Mat1-GDES – ER – 22 julho 2021 – Tópicos de resolução

1. a) $D_f = \{x\in\mathbb{R} : x+3\geq 0 \wedge 2-x>0 \wedge x+1\neq 0\} = [-3,-1[\,\cup\,]-1,2[$

b) (i) $\{\text{maj de } D_f\} = [2,+\infty[\Rightarrow \sup(D_f) = 2 \Rightarrow \nexists \max \text{ de } D_f$ (pq $2\notin D_f$)

$\{\text{min de } D_f\} =]-\infty,-3] \Rightarrow \inf(D_f) = -3 \Rightarrow \min(D_f) = -3$ (pq $-3 \in D_f$)

(ii) D_f é limitado pq tem minorantes e majorantes

(iii) $\operatorname{int}(D_f) =]-3,-1[\,\cup\,]-1,2[$; $\operatorname{fr}(D_f) = \{-3,-1,2\}$, $\operatorname{ad}(D_f) = [-3,2]$

2. A série é geométrica, pq da forma $\sum a r^n$, sendo $a=3$, $r=\frac{2}{5}$. O 1º termo é $3\times\frac{2^2}{5^2}$ e a série é convergente pq $|r| = \frac{2}{5} < 1$, tendo soma $= 3\times\frac{2^2}{5^2}\times\frac{1}{1-\frac{2}{5}} = 2^2/5$.

3. a) (i) $D_f = \mathbb{R}$, $f' = (x+2)e^x$

		-2	
f'	$-$	0	$+$
f	↘		↗

f é decrescente em $]-\infty,-2]$ e crescente em $[-2,+\infty[$, tendo um minimizante abs.: $x=-2$.

(ii) $f''(x) = (x+3)e^x$

		-3	
f''	$-$	0	$+$
f	∩		∪

f é côncava em $]-\infty,-3]$ e convexa em $[-3,+\infty[$
$x=-3$ é um pto de inflexão

b) $f(x) \approx \underbrace{f(0)}_{1} + \underbrace{f'(0)}_{2}x + \underbrace{f''(0)}_{3}\frac{x^2}{2} + \underbrace{f'''(0)}_{4\,(*)}\frac{x^3}{3!}$, $x\in V_\varepsilon(0)$

$(*)$ $f'''(x) = (x+4)e^x$

O polinómio pedido é $1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x+1)e^x}{x^2} \underset{\frac{\infty}{\infty},\ RL'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+2)e^x}{2x} \underset{\frac{\infty}{\infty},\ RL'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+3)e^x}{2} = +\infty$

4. $P\frac{2}{x+3} = 2\ln|x+3| + C$;

$P f'g = fg - Pfg'$

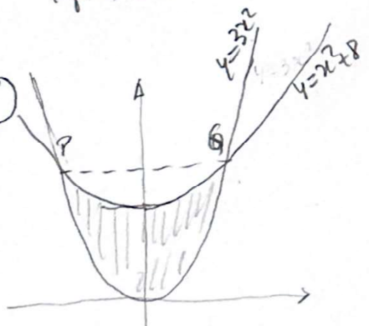
$P\, x\sin(3x+2) = \frac{1}{3}P\, \underset{g}{x}\cdot \underset{f'}{3\sin(3x+2)} = \frac{1}{3}\left(-\cos(3x+2)\times x + P\cos(3x+2)\right) = -\frac{x\cos(3x+2)}{3} + \frac{1}{9}\sin(3x+2) + C$;

$P\frac{\ln^2 x}{5x} = \frac{1}{5}P\frac{1}{x}\ln^2 x = \frac{1}{5}\frac{\ln^3 x}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{15} + C$;

$P\frac{4}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{4}{3}P\frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{4}{3}\arcsin(3x) + C$

$\therefore\ Pf(x) = 2\ln|x+3| - \frac{x}{3}\cos(3x+2) + \frac{1}{9}\sin(3x+2) + \frac{\ln^3 x}{15} + \frac{4}{3}\arcsin(3x) + C$

5.



C. Aux: P, Q:
$\begin{cases} y=3x^2 \\ 3x^2 = x^2+8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=12 \\ x^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=12 \\ x=\pm 2\end{cases}$

área pedida $= \int_{-2}^{2} 8+x^2-3x^2\,dx = \int_{-2}^{2} 8-2x^2\,dx =$

$= \left[8x - 2\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = 16 - \frac{16}{3} - \left(-16+\frac{16}{3}\right) = \frac{64}{3}$

6. $\lim\limits_{x\to e^+} f(x) = \lim\limits_{x\to e^+}\frac{\int_e^x \frac{\sqrt{t^2-1}}{\ln t}dt}{\ln(x+1-e)} \underset{\int_e^e g(t)dt = 0;\ \frac{0}{0}\ RL'H}{=} \lim\limits_{x\to e^+}\frac{\left(\int_e^x\frac{\sqrt{t^2-1}}{\ln t}dt\right)'}{(\ln(x+1-e))'} \underset{TFCI}{=} \lim\limits_{x\to e^+}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\ln x}(x+1-e) = \sqrt{e^2-1}$

$\lim\limits_{x\to e^-} f(x) = \lim\limits_{x\to e^-} a = a$

$f(e) = a$

$\Rightarrow$ f é cont. em $x=e$ sse $\lim\limits_{x\to e^-} f(x) = \lim\limits_{x\to e^+} f(x) = f(e)$

$\Leftrightarrow a = \sqrt{e^2-1}$ //