

EXERCÍCIOS 2*

Topologia de $\mathbb{R}^n$. Generalidades sobre funções de várias variáveis, limites e continuidade.

Topologia de $\mathbb{R}^n$

1. Para cada um dos seguintes conjuntos, determine o interior, a fronteira, e o fecho. Indique quais deles são abertos, fechados, ou limitados.

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\} & D &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = x + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\} & E &= \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + 4y^2 \leq 1\} & F &= \left\{ \left(\frac{n+1}{n}, \frac{(-1)^n n^2}{n^2+1} \right) : n \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

2. Indique entre os seguintes conjuntos, aqueles que são abertos e aqueles que são fechados.

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{2}{n} \right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^3} \right\}; \\ B &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{3}{n} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{n} \right)^2 < \frac{1}{n^3} \right\}; \\ C &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x + \frac{1}{n} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{n} \right)^2 < 1 + \frac{6}{n} \right\}; \\ D &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq -\frac{x^2 + \sqrt{1+x^2+y^2}}{n} \right\}. \end{aligned}$$

Funções de várias variáveis

3. Para cada uma das seguintes expressões, determine o maior domínio no qual a expressão define uma função com valores reais. Represente cada um desses domínios no plano $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= \left(y + \sin \frac{1}{x} \right)^{-1} & \text{g) } f(x, y) &= \frac{\sqrt{x+y} \ln(9-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2-4}} \\ \text{b) } f(x, y) &= \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{1+\ln x} & \text{h) } f(x, y) &= \frac{\sqrt{x^2-y+5}}{\sqrt{6-|x| \ln(x^2+y^2-1)}} \\ \text{c) } f(x, y) &= \sqrt{\ln(x^2+2xy+y^2)} & \text{i) } f(x, y) &= \frac{\sqrt{1-e^{2+y}}}{\ln(9-x^2-y^2)} \\ \text{d) } f(x, y) &= \frac{\sqrt[3]{1-xy}}{\ln(x^2)-\ln(x+y)} & \text{j) } f(x, y) &= \frac{\sqrt{1-|x| \ln(4+x^2-y^2)}}{\sqrt{y-x^2}} \\ \text{e) } f(x, y) &= \frac{\sqrt{4-|x|-|x+y|}}{1-\sqrt{|x|+|y|}} & \text{k) } f(x, y) &= \frac{\sqrt{(y-x^2)(2x-x^2-y^2)}}{1+\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ \text{f) } f(x, y) &= 2 + \ln \frac{x+y}{y} \end{aligned}$$

*Versão: 20 de setembro de 2026.

4. Para cada um dos domínios do exercício 3, determine o interior, a fronteira e o fecho. Quais desses domínios são conjuntos fechados?

5. Esboce as curvas de nível das funções definidas pelas seguintes expressões:

a) $f(x, y) = y + x - x^2$

e) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$;

b) $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}$

f) $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$;

c) $f(x, y) = (x-1)(y+2)$;

g) $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

d) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$;

Limites em $\mathbb{R}^n$

6. Determine os limites das seguintes sucessões, nos casos em que a sucessão é convergente.

a) $a_n = \left(\frac{n^2+n}{\sqrt{n^5+1}-1}, \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right)$;

b) $a_n = \left(n^2 + 1, \sqrt{\left(\frac{3n+1}{n+1} \right)^n} \right)$;

c) $a_n = \left(n \left(e^{\frac{1}{n+4}} - 1 \right), \frac{n^2+1}{n} \sin \frac{\pi}{n} \right)$;

d) $a_n = \left(\sqrt{n} \left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1} \right), \left(1 - \frac{5}{n} \right)^n, n^2 \left(\cos \frac{2}{n} - 1 \right) \right)$;

e) $a_n = \left(\frac{\sqrt{n}+1}{2n-1}, \frac{n+(-1)^n n^2}{(n+1)^2}, \sin \frac{1}{n} \right)$;

7. Calcule os seguintes limites, ou prove que não existem.

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos(xy)$;

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$;

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}$;

j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{(x+y)^2+y^2}$;

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$;

k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{(x+y)^2}$;

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$;

l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy+y}{x^2+2y^2}$;

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4 \sin(xy)}{x^2+y^2}$;

m) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos \left(\frac{1}{xy} \right)$;

f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{y}$;

n) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \cos \left(\frac{1}{xy} \right)$;

g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{xy}$;

o) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{(x-2)^2 \ln y}{(x-2)^2 + (\ln y)^2}$;

h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$;

p) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

8. Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, ou prove que não existe, para cada uma das funções seguintes:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} \sin(x+y), & \text{se } x > 0 \text{ and } y > 0, \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \text{ or } y \leq 0; \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} x + y - \sqrt{xy}, & \text{se } x > 0 \text{ and } y > 0, \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \text{ or } y \leq 0; \end{cases}$

Continuidade de funções em $\mathbb{R}^n$

9. Estude quanto à continuidade cada uma das seguintes funções.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x+y \sin(x+y)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} & \text{f) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 y + xy}{x^2 - y^2}, & x \neq y \wedge x \neq -y, \\ x^2, & x = y, \\ 0, & x = -y. \end{cases} \\
 \text{b) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy^3}{\sqrt{x^2+y^4}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} & \text{g) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{9x^2 - 18x + 4y^2 - 12y}{(x-2)^2 + (y-3)^2}, & 3x \neq 2y, \\ 0, & 3x = 2y. \end{cases} \\
 \text{c) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} & \text{h) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & x+y \neq 0, \\ 0, & x+y = 0. \end{cases} \\
 \text{d) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{|x|+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases} & \text{i) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & x > 0 \wedge y > 0, \\ 0, & x \leq 0 \vee y \leq 0. \end{cases} \\
 \text{e) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^6 + \sqrt{|y|^3}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}
 \end{aligned}$$

10. Assumindo que a função

$$f(x, y) = \begin{cases} 4 \cos(\pi - xy) + \frac{x^3 y \sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0). \\ 4 - k & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}^2$, determine o valor da constante k .

11. Para cada uma das seguintes funções, determine a sua extensão por continuidade com o maior domínio possível.

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}. \quad \text{b) } f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{xy}. \quad \text{c) } f(x, y) = \frac{x^2+y^2-2xy}{x-y}.$$

12. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: (6 abril 2017)

$$f(x, y) = \frac{y \ln(x^2 + y^2 - 1)}{\sqrt{y - |x|}}.$$

- Determine analiticamente o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.
- Defina, analítica e geometricamente, a curva de nível zero de f , dada por $C_0 = \{(x, y) \in D_f : f(x, y) = 0\}$
- Determine o interior e a fronteira de D_f . Averigue se D_f é compacto.

13. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada pela expressão (30 outubro 2019)

$$f(x, y) = \frac{\ln(y - 2x)}{1 - \sqrt{x + y}}.$$

Determine analítica e geometricamente o domínio de f , D_f , e indique o seu interior, fronteira e aderência. Mostre ainda que D_f não é fechado, nem aberto, nem limitado.

14. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: (5 janeiro 2021)

$$f(x, y) = \frac{\ln(9 - x^2 - (y - 1)^2)}{\sqrt{y - 2}}.$$

- a) Determine o domínio de f , D_f , e represente-o geometricamente.
- b) Defina analiticamente o interior e a fronteira do conjunto D_f .
- c) Será que pode existir uma sucessão $(a_n, b_n) \in D_f$ tal que $\lim_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n) \notin D_f$? Em caso afirmativo, dê um exemplo de uma sucessão nas condições referidas.