento de uma corrente esteja compreendido entre 49 cm e 50 cm.

a) Se uma corrente tiver 100 elos, determine a proporção de correntes que satisfazem as normas exigidas.

b) Utilizando apenas 99 elos, qual deve ser o desvio padrão da população de forma que 90% das correntes cumpram as normas do fabricante?

Exercício 68 (a)

X - v.a. comprimento elos, em centímetros $\longrightarrow$ Variável aleatória contínua com distribuição desconhecida!

$\mu_x = 0,5 \quad , \quad \sigma_x = 0.04$

Norma: 49 cm $\leq$ comprimento da corrente $\leq$ 50 cm
(soma comprimento dos elos que a compõem)

(a)

Quer-se: $P\left(49 \leq \sum_{i=1}^{100} X_i \leq 50\right)$

Pelo TLC: $Z = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu_x}{\sqrt{n}\ \sigma_x} \overset{a}{\sim} N(0,1)$, onde $n = 100 \geq 30$

$$P\left(49 \leq \sum_{i=1}^{100} X_i \leq 50\right) \approx P\left(\frac{49 - 100 \times 0.5}{\sqrt{100} \times 0.04} \leq \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - n\mu_x}{\sqrt{n}\ \sigma_x}}_{Z \overset{a}{\sim} N(0,1)} \leq \frac{500 - 100 \times 0.5}{\sqrt{100} \times 0.04}\right) =$$

$= P(-2.5 < Z < 0) \approx 0.4938$

Exercício 68 (b)

Com $n = 99$, qual o valor de σ_x de forma a que $P\left(49 \leq \sum_{i=1}^{99} X_i \leq 50\right) = 0.90$.

Recorrendo ao TLC (com $n=99$), tem-se:

$$P\left(49 \leq \sum_{i=1}^{99} X_i \leq 50\right) = 0.90 \Rightarrow P\left(\frac{49 - 99 \times 0.5}{\sqrt{99}\,.\,\sigma_x} \leq \frac{\sum_{i=1}^{99} X_i - n\mu_x}{\sqrt{n}\;\sigma_x} \leq \frac{50 - 99 \times 0.5}{\sqrt{99}\;\sigma_x}\right) = 0.90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(-\frac{0.5}{\sqrt{99}\;\sigma_x} \leq Z \leq \frac{0.5}{\sqrt{99}\;\sigma_x}\right) = 0.90 \Rightarrow \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{99}\,\sigma_x}\right) - \Phi\left(-\frac{0.5}{\sqrt{99}\,\sigma_x}\right) = 0.90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{99}\,\sigma_x}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{99}\,\sigma_x}\right)\right] = 0.90 \Rightarrow 2\,\Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{99}\;\sigma_x}\right) - 1 = 0.90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{99}\,\sigma_x}\right) = 0.95 \Rightarrow \frac{0.5}{\sqrt{99}\;\sigma_x} = 1.645 \Rightarrow \sigma_x = \frac{0.5}{1.645\sqrt{99}} \simeq 0.03055$$

69. Na caixa de uma mercearia as contas que os clientes têm a pagar são sempre arredondadas para o múltiplo de 5 cêntimos mais próximo. Assim, para cada conta, a diferença entre o recebido e o registado pode considerar-se uma variável aleatória com função probabilidade

$$f_X(x) = \frac{1}{5} \quad (x = -2, -1, 0, 1, 2)\,.$$

Num dia em que são atendidos 100 clientes, qual a probabilidade de que a diferença entre o total recebido e o registado exceda os 40 cêntimos?

Exercício 69

X - v.a. diferença entre o recebido e o registado, para cada conta, em cêntimos

$f(x) = \frac{1}{5} \quad (x = -2, -1, 0, 1, 2) \rightarrow$ v.a. discreta

Total da diferença entre o recebido e o registado, para 100 clientes: $\sum_{i=1}^{100} X_i$

Quer-se $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 40\right)$

Pelo TLC: $Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu_X}{\sqrt{n}\,\sigma_X} \overset{a}{\sim} N(0,1)$, onde $n = 100$

- $\mu_X = E(X) = \sum_{x \in D_X} x\, f(x) = -2 \times \frac{1}{5} + (-1) \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 0$

Exercício 69

- $\sigma_x = \sqrt{Var(x)}$, onde $Var(x) = E[(x-\mu_x)^2] = E(x^2)$, pois $\mu_x = 0$.

$Var(x) = E(x^2) = \sum_{x \in D_x} x^2 f(x) = (-2)^2 \times \frac{1}{5} + (-1)^2 \times \frac{1}{5} + 0^2 \times \frac{1}{5} + 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} = 2$

$\sigma_x = \sqrt{2}$.

Logo,

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 40\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 40\right) \approx 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - n\mu_x}{\sqrt{n}\,\sigma_x} \leq \frac{40 - 100 \times 0 + \overset{\text{c.c.}}{\uparrow}\,1/2}{\sqrt{100}\,\sqrt{2}}\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{40.5}{10\sqrt{2}}\right) = 1 - \Phi\left(\underbrace{\frac{40.5}{10\sqrt{2}}}_{2.86}\right) \approx 1 - 0.9979 = 0.0021$$

73. Uma fábrica em início de actividade sabe que minimiza os seus custos unitários se conseguir uma produção diária de, pelo menos, 300 unidades. Admita ser de 0.3 a probabilidade de não atingir este nível de produção.

a) Em 100 dias de laboração, qual a probabilidade de não atingir tal nível em mais que 20 e no máximo de 40 dias?

b) Sendo $n = 20$, e Y, a variável aleatória que representa o número de dias em que a produção é inferior a 300 unidades, compare as probabilidades exacta e aproximada do acontecimento dado pela condição $12 \leq Y \leq 16$.

Exercício 73 (a)

Objectivo é conseguido se produção diária é ≥ 300 unidades

Probabilidade de não atingir objectivo é de 0.3.

(a)

Para cada dia i:

$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se objectivo não cumprido} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \Rightarrow X_i \sim B(1, 0.3) \quad (i = 1, 2, \dots, 100)$

Quer-se $P\left(20 < \sum_{i=1}^{100} X_i \leq 40\right)$

$\sum_{i=1}^{100} X_i \rightarrow$ nº dias em que objectivo não é cumprido, num conjunto de 100

Resultado exacto

Se $X_i \sim B(1, 0.3) \Rightarrow \sum_{i=1}^{100} X_i \sim B(100, 0.3)$

Logo, $P\left(20 < \sum_{i=1}^{100} X_i \leq 40\right) = F(40) - F(20) \approx 0.9875 - 0.0165 = 0.971$

Exercício 73 (a)

Resultado aproximado

Pelo TLC : $Z = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$, onde $n = 100$

$$P\left(20 < \sum_{i=1}^{100} X_i \leq 40\right) = P\left(21 \leq \sum_{i=1}^{100} X_i \leq 40\right) \approx P\left(\frac{21 - 100\times 0.3 - \overset{\text{c.c}}{\frac{1}{2}}}{\sqrt{100\times 0.3\times 0.7}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \leq \frac{40-100\times 0.3+\overset{\text{c.}}{}}{\sqrt{100\times 0.3\times 0.7}}\right)$$

$$= P\left(-\frac{9.5}{\sqrt{21}} \leq Z \leq \frac{10.5}{\sqrt{21}}\right) \approx \cancel{2.07}\ \Phi(2.29) - \Phi(-2.07) = \Phi(2.29) - [1-\Phi(2.07)] =$$

$$= \Phi(2.29) + \Phi(2.07) - 1 = 0.9890 + 0.9808 - 1$$

$$= \boxed{0.9698}$$

Exercício 73 (b)

Y - v.a. nº dias com objectivo não cumprido, num conjunto de 20 $\Rightarrow Y \sim B(20, 0.3)$

Quer-se $P(12 \leq Y \leq 16)$

Exercício 73 (b)

Resultado exacto

$$P(12 \le Y \le 16) = F_Y(16) - F_Y(12^{-0}) = F_Y(16) - F_Y(11) \approx 1 - 0.99486 = 0.00514$$

Resultado aproximado (embora n = 20...)

$$\text{TLC}: \quad Z = \frac{Y - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

$$P(12 \le Y \le 16) \approx P\left(\frac{12 - 20 \times 0.3 - \overset{\text{c.c}}{\frac{1}{2}}}{\sqrt{20 \times 0.3 \times 0.7}} \le \frac{Y - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \le \frac{16 - 20 \times 0.3 + \overset{\text{c.c.}}{\frac{1}{2}}}{\sqrt{20 \times 0.3 \times 0.7}} \right) =$$

$$P\left(\frac{5.5}{\sqrt{4.2}} \le Z \le \frac{10.5}{\sqrt{4.2}} \right) \approx 0.00364$$

81. Os passageiros do “Expresso” que parte ao meio-dia para Coimbra começam a entrar no veículo a partir das 11:40. O número de passageiros que entram para o veículo nos primeiros 15 minutos segue um processo de Poisson com ritmo médio de 2 passageiros por minuto. Nos últimos 5 minutos, ou seja entre as 11:55 e 12:00, o número passageiros que pretende entrar também segue um processo de Poisson mas com ritmo médio de 5 passageiros por minuto. Se o veículo que vai efectuar essa viagem tiver uma lotação máxima de 60 lugares, calcule a probabilidade de ser suficiente para satisfazer a procura.

Exercício 81

X_1 - v.a. nº entradas por minuto (11:40 - 11:55) $\Rightarrow X_1 \sim Po(2)$

X_2 - v.a. nº entradas "pretendidas" por minuto (11:55 - 12:00) $\Rightarrow X_2 \sim Po(5)$

Sejam,

Y_1 - v.a. nº entradas em 15 minutos (11:40 - 11:55) $\Rightarrow Y_1 \sim Po(2 \times 15) = Po(30)$

Y_2 - v.a. nº entradas pretendidas em 5 minutos (11:55 - 12:00) $\Rightarrow Y_2 \sim Po(5 \times 5) = Po(25)$

Quer-se $P(\underbrace{Y_1 + Y_2}_{\text{procura total } (W)} \leq 60)$.

$\underbrace{Y_1 + Y_2}_{W} \sim Po(30+25) \Leftrightarrow W \sim Po(55)$

Exercício 81

Resultado exacto

$$P(W \leq 60) \approx 0.774 \longrightarrow \text{poissoncdf}(55, 60)$$

Resultado aproximado

$$\text{TLC}: \quad Z = \frac{W - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

$$P(W \leq 60) \approx P\left(\frac{W-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq \frac{60 - 55 + \frac{1}{2}}{\sqrt{55}}\right) = P\left(Z \leq \frac{5.5}{\sqrt{55}}\right) \approx \cancel{0.771}$$

$$\approx \Phi(0.74) \approx 0.7704$$

85. A produção diária, em toneladas, de um determinado produto é bem modelada por uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo (1, 3).

a) Determine a probabilidade de num dia a produção se situar entre 2 e 2.5 toneladas.

b) Determine a probabilidade de ao fim de 60 dias de laboração se conseguir satisfazer uma encomenda de 125 toneladas do produto.

Exercício 85 (a)

X - v.a. produção diária, em toneladas $\rightarrow$ $X \sim U(1,3)$ $\Rightarrow$ $f(x) = \frac{1}{2}$ $(1 < x < 3)$

(a)

$$P(2 < X < 2.5) = \int_{2}^{2.5} \frac{1}{2}\, dx = \left[\frac{x}{2}\right]_{2}^{2.5} = \frac{2.5}{2} - \frac{2}{2} = \boxed{0.25}$$

Exercício 85 (b)

60 dias $\longrightarrow X_1, X_2, \dots, X_{60}$, onde $X_i \sim U(1,3)$ $(i=1,\dots,60)$

~~Produção total~~ Para satisfazer a encomenda, a produção total nestes 60 dias tem de ser pelo menos de 125 toneladas.

Produção total : $\sum_{i=1}^{60} X_i$. Logo quer-se:

$$P\left(\sum_{i=1}^{60} X_i \geq 125\right) \longrightarrow \text{TLC} : \quad Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

- $n = 60$
- $\mu = E(x) = \cancel{\int_1^3 x f(x)\,dx = \int_1^3 x \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^3}\ \frac{1+3}{2} = 2$
- $\sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{\frac{(3-1)^2}{12}} = \sqrt{\frac{4}{12}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

Assim,

$$P\left(\sum_{i=1}^{60} X_i \geq 125\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{60} X_i < 125\right) \approx 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{60} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} < \frac{125 - 60 \times 2}{\sqrt{60}\,\sqrt{1/3}}\right) \approx$$

$$= 1 - P(Z < 1.12) = 1 - 0.8686 = \boxed{0.1314}$$

Obrigada!

Questões?