Estatística I

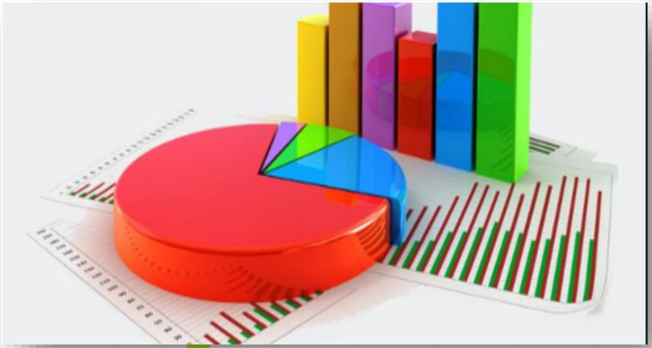
Licenciatura em Gestão do Desporto (LGD)

2.º Ano/1.º Semestre

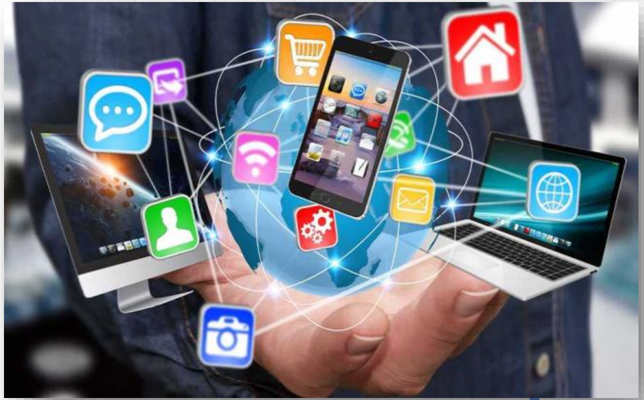
2025/2026

Aula de Dúvidas (Semana 13)

Docente: Elisabete Fernandes
E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao



https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/

Conteúdos Programáticos

Aulas TP (Semanas 1 e 3)	Aulas TP (Semanas 3 a 6)	Aulas TP (Semanas 7 a 9)	Aulas TP (Semanas 10 a 12)
• **Capítulo 1**: Análise Descritiva • **Capítulo 2**: Probabilidades	• **Capítulo 3**: Variáveis Aleatórias Unidimensionais	• **Capítulo 4**: Variáveis Aleatórias Multidimensionais	• **Capítulo 5**: Variáveis Aleatórias Especiais

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

1

Resolução de um Exame

1. Num determinado jogo do campeonato do mundo de Futebol estiveram presentes 50000 espectadores, dos quais 25000 eram dinamarqueses e 20000 eram brasileiros. Dos dinamarqueses 12000 eram homens, enquanto dos brasileiros 8000 eram mulheres. Sabe-se ainda que estavam presentes um total de 23000 mulheres. Com base nestes dados diga qual a probabilidade de:

1.1. Selecionando aleatoriamente um espectador, que o mesmo não seja de nacionalidade brasileira nem dinamarquesa? [0.5]

1.2. Selecionando aleatoriamente um espectador, que o mesmo seja um homem? [0.5]

1.3. Tendo-se selecionando aleatoriamente um espectador e verificado que era uma mulher, seja brasileira? [0.5]

1.4. Tendo-se selecionando aleatoriamente um espectador e verificado que não era uma mulher, seja dinamarquês? [0.5]

Exercício 1.1

Total de espectadores = 50 000

Dinamarqueses = 25 000 (dos quais 12 000 são homens ⇒ 13 000 mulheres)

Brasileiros = 20 000 (dos quais 8 000 são mulheres ⇒ 12 000 homens)

Total de mulheres = 23 000 (logo mulheres de outras nacionalidades = 23 000 − 13 000 − 8 000 = 2 000)

Logo, espectadores de outras nacionalidades = 50 000 − 25 000 − 20 000 = 5 000 (dessas, 2 000 são mulheres e 3 000 são homens).

Total de homens = 50 000 − 23 000 = 27 000.

1.1) Probabilidade de o espectador **não** ser brasileiro nem dinamarquês = espectadores de outras nacionalidades / total =

$$\frac{5\,000}{50\,000} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

Exercício 1.2

Total de espectadores = 50 000

Dinamarqueses = 25 000 (dos quais 12 000 são homens $\Rightarrow$ 13 000 mulheres)

Brasileiros = 20 000 (dos quais 8 000 são mulheres $\Rightarrow$ 12 000 homens)

Total de mulheres = 23 000 (logo mulheres de outras nacionalidades = 23 000 − 13 000 − 8 000 = 2 000)

Logo, espectadores de outras nacionalidades = 50 000 − 25 000 − 20 000 = 5 000 (dessas, 2 000 são mulheres e 3 000 são homens).

Total de homens = 50 000 − 23 000 = 27 000.

1.2) Probabilidade de o espectador ser **homem** = homens / total =

$$\frac{27\,000}{50\,000} = \frac{27}{50} = 0{,}54.$$

Exercício 1.3

Total de espectadores = 50 000

Dinamarqueses = 25 000 (dos quais 12 000 são homens ⇒ 13 000 mulheres)

Brasileiros = 20 000 (dos quais 8 000 são mulheres ⇒ 12 000 homens)

Total de mulheres = 23 000 (logo mulheres de outras nacionalidades = 23 000 − 13 000 − 8 000 = 2 000)

Logo, espectadores de outras nacionalidades = 50 000 − 25 000 − 20 000 = 5 000 (dessas, 2 000 são mulheres e 3 000 são homens).

Total de homens = 50 000 − 23 000 = 27 000.

1.3) Probabilidade condicional: sendo **mulher**, que seja **brasileira** = (mulheres brasileiras) / (total de mulheres) =

$$\frac{8\,000}{23\,000} = \frac{8}{23} \approx 0{,}3478\ (\approx 34{,}78\%).$$

Exercício 1.4

Total de espectadores = 50 000

Dinamarqueses = 25 000 (dos quais 12 000 são homens ⇒ 13 000 mulheres)

Brasileiros = 20 000 (dos quais 8 000 são mulheres ⇒ 12 000 homens)

Total de mulheres = 23 000 (logo mulheres de outras nacionalidades = 23 000 − 13 000 − 8 000 = 2 000)

Logo, espectadores de outras nacionalidades = 50 000 − 25 000 − 20 000 = 5 000 (dessas, 2 000 são mulheres e 3 000 são homens).

Total de homens = 50 000 − 23 000 = 27 000.

1.4) Probabilidade condicional: sendo **não mulher** (ou seja, homem), que seja **dinamarquês** = (homens dinamarqueses) / (total de homens) =

$$\frac{12\,000}{27\,000} = \frac{4}{9} \approx 0{,}4444 \ (\approx 44{,}44\%).$$

2. O número de esquentadores vendidos diariamente num estabelecimento é bem descrito por uma variável aleatória (v.a.) X com a seguinte função de probabilidade:

x	0	1	2	3	4
f(x)	a	b	c	b	a

Se em vinte por cento dos dias as vendas são inferiores a uma unidade e, em trinta por cento dos dias as vendas são superiores a duas unidades:

2.1. Determine as constantes a, b e c. [1.0]

2.2. Indique a função de distribuição de X. [1.0]

2.3. Se cada esquentador é vendido a 15 mil escudos, determine a função de probabilidade da receita bruta obtida com a venda de esquentadores num dia. [1.0]

2.4. Se num dia a receita bruta for inferior a 40 mil escudos, determine a probabilidade de ser superior a 20 mil escudos. [1.0]

Nota: Caso não tenha realizado a alínea 2.1. suponha que a função de probabilidade de X, para executar às alíneas 2.2, 2.3 e 2.4, é igual a:

x	0	1	2	3	4
f(x)	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

Exercício 2.1

Dados: $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ com $f(0) = a,\ f(1) = b,\ f(2) = c,\ f(3) = b,\ f(4) = a.$

Sabe-se: $P(X < 1) = P(X = 0) = 0{,}20$ e $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = b + a = 0{,}30.$

2.1 Determinar a, b, c

- $a = P(X = 0) = 0{,}20.$
- $b + a = 0{,}30 \Rightarrow b = 0{,}30 - 0{,}20 = 0{,}10.$
- Soma das probabilidades: $2a + 2b + c = 1 \Rightarrow c = 1 - 2a - 2b = 1 - 0{,}40 - 0{,}20 = 0{,}40.$

Logo: $a = 0{,}20,\ b = 0{,}10,\ c = 0{,}40.$

Exercício 2.2

Dados: $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ com $f(0) = a,\ f(1) = b,\ f(2) = c,\ f(3) = b,\ f(4) = a.$

Sabe-se: $P(X < 1) = P(X = 0) = 0{,}20$ e $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = b + a = 0{,}30.$

2.2 Função de distribuição $F(x) = P(X \leq x)$ (por intervalos)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0{,}20, & 0 \leq x < 1, \\ 0{,}20 + 0{,}10 = 0{,}30, & 1 \leq x < 2, \\ 0{,}30 + 0{,}40 = 0{,}70, & 2 \leq x < 3, \\ 0{,}70 + 0{,}10 = 0{,}80, & 3 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

Exercício 2.3

Dados: $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ com $f(0) = a,\ f(1) = b,\ f(2) = c,\ f(3) = b,\ f(4) = a.$

Sabe-se: $P(X < 1) = P(X = 0) = 0{,}20$ e $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = b + a = 0{,}30.$

2.3 Receita bruta $Y = 15000 \cdot X$. Função de probabilidade de Y

Valores possíveis de Y e respectivas probabilidades:

- $Y = 0$ (quando $X = 0$): $P(Y = 0) = a = 0{,}20.$
- $Y = 15\,000$ (quando $X = 1$): $P(Y = 15\,000) = b = 0{,}10.$
- $Y = 30\,000$ (quando $X = 2$): $P(Y = 30\,000) = c = 0{,}40.$
- $Y = 45\,000$ (quando $X = 3$): $P(Y = 45\,000) = b = 0{,}10.$
- $Y = 60\,000$ (quando $X = 4$): $P(Y = 60\,000) = a = 0{,}20.$

Exercício 2.4

Dados: $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ com $f(0) = a,\ f(1) = b,\ f(2) = c,\ f(3) = b,\ f(4) = a$.

Sabe-se: $P(X < 1) = P(X = 0) = 0{,}20$ e $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = b + a = 0{,}30$.

2.4 Se a receita for inferior a 40.000 escudos, qual a probabilidade de ser superior a 20.000 escudos?

Evento $\{Y < 40\,000\}$ corresponde a $X \in \{0, 1, 2\}$.

Evento $\{Y > 20\,000\}$ corresponde a $X \geq 2$ (porque $2 \cdot 15000 = 30000 > 20000$).

Queremos $P(Y > 20\,000 \mid Y < 40\,000) = P(X = 2 \mid X \in \{0, 1, 2\})$.

$$P = \frac{P(X = 2)}{P(X \in \{0, 1, 2\})} = \frac{c}{a + b + c} = \frac{0{,}40}{0{,}20 + 0{,}10 + 0{,}40} = \frac{0{,}40}{0{,}70} = \frac{4}{7} \approx 0{,}5714.$$

Resposta: $4/7 \approx 57{,}14\%$.

3. Admita-se que as empresas do sector têxtil e do sector da construção civil de determinada economia têm um número de trabalhadores qualificados bem descrito respetivamente por uma distribuição Poisson(8) e Binomial (12, 0.3).

3.1. Qual a probabilidade de que uma empresa aleatoriamente selecionada de entre as do sector têxtil tenha um trabalhador qualificado? [1.0]

3.2. Qual a probabilidade de que uma empresa aleatoriamente selecionada de entre as do sector da construção civil tenha dois trabalhadores qualificados? [1.0]

3.3. Comente a afirmação: "O número esperado de trabalhadores qualificados no sector da construção civil é superior ao do sector têxtil." [1.0]

Exercício 3.1

Dados:

- Sector têxtil: $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 8)$.
- Sector da construção: $Y \sim \text{Binomial}(n = 12, p = 0{,}3)$.

3.1 — Probabilidade de uma empresa do sector têxtil ter um trabalhador qualificado (interpreto como exactamente 1)

$$P(X = 1) = e^{-8}\frac{8^1}{1!} = 8e^{-8} \approx 0{,}0026837\ (\approx 0{,}2684\%).$$

(Se a intenção fosse "ter pelo menos um", então seria $1 - P(X = 0) = 1 - e^{-8} \approx 0{,}9996645$.)

Exercício 3.2

Dados:

- Sector têxtil: $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 8)$.
- Sector da construção: $Y \sim \text{Binomial}(n = 12, p = 0{,}3)$.

3.2 — Probabilidade de uma empresa do sector da construção ter dois trabalhadores qualificados (exactamente 2)

$$P(Y = 2) = \binom{12}{2}(0{,}3)^2(0{,}7)^{10} \approx 0{,}1677903 \ (\approx 16{,}779\%).$$

Exercício 3.3

Dados:

- Sector têxtil: $X \sim \text{Poisson}(\lambda = 8)$.
- Sector da construção: $Y \sim \text{Binomial}(n = 12, p = 0{,}3)$.

3.3 — Comentário sobre a afirmação: "O número esperado de trabalhadores qualificados no sector da construção civil é superior ao do sector têxtil."

O valor esperado (média) do Poisson(8) é $\mathbb{E}[X] = 8$.
O valor esperado do Binomial$(12, 0{,}3)$ é $\mathbb{E}[Y] = np = 12 \cdot 0{,}3 = 3{,}6$.

Portanto $\mathbb{E}[Y] = 3{,}6$ é **inferior** a $\mathbb{E}[X] = 8$. A afirmação é **falsa** — o sector têxtil tem, em média, mais trabalhadores qualificados (8) do que o sector da construção (3,6).
(Nota: as variâncias são também diferentes: $\text{Var}(X) = 8$, $\text{Var}(Y) = 12 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 2{,}52$, o que mostra maior dispersão no modelo Poisson.)

4. Seja X uma variável aleatória (v.a.) com a função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & 1 < x < k \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

4.1. Calcule k por forma que f(x) seja realmente a função densidade de probabilidade da v.a. X. [1.0]

4.2. Determine a função distribuição de X. [1.0]

4.3. Determine a mediana de X. [1.0]

Exercício 4.1

4.1 — Determinar k

Exigimos $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, ou seja

$$\int_1^k (3x-1)\,dx = 1.$$

Calculando a integral:

$$\left[\tfrac{3}{2}x^2 - x\right]_1^k = \left(\tfrac{3}{2}k^2 - k\right) - \left(\tfrac{3}{2}\cdot 1^2 - 1\right) = \tfrac{3}{2}k^2 - k - \tfrac{1}{2} = 1.$$

Assim $\frac{3}{2}k^2 - k = 1{,}5$, multiplicando por 2:

$$3k^2 - 2k - 3 = 0.$$

Resolvendo a quadrática:

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Como precisamos de $k > 1$, tomamos

$$\boxed{k = \frac{1+\sqrt{10}}{3} \approx 1{,}3874.}$$

Exercício 4.2

4.2 — Função distribuição $F(x) = P(X \le x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \displaystyle\int_1^x (3t - 1)\,dt = \tfrac{3}{2}x^2 - x - \tfrac{1}{2}, & 1 < x < k, \\ 1, & x \ge k. \end{cases}$$

(Verificação: para $x = k$ dá 1.)

Exercício 4.3

4.3 — Mediana m

Mediana m satisfaz $F(m) = 0{,}5$. Para $1 < m < k$ resolvemos

$$\tfrac{3}{2}m^2 - m - \tfrac{1}{2} = 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{3}{2}m^2 - m - 1 = 0.$$

Multiplicando por 2:

$$3m^2 - 2m - 2 = 0,$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

Escolhemos a raiz > 1:

$$\boxed{m = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \approx 1{,}2153.}$$

5. Admitindo que a intensidade dos sismos registados na América do Norte pode ser modelada por uma distribuição Exponencial, com média igual a 2 segundo a escala de Richter. Determine a probabilidade que um sismo que abale essa região:

5.1. Exceda 4 na escala de Richter. [0.75]

5.2. Varie entre 2.5 e 3.5 na mesma escala. [0.75]

5.3. Calcule a variância da intensidade dos sismos. [0.5]

Exercício 5.1

Se $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ e $E(X) = 2$, então

$$\lambda = \frac{1}{2} = 0,5.$$

A função distribuição é

$$P(X > x) = e^{-\lambda x} = e^{-0,5x}.$$

5.1 — Probabilidade de exceder 4

$$P(X > 4) = e^{-0,5 \cdot 4} = e^{-2} \approx 0,1353.$$

Exercício 5.2

Se $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ e $E(X) = 2$, então

$$\lambda = \frac{1}{2} = 0,5.$$

A função distribuição é

$$P(X > x) = e^{-\lambda x} = e^{-0{,}5x}.$$

5.2 — Probabilidade de estar entre 2.5 e 3.5

$$P(2{,}5 < X < 3{,}5) = e^{-0{,}5\cdot 2{,}5} - e^{-0{,}5\cdot 3{,}5} = e^{-1{,}25} - e^{-1{,}75}.$$

Valores numéricos:

$$e^{-1{,}25} \approx 0,2865, \qquad e^{-1{,}75} \approx 0,1738.$$

$$P(2{,}5 < X < 3{,}5) \approx 0,2865 - 0,1738 = 0,1127.$$

Exercício 5.3

Se $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ e $E(X) = 2$, então

$$\lambda = \frac{1}{2} = 0,5.$$

A função distribuição é

$$P(X > x) = e^{-\lambda x} = e^{-0,5x}.$$

5.3 — Variância

Para a distribuição Exponencial:

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = (2)^2 = 4.$$

6. Admita que o tempo que cada funcionário da empresa "Alfa" trabalha por dia útil é bem descrito por uma distribuição Normal(μ=9, σ^2=1) em horas.

6.1. Diga qual a probabilidade de num certo dia útil aleatoriamente selecionado, um funcionário trabalhar mais de 8 horas e 30 minutos? [1.0]

6.2. Diga qual a probabilidade de num certo dia útil aleatoriamente selecionado, um funcionário trabalhar entre 8 e 10 horas? [1.0]

6.3. Se a empresa precisar para determinada tarefa, de 40 horas de trabalho, diga qual a probabilidade de que essa tarefa possa ser cumprida por apenas um funcionário gastando para o efeito 4 dias úteis? [1.0]

Exercício 6.1

Dados: $X \sim N(\mu = 9, \sigma^2 = 1) \Rightarrow \sigma = 1$ (horas).

Usamos $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

σ

6.1 $P(X > 8{,}5) = P\left(Z > \dfrac{8{,}5 - 9}{1}\right) = P(Z > -0{,}5) = \Phi(0{,}5)$.

$\Phi(0{,}5) \approx 0{,}691462$.

Resposta: $P(X > 8{,}5) \approx 0{,}6915$ (≈69,15%).

Exercício 6.2

Dados: $X \sim N(\mu = 9, \sigma^2 = 1) \Rightarrow \sigma = 1$ (horas).

Usamos $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

6.2 $P(8 < X < 10) = P\big(-1 < Z < 1\big) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1.$

$\Phi(1) \approx 0{,}841345 \Rightarrow P(8 < X < 10) \approx 2 \cdot 0{,}841345 - 1 = 0{,}682689.$

Resposta: $P(8 < X < 10) \approx 0{,}6827$ (≈68,27%).

Exercício 6.3

Dados: $X \sim N(\mu = 9, \sigma^2 = 1) \Rightarrow \sigma = 1$ (horas).

Usamos $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

6.3 Um funcionário em 4 dias trabalha a soma $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$. Como os dias são i.i.d.:

$$S \sim N(4\mu,\ 4\sigma^2) = N(36,\ 4),$$

logo $\mathrm{sd}(S) = 2$. Queremos $P(S \geq 40) = P\Big(Z \geq \dfrac{40 - 36}{2}\Big) = P(Z \geq 2) = 1 - \Phi(2)$.

$\Phi(2) \approx 0{,}977250 \Rightarrow P(Z \geq 2) \approx 0{,}022750$.

Resposta: $P(S \geq 40) \approx 0{,}02275$ (≈2,275%).

7. Da informação disponível em determinada empresa sobre o número de faltas por dia, sabe-se que a probabilidade de ninguém faltar em qualquer dia aleatoriamente selecionado é 0.08. Definindo as variáveis aleatórias: X = {número de mulheres que faltam por dia} e Y = {número de homens que faltam por dia}, com base na informação acima disponível, na tabela seguinte referente à função de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y) e às suas respetivas funções de probabilidade marginais, responda às seguintes questões:

X\Y	0	1	f(x)
0			0.6
1		0.12	
2			0.15
f(y)		0.7	

7.1. Complete a tabela, por forma a obter a função de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y). [1.0]

7.2. Diga se o número de mulheres que faltam por dia, influencia o número de homens que faltam por dia. [1.0]

7.3. Num dia em que se verificou ter faltado uma mulher, diga qual a probabilidade de ter faltado um homem. [1.0]

Exercício 7.1

X\Y	0	1	f(x)
0			0.6
1		0.12	
2			0.15
f(y)		0.7	

2 Tabela completa

X\Y	0	1	f_X(x)
0	0.08	0.52	0.60
1	0.13	0.12	0.25
2	0.09	0.06	0.15
f_Y(y)	0.30	0.70	1

Exercício 7.2

Para verificar se X e Y são independentes, devemos ter:

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j) \quad \forall i, j$$

Exemplo: $P(X = 0, Y = 1) = 0.52$ e $P(X = 0)P(Y = 1) = 0.6 \cdot 0.7 = 0.42 \neq 0.52$

✅ Conclusão: **X e Y não são independentes**, ou seja, o número de mulheres que faltam influencia o número de homens que faltam.

Exercício 7.3

Queremos $P(Y=1 \mid X=1)$:

$$P(Y=1 \mid X=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(X=1)} = \frac{0.12}{0.25} = 0.48$$

Obrigada!

Questões?